25. Квадратичныя примы лучей.

Е. С. Федорова.

(Доложено 5 сентября).

Въ статьѣ о линейныхъ совокупностяхъ лучей я показалъ, что система лучей не есть система самостоятельная, но что для нея нужно принять параметръ въ видѣ экстралуча, необходимо входящаго въ составъ линейныхъ совокупностей [1]).

Тогда линейная прима опредѣляется вполнѣ и однозначно двумя, линейная секунда тремя и линейная терція четырьмя произвольными лучами.

Если даны три произвольные луча, то совокупно съ постояннымъ четвертымъ экстралучомъ мы получаемъ необходимыя и достаточныя данныя для опредѣленія лучей полной линейной секунды. Такъ какъ четыре произвольные луча въ общемъ случаѣ пересѣкаются парою сѣкущихъ, вещественною или мнимою, то ясно, что линейную секунду мы можемъ опредѣлить иначе, какъ совокупность лучей, пересѣкающихъ данную пару прямыхъ a и b. Для простоты примемъ ее вещественною. Означимъ экстралучъ, опредѣляемый экстраточками этихъ двухъ общихъ сѣкущихъ, чрезъ e.

Такъ какъ коноприма есть совокупность, опредѣляемая пятью элементами одной линейной секунды, то ясно, что для опредѣленія таковой нельзя дать произвольно пять лучей, а необходимо, чтобы данные пять лучей пересѣкали двѣ прямыя a и b; съ другой стороны, такъ какъ коноприма не есть линейная совокупность, то нѣтъ надобности, чтобы постоянный экстралучъ системы входилъ въ ея составъ. Пара же a съ b своими экстраточками опредѣляетъ постоянный экстралучъ системы, хотя бы онъ и не входилъ въ составъ конопримы.

Итакъ, пусть будетъ дано пять лучей, удовлетворяющихъ поставленному условію; вмѣстѣ съ ними опредѣляются и обѣ особыя сѣкущія a съ b, а значитъ и экстралучъ системы.

Данные пять лучей своими экстраточками опредѣляютъ конопримy точекъ въ экстраплоскости, а изъ каждой экстраточки можно провести одинъ, и только одинъ лучъ данной линейной секунды. Этимъ искомая коноприма лучей вполнѣ и однозначно опредѣляется. Остается только ближе опредѣлить ея свойства, изъ которыхъ прежде всего бросается въ глаза то, что если изъ любой точки пространства проведемъ лучи, параллельныя всѣмъ лучамъ конопримы, то получимъ квадратичный конусъ.

Итакъ, прежде всего, коноприма лучей есть такая ихъ совокупность, которая пересѣкаетъ экстраплоскость въ конопримѣ точекъ, а всѣ ея лучи пересѣкаютъ еще двѣ постоянныя прямыя. Всѣ лучи конопримы параллельны лучамъ квадратичнаго конуса.

Коноприма лучей представляетъ линейчатую поверхность, которая прямыми, проходящими чрезъ экстралучъ e, пересѣкается въ двухъ точкахъ. Въ самомъ дѣлѣ, такія прямыя совокупно съ сѣкущими a и b, можно принять за направляющія линейной примы лучей, принадлежащей разсматриваемой линейной секундѣ. Линейная же прима пересѣкается съ конопримою въ парѣ элементовъ, вещественной или мнимой.

Такихъ направляющихъ лучей имѣется терція. Остальныя же прямыя, каждая въ отдѣльности, совокупно съ сѣкущими a и b, служатъ направляющими не линейныхъ примъ, а сферопримъ лучей, потому что каждая такая совокупность вполнѣ и однозначно опредѣляется тремя прямыми.

Сфероприма же пересѣкается съ конопримою въ

[1]) Ср. Приложеніе въ концѣ статьи.

четырехъ элементахъ, изъ коихъ одна или обѣ пары могутъ быть мнимыми. Отсюда видимъ, что произвольная прямая пересѣкаетъ коноприму лучей въ двухъ парахъ точекъ, а слѣдовательно сама коноприма представляетъ линейчатую поверхность IV порядка и произвольною плоскостью пересѣкается въ кривой IV порядка. Только тѣ плоскости, которыя проходятъ чрезъ прямую e (двойной лучъ поверхности) даютъ въ разрѣзѣ съ конопримою лучей коноприму точекъ. Сюда конечно относится и экстраплоскость, для которой это свойство вводится въ опредѣленіе самаго понятія о конопримѣ лучей [1]).

Но если для опредѣленія конопримы общаго характера намъ должно быть дано пять произвольныхъ элементовъ линейной секунды, то спеціально для опредѣленія тетрапримы необходимо и достаточно четырехъ элементовъ, то есть въ данномъ случаѣ четырехъ лучей.

По четыремъ экстраточкамъ этихъ лучей мы на экстраплоскости легко воспроизведемъ тетраприму точекъ. Соединивъ лучами любую точку съ точками этой тетрапримы, мы получимъ конусъ Шретера, въ которомъ всѣ производящія могутъ быть раздѣлены на такія группы изъ трехъ лучей, въ которыхъ всѣ три взаимноперпендикулярны.

Отсюда заключаемъ, что тетраприма лучей есть такая ихъ совокупность, что въ ней по отношенію къ каждому имѣется пара двухъ другихъ, которые всѣ взаимноперпендикулярны другъ къ другу.

Если, слѣдовательно, пересѣчемъ прямыя a и b тремя взаимноперпендикулярными лучами, то таковыми опредѣляется линейная прима тетраприм.

Тремя лучами, которые во всякомъ случаѣ принадлежатъ одной линейной секундѣ, должна опредѣляться сфероприма. Но съ другой стороны сфероприма получается пересѣченіемъ сферотерціи съ линейною секундою. Сферотерція же, какъ вполнѣ и однозначно опредѣляемая пятью лучами, какъ намъ извѣстно, есть терція нулевой системы вообще (кромѣ тѣхъ особыхъ, которыя составляютъ линейныя терціи). Также сферосекунда есть пересѣченіе сферотерціи съ линейною терціей.

Послѣдняя должна вполнѣ и однозначно опредѣляться четырьмя произвольными лучами. Но, какъ извѣстно, четыре луча пересѣкаются парою сѣкущихъ, вещественныхъ или мнимыхъ, и, слѣдовательно, сферосекунда есть совокупность лучей, пересѣкающихъ эту пару сѣкущихъ.

Если линейную терцію мы охарактеризуемъ присутствіемъ особаго экстралуча, который мы представимъ себѣ находящимся въ горизонтальной плоскости, то различіе между линейною и сферосекундою сведется къ тому, что въ первой обѣ сѣкущія горизонтальны, а въ послѣдней могутъ имѣть всякое иное положеніе. Если къ четыремъ произвольнымъ лучамъ мы воприсоединимъ въ качествѣ пятаго экстралучъ,—получимъ линейную терцію, а если присоединимъ обыкновенный лучъ, то опредѣлимъ сферотерцію. Ихъ пересѣченіе и будетъ та секунда, лучи которой пересѣкаютъ нѣкоторую пару лучей, но только не горизонтальную (при допущеніи горизонтальнаго положенія экстралуча).

Если даны четыре произвольные луча (не находящіеся въ одной линейной секундѣ) и если по ихъ экстраточкамъ мы воспроизведемъ тетраприму точекъ въ экстраплоскости, и всѣ эти экстраточки соединимъ лучами съ парою сѣкущихъ, то получимъ тетраприму лучей въ пространствѣ, всѣ лучи которой принадлежатъ сферосекундѣ, а потому мы можемъ назвать ее сферотетрапримою.

Возвращаясь къ сферопримѣ, мы видимъ, что она воспроизведется лучами по пяти экстраточкамъ, а именно тремя экстраточками данныхъ лучей и двумя экстраточками пары сѣкущихъ, опредѣляющихъ линейную секунду.

Съ другой стороны, мы могли бы воспроизвести по тремъ лучамъ совокупность, если бы соединили три ихъ экстраточки экстракругомъ и соединили бы точки этого круга лучами съ парами точекъ сѣкущихъ.

Такимъ образомъ по тремъ произвольно даннымъ лучамъ мы можемъ воспроизвести двѣ существенно различныя совокупности: ту, которую мы вывели какъ сферопримy и только что упомянутую.

Главныя же совокупности, по опредѣленію, это такія, которыя по данному числу элементовъ воспроизводятся не только вполнѣ, но и однозначно.

Допустимо ли обѣ полученныя совокупности отнести къ главнымъ?

Если бы это было недопустимо, мы должны были бы признать, что главныхъ совокупностей опредѣляемыхъ тремя лучами, вовсе не имѣется.

Но мы не можемъ не замѣтить, что воспроизведеніе упомянутыхъ двухъ совокупностей въ корнѣ различно,—тутъ, такъ сказать, получается не два

---

[1]) Полное подробное изложеніе свойствъ этихъ поверхностей находится въ замѣткѣ «Линейчатая поверхность IV порядка съ высокой симметріей и кривая съ четырьмя точками возврата». Общія свойства ихъ были отмѣчены у Reye Geometrie der Lage II 184 и 231.

рѣшенія одной и той же задачи, но рѣшенія двухъ различныхъ задачъ.

Чтобы пояснить высказываемую мысль, разсмотримъ слѣдующій примѣръ.

Мы не можемъ въ системѣ точекъ отнести параболу къ главнымъ совокупностямъ, потому что по четыремъ даннымъ точкамъ опредѣляется не одна, а двѣ параболы. И эти параболы получаются какъ двузначное рѣшеніе задачи однимъ опредѣленнымъ построеніемъ.

Въ разсматриваемомъ случаѣ мы производимъ два существенно различныя построенія, и каждое изъ нихъ даетъ только одно единственное рѣшеніе. Сами же рѣшенія столь существенно различны, что одно (сфероприма) воспроизводится позиціоннымъ построеніемъ, а для другого служитъ построеніе непозиціонное.

Мы могли бы результаты этихъ двухъ построеній отмѣтить какъ: 1) сфероприма позиціонная, и 2) сфероприма непозиціонная. Ради краткости, мы для перваго рѣшенія сохранимъ названіе „сфероприма лучей“, а для второго введемъ выраженіе „триприма лучей“.

Этотъ результатъ конечно ярко оттѣняетъ специфическія особенности не самостоятельной системы лучей отъ всѣхъ самостоятельныхъ, не только родственныхъ, но и аналогичныхъ системѣ точекъ. Въ послѣднихъ мы воспроизводимъ линейныя примы и конопримы позиціонными, а сферопримы и вообще сферосовокупности непозиціонными построеніями.

Въ системѣ лучей, какъ разъ наоборотъ, всѣ линейныя совокупности и конопримы воспроизводятся непозиціонными, а сферосовокупности (то есть не только сферопримы, но и сферосекунды и сферотерціи) позиціонными.

Въ несамостоятельной системѣ точекъ, а именно съ параметромъ въ видѣ постоянной точки, непозиціонными построеніями воспроизводятся и линейныя примы и сферопримы. И тѣ, и другія есть круги, опредѣляемые по тремъ точкамъ.

Изображенная въ замѣткѣ „Линейчатая поверхность IV порядка съ высокой симметріей“, согласно сдѣланному теперь опредѣленію, и есть высоко симметрическій представитель трипримъ лучей, такъ какъ въ экстраплоскости поверхность пересѣкается въ кругѣ, а сама поверхность вполнѣ опредѣляется тремя лучами, хотя тѣми же тремя лучами могъ быть опредѣленъ и однополый гиперболоидъ какъ сфероприма.

Кромѣ того, конопримы и тетрапримы лучей могутъ проявляться и въ спеціальныхъ разностяхъ, весьма существенно различающихся отъ разностей общаго характера.

Если въ линейной секундѣ даны три произвольные луча, коихъ экстраточки есть C, D, E, то ясно, что мы можемъ опредѣлить въ экстраплоскости двѣ тетрапримы точекъ ACDE и BCDE, въ коихъ A и B, какъ экстраточки сѣкущихъ направляющихъ a и b, не могутъ считаться спеціально заданными, такъ какъ онѣ общи и характерны для всѣхъ лучей линейной секунды.

Эти образы раздѣляютъ съ тетрапримами лучей то общее свойство, что каждому ихъ лучу соотвѣтствуютъ въ совокупности два другихъ луча, составляющіе вмѣстѣ группу изъ трехъ взаимноперпендикулярныхъ лучей. Но они представляютъ ту особенность, что въ составъ лучей входитъ одна изъ направляющихъ сѣкущихъ. Такъ какъ таковыхъ квадратичныхъ примъ, опредѣляемыхъ тремя лучами, имѣется двѣ, то онѣ уже не составляютъ главной совокупности.

Эти непозиціонныя квадратичныя примы представляютъ лишь спеціальныя разности хорошо изученныхъ позиціонныхъ особыхъ тетрапримъ, составляющихъ поверхность, извѣстную подъ названіемъ линейчатой поверхности III порядка, по крайней мѣрѣ въ ея спеціальныхъ формахъ.

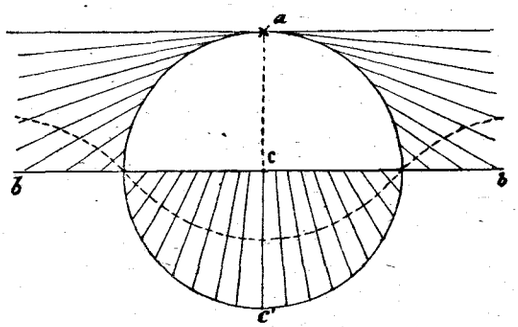
Пусть даны четыре луча c, d, e и f линейной секунды, опредѣляемой сѣкущими направляющими a и b. Если одну изъ этихъ сѣкущихъ напр. a примемъ за пятый лучъ, то на этихъ лучахъ получимъ пять экстраточекъ, опредѣляющихъ коноприму точекъ на экстраплоскости. Эта тетраприма раздѣляетъ съ конопримами общаго характера то свойство, что конусъ, составленный изъ производящихъ параллельныхъ ея лучамъ, есть конусъ квадратичный (но не конусъ Шретера, какъ въ обыкновенныхъ тетрапримахъ).

Если изъ какой-нибудь экстраточки конопримы проведемъ чрезъ сѣкущую a плоскость, то получимъ на другой сѣкущей b проективную (гомологичную) точку. Такимъ образомъ устанавливается гомологичность точекъ на конопримѣ и на независимой отъ нея сѣкущей b. По опредѣленію упомянутой поверхности III порядка она и составляется лучами, соединяющими гомологичныя точки конопримы и сѣкущей b [1]).

Ради наглядности линейчатая поверхность III порядка изображена на прилагаемой фигурѣ, хотя это изображеніе можетъ быть толкуемо весьма разно-

[1]) Benno Klein. Ueber die geradlinige Fläche dritter Ordnung und ihre Abbildung an einer Ebene. Strassburg 1876 Цитирую по Reye. Geometrie der Lage I 247.

образно. Какъ простѣйшее примемъ такое, по которому эта поверхность представлена въ разрѣзахъ между двумя горизонтальными плоскостями, изъ которыхъ въ плоскости чертежа находится кругъ, а выше лежащая плоскость проходитъ чрезъ сѣкущую b.



На фигурѣ въ прямой проекціи представлены только отрѣзки лучей поверхности, находящіеся въ предѣлахъ между упомянутыми двумя плоскостями. Если мы разсѣчемъ ту же поверхность третьею горизонтальною плоскостью, проходящею посрединѣ между двумя другими, то получимъ геометрическое мѣсто срединъ отрѣзковъ въ видѣ кривой III порядка, изображенной на фигурѣ пунктиромъ.

Точкѣ C на сѣкущей b, проектирующейся въ центрѣ круга, на кругѣ гомологична точка C'. Соотвѣтственный лучъ на вертикальной сѣкущей a отмѣтитъ нѣкоторую точку. Если, начиная съ этой точки, мы будемъ прослѣживать лучи поверхности, поднимаясь по сѣкущей a, то въ сѣченіи съ кругомъ получимъ точки одной четверти окружности, и чрезъ послѣднюю уже будетъ проходить вертикальный лучъ, отмѣчающій на сѣкущей a экстраточку. Слѣдующія точки круга отмѣтятъ на a рядъ поднимающихся точекъ вплоть до той, которая находится на діаметрѣ C' и чрезъ которую проходитъ въ качествѣ луча поверхности касательные къ кругу въ плоскости чертежа. Дальнѣйшее движеніе по второй полуокружности приведетъ къ лучамъ, отмѣчающимъ на a точки въ обратномъ порядкѣ.

Въ такомъ видѣ поверхность представляется спеціальною и симметричною. Мы можемъ обобщить изображеніе въ томъ смыслѣ, что на изображенный кругъ смотрѣть лишь какъ на проекцію эллипса, наклоненнаго къ плоскости чертежа. Всѣ существенныя свойства поверхности остаются тѣ же; она будетъ спеціальна въ томъ смыслѣ, что лучъ, находящійся въ плоскости эллипса не пересѣкаетъ этой кривой, а касается къ ней; но уже поверхность не будетъ симметричною.

Произвольная плоскость пересѣкаетъ эту поверхность въ кривой III порядка. Поэтому въ общемъ случаѣ и экстраплоскость заключаетъ въ себѣ такую же кривую. Но въ сѣченіяхъ, проходящихъ чрезъ какой-нибудь лучъ поверхности эта кривая сѣченія распадается на этотъ лучъ и конопріму [1]). Если мы такъ коллинеарно преобразуемъ эту поверхность, чтобы въ экстраплоскости произошло такое распаденіе, то мы получимъ конопріму лучей. Если она будетъ общаго характера, то собственно конопримою будетъ и сама преобразованная поверхность; если она станетъ тетрапримою, то такъ же назовется и сама поверхность; наконецъ, если коноприма въ экстраплоскости станетъ сферопримою, то сферопримою лучей назовется и поверхность, такъ же какъ прямая въ экстраплоскости опредѣляетъ линейную приму лучей.

Итакъ, въ разсматриваемомъ случаѣ системы лучей существуетъ столь замѣчательное однозначное соотношеніе между точками въ экстраплоскости и лучами системы, что всякое построеніе въ первой однозначно передается во второй, почему передаются и сами названія геометрическихъ образовъ (только сферопримы экстраточекъ соотвѣтствуютъ трипримамъ лучей).

Все изложенное выше дастъ намъ способъ построенія всякаго рода квадратичныхъ примъ лучей, и притомъ всѣ эти примы не позиціонны, за исключеніемъ сферопримъ и двухъ спеціальныхъ конопримъ.

Особенностью этой системы является и обиліе спеціальныхъ формъ.

---

[1]) Нетрудно видѣть, что экстраплоскость пересѣчетъ поверхность въ кривой съ точкою самопересѣченія (двойною), соотвѣтствующею вертикальнымъ прямымъ. Линейной примѣ плоскостей, имѣющей осью какой-нибудь лучъ поверхности въ экстраплоскости соотвѣтствуетъ линейная прима экстралучей, пересѣкающихъ экстракривую въ двухъ другихъ точкахъ. Эти точки соотвѣтствуютъ ассимптотамъ гиперболъ сѣченія поверхности. Если пара экстраточекъ сѣченія мнимая, то получается эллипсъ. Плоскости, пересѣкающія экстраплоскость въ касательныхъ къ экстракривой, пересѣкаютъ послѣднюю лишь въ одной точкѣ, и потому сѣченія поверхности въ такихъ плоскостяхъ есть параболы. Имѣется, слѣдовательно, цѣлая прима такихъ параболическихъ сѣченій. Но сѣченія чрезъ двойную точку даютъ еще одну экстраточку, и значитъ плоскости чрезъ оба вертикальныя луча, а также чрезъ линію двойныхъ точекъ пересѣкаютъ поверхность въ параболахъ, и, въ частности, въ двухъ вертикальныхъ лучахъ. Всѣ плоскости, кромѣ вертикальныхъ, пересѣкаютъ оба вертикальные луча въ двухъ точкахъ; и если плоскость не проходитъ чрезъ какой-нибудь лучъ этой поверхности, то въ сѣченіи получимъ кривую III порядка, для которой эти двѣ точки есть точки перегиба.

Для полноты мы разсмотримъ ихъ по порядку.

1. Если пять данныхъ лучей одной линейной секунды, характеризующейся двумя сѣкущими a и b съ экстраточками A и B, мы пересѣчемъ экстраплоскостью и по пяти экстраточкамъ построимъ коноприму, то получимъ спеціальную линейчатую поверхность IV порядка (въ которой гексаприма двойныхъ точекъ представлена тремя прямыми), представляющую коноприму лучей.

Если случайно эта коноприма пересѣчетъ одну или обѣ экстраточки A и B, то получимъ особыя спеціальныя позиціонныя разности, а именно: если она пересѣчетъ одну изъ этихъ точекъ, то станетъ поверхностью III порядка, а если она пересѣчетъ обѣ точки, то получится система производящихъ гиперболоида то есть поверхности II порядка (сфероприма).

Если систему подвергнемъ коллинеарному преобразованію и такимъ образомъ получимъ для заданія иные пять лучей, также какъ и иную пару прямыхъ, характеризующихъ секунду, то все-таки, примѣняя тотъ же ходъ построенія, получимъ ту же коноприму, что получается изъ ранѣе полученной тѣмъ же коллинеарнымъ преобразованіемъ. Разности, удовлетворяющія этому условію, и есть разности позиціонныя.

2. Если четыре данные луча одной линейной секунды мы пересѣчемъ экстраплоскостью и по экстраточкамъ построимъ тетраприму, то получимъ вообще такую особую линейчатую поверхность IV порядка, въ которой всѣ лучи могутъ быть раздѣлены на группы изъ трехъ взаимноперпендикулярныхъ.

Если случайно эта тетраприма пересѣчетъ одну или обѣ экстраточки A и B, то получимъ спеціальныя разности тетраримъ, анологичныя предъидущему случаю. Но здѣсь позиціонныхъ представителей уже не имѣется.

3. Если три данные луча одной линейной секунды мы пересѣчемъ экстраплоскостью и по экстраточкамъ построимъ триприму, то получимъ вообще такую особую линейчатую поверхность IV порядка, въ которой совокупность лучей параллельна лучамъ нѣкотораго конуса вращенія.

Если случайно эта триприма пересѣчетъ одну или обѣ экстраточки A и B, то получимъ спеціальныя разности, аналогичныя разностямъ предъидущихъ случаевъ, посреди коихъ позиціонныхъ разностей также не представлено, за исключеніемъ послѣдней, представляющей спеціальную сфероприму (гиперболоидъ вращенія).

Четыре луча линейной секунды опредѣляютъ линейную приму конопримъ, и въ составѣ этой линейной примы будетъ представлена одна единственная тетраприма. Всѣ вообще конопримы здѣсь представлены спеціальными линейчатыми поверхностями IV порядка, но въ каждой примѣ вообще непремѣнно имѣются двѣ спеціальныя разности, представляющія линейчатую поверхность III порядка. Если же въ этой примѣ имѣется и поверхность II порядка, то таковая уже не имѣетъ общаго характера, а есть прима спеціальная.

Три луча линейной секунды опредѣляютъ линейную секунду конопримъ лучей. Въ составѣ этой секунды непремѣнно заключается линейная прима тетраримъ лучей и одна единственная сфероприма, а также непозиціонная триприма.

Въ этой секундѣ представлено уже двѣ спеціальныя линейныя примы конопримъ — поверхностей III порядка и одна единственная поверхность II порядка. Въ каждой изъ двухъ примъ поверхностей III порядка непремѣнно представлено по одной тетраримѣ.

Если триприма въ этой секундѣ представлена поверхностью III порядка, то это уже составляетъ особый случай. Случай, когда триприма представлена поверхностью II порядка, еще болѣе спеціаленъ. Также спеціальны секунды, въ которыхъ представлено болѣе чѣмъ одна сфероприма или триприма; системы сфероримъ и триримъ независимы другъ отъ друга.

Возвращаясь къ построенію линейной примы лучей, мы можемъ сказать, что если даны два луча въ данной линейной секундѣ, то по ихъ двумъ экстраточкамъ проводимъ экстрапрямую, и тогда лучи, исходящіе изъ точекъ этой прямой и есть лучи линейной примы, находящейся въ данной линейной секундѣ. Ясно, что эта прима представлена гиперболическимъ параболоидомъ.

Если въ экстраплоскости мы проведемъ какую-нибудь кривую III или высшаго порядковъ и по точкамъ этой кривой воспроизведемъ лучи данной линейной секунды, то получимъ приму соотвѣтственную то есть III или высшаго порядковъ. Во всѣхъ случаяхъ, когда такія кривыя будутъ проходить чрезъ одну или обѣ экстраточки A и B, мы получимъ особыя разности такихъ примъ лучей.

ПРИЛОЖЕНІЕ.

Спеціальная нулевая система, лучи которой составляютъ линейную терцію.

Если бы за параметръ системы лучей мы приняли не экстралучъ, а лучъ обыкновенный, то онъ долженъ былъ бы входить въ составъ каждой линейной примы. Тогда линейная секунда опредѣлялась бы двумя прямыми, пересѣкающими этотъ лучъ, а эти двѣ сѣкущія, въ свою очередь, опредѣлялись бы тремя произвольными лучами: линейная прима направляющихъ гиперболоида, опредѣленнаго этими тремя лучами, пересѣкла бы лучъ въ двухъ точкахъ, вещественныхъ или мнимыхъ, и направляющія, проходящія чрезъ эти двѣ точки, и были бы искомою парою сѣкущихъ, опредѣляющихъ линейную секунду. Линейная терція опредѣлялась бы четырьмя произвольными лучами слѣдующимъ образомъ: мы могли бы чрезъ особый лучъ провести двѣ произвольныя плоскости, и тогда четыре данные луча установили бы коллинеарность точекъ и прямыхъ обѣихъ плоскостей. Лучами терціи были бы всѣ прямыя, проходящія чрезъ точки, находящіяся на двухъ гомологичныхъ прямыхъ въ этихъ плоскостяхъ.

Теперь предположимъ, что постоянный лучъ есть экстралучъ, соотвѣтствующій горизонтальнымъ плоскостямъ.

Изъ общихъ курсовъ извѣстно, что двѣ коллинеарно-проективныя (гомологичныя), коньективныя системы точекъ имѣютъ три совпадающія гомологичныя точки, изъ коихъ одна пара можетъ быть мнимою [1]) (то есть точки гомологичны другъ другу какъ пары). Въ нашемъ случаѣ, послѣдняя пара во всякомъ случаѣ находится на экстралучѣ, какъ лучѣ терціи, соединяющемъ гомологичныя точки. Слѣдовательно, на каждой изъ плоскостей остается по одной точкѣ, проектирующейся другъ на другѣ по вертикали.

Получается совершенно особая нулевая система, не обладающая ни осью вращенія, ни поступаніемъ вдоль этой оси, а потому заслуживающая спеціальнаго изученія.

Прежде всего она обладаетъ особою (вертикальною) осью, представляющею лучъ терціи. Линейныя примы лучей въ горизонтальныхъ плоскостяхъ есть совокупности параллельныхъ прямыхъ. Такимъ образомъ всѣ горизонтальные лучи, пересѣкающіе вертикальный лучъ, есть общія оси линейныхъ примъ плоскостей, изъ коихъ горизонтальная имѣетъ нулевую точку на особомъ экстралучѣ, а вертикальная на особомъ вертикальномъ лучѣ.

[1]) Если не считать особыхъ спеціальныхъ случаевъ (см. напр. Reya. Geom. d. Lage II, 70).

Если обѣ горизонтальныя плоскости съ гомологичными системами точекъ мы будемъ разсматривать какъ коньективныя (совмѣщенныя), то въ ихъ совмѣщенныхъ центрахъ (точкахъ двойной оси симметріи) получимъ двѣ гомологичныя линейныя примы лучей то есть ихъ инволюцію, а слѣдовательно и два двойные луча, вещественные или мнимые въ зависимости отъ того, будутъ ли вещественными или мнимыми двойныя точки инволюціи на особомъ экстралучѣ.

Въ первомъ изъ этихъ двухъ случаевъ въ системѣ имѣются двѣ особыя вертикальныя плоскости, пересѣкающіяся въ особомъ вертикальномъ лучѣ, въ которыхъ всѣ вообще прямыя есть лучи системы; это обстоятельство рѣзко подчеркиваетъ спеціальныя свойства этой нулевой системы.

Въ каждой горизонтальной плоскости этой терціи представлены только параллельные лучи, а именно лучи, соединяющіе точки одной прямой съ экстраточкою прямой, ей гомологичной.

Итакъ, *нулевыя точки вертикальныхъ плоскостей, проходящихъ чрезъ особый лучъ, есть точки этого луча, а нулевыя точки горизонтальныхъ плоскостей есть точки особаго экстралуча.*

Мы можемъ установить проективную связь между точками этихъ двухъ осей и проходящими чрезъ нихъ нулевыми плоскостями, и этого вполнѣ достаточно, чтобы воспроизвести всю нулевую систему и, въ частности, найти по любой точкѣ пространства ея нулевую плоскость и по любой плоскости ея нулевую точку.

Въ самомъ дѣлѣ, если дана точка, то сначала проведемъ двѣ плоскости: вертикальную чрезъ особый лучъ и горизонтальную (т. е. также чрезъ особый экстралучъ). По установленной проективности мы найдемъ точку на особомъ лучѣ, какъ нулевую точку проведенной вертикальной плоскости, и прямая, соединяющая эту точку съ данною, должна находиться въ нулевой плоскости данной точки. Также найдемъ въ горизонтальной плоскости направленіе тѣхъ лучей, которые находятся въ этой плоскости, а слѣдовательно и горизонтальный лучъ, проходящій чрезъ данную точку. Имѣя же два пересѣкающіеся въ ней луча, мы находимъ и ея нулевую плоскость, въ которой будутъ находиться и всѣ лучи, чрезъ нея проходящіе.

Если дана плоскость, то сначала находимъ точки

ея пересѣченія съ обоими особыми лучами. По точкѣ на вертикальномъ лучѣ находимъ ея вертикальную нулевую плоскость, а пересѣченіе послѣдней съ данною есть лучъ, на которомъ должна находиться искомая нулевая точка. По точкѣ на экстралучѣ находимъ проективную ей горизонтальную плоскость, которая и пересѣчетъ найденную прямую въ искомой точкѣ; этимъ опредѣлится и положеніе всѣхъ лучей терціи въ данной плоскости.

Всякая линейная прима этой терціи проходитъ чрезъ особый экстралучъ.

Для доказательства достаточно установить коррелятивность между лучами этой терціи и точками пространства, какъ это сдѣлалъ Шумахеръ [1]).

Мы уже имѣли двѣ горизонтальныя плоскости съ установленною гомологичностью ихъ точекъ. Теперь установимъ еще коррелятивность между точками этихъ двухъ плоскостей и лучами двухъ линейныхъ секундъ, соблюдая однако то условіе, чтобы лучамъ этихъ секундъ, находящимся въ одной общей плоскости, были на нашихъ плоскостяхъ коррелятивны точки двухъ гомологичныхъ прямыхъ.

Пусть центры гомологичныхъ секундъ лучей есть точки A′ и B′, и возьмемъ въ пространствѣ нѣкоторую точку K. Она есть пересѣченіе лучей KA′ и KB′, лежащихъ въ одной плоскости, а этой общей плоскости въ нашихъ двухъ гомологичныхъ системахъ коррелятивны два гомологичныхъ луча; спеціально же двумъ упомянутымъ лучамъ KA′ и KB′ коррелятивны точки на гомологичныхъ лучахъ; двумя же точками лучъ терціи опредѣляется вполнѣ. Этимъ установлена искомая коррелятивность въ общемъ случаѣ.

Въ частности, въ особомъ экстралучѣ совмѣщены два гомологичные луча, а слѣдовательно всѣмъ точкамъ его коррелятивны лучи въ одной единственной плоскости, проходящей чрезъ прямую A′B′. Какую бы точку мы ни взяли въ этой плоскости, всегда засѣкающимъ ее лучамъ изъ A′ и B′ коррелятивны точки на экстралучѣ, а слѣдовательно всѣмъ точкамъ этой особой плоскости коррелятивенъ одинъ и тотъ же экстралучъ [2]).

Линейная прима лучей, коррелятивная нѣкоторой произвольной прямой пространства, всегда содержитъ въ себѣ особый экстралучъ, потому что любая прямая пересѣкаетъ въ одной точкѣ упомянутую особую плоскость, а этой точкѣ коррелятивенъ экстралучъ. Исключеніе является лишь тогда, если прямая дана въ самой особой плоскости. Всѣмъ ея точкамъ коррелятивенъ одинъ и тотъ же особый экстралучъ, и въ этомъ случаѣ вся линейная прима лучей вырождается въ тотъ же лучъ, какъ двойной, въ которомъ совмѣщается безконечное число лучей линейной примы.

Но въ нулевой системѣ мы различаемъ нетолько собственно ея лучи, но еще и линейную терцію сѣкущихъ этихъ лучей. Каждые два луча опредѣляютъ совмѣстно съ особымъ экстралучомъ приму направляющихъ гиперболическаго параболоида, и всѣ направляющія должны пересѣчь особый экстралучъ. Каждый отдѣльный лучъ системы опредѣляетъ секунду сѣкущихъ, также пересѣкающихъ тотъ же экстралучъ; наконецъ полное число сѣкущихъ есть спеціальная терція прямыхъ, пересѣкающихъ тотъ же лучъ. Эта терція есть полная совокупность всѣхъ горизонтальныхъ прямыхъ.

Каждая такая сѣкущая вполнѣ и однозначно опредѣляетъ линейную приму лучей терціи, если на особомъ лучѣ мы возьмемъ двѣ точки и ихъ вертикальныя нулевыя плоскости. Въ каждой изъ этихъ плоскостей сѣкущая пересѣчетъ по одному лучу, а эти два луча совмѣстно съ особымъ экстралучомъ опредѣляютъ линейную приму лучей.

Чрезъ каждую точку этой сѣкущей пройдетъ одинъ изъ лучей этой примы, а, совокупно съ тѣмъ горизонтальнымъ лучомъ, который пройдетъ чрезъ ту же точку опредѣлится и нулевая плоскость этой точки. Всѣ эти нулевыя плоскости пересѣкаются въ одной горизонтальной прямой, гомологичной данной сѣкущей, состоящей изъ нулевыхъ точекъ этихъ плоскостей.

Въ обыкновенной нулевой системѣ, если главную ея ось (ось вращенія) мы представимъ себѣ вертикальною, каждый горизонтальный лучъ есть ось линейной примы плоскостей, нулевыя точки которыхъ есть точки этого луча, и притомъ начиная отъ точки на оси, нулевая плоскость которой горизонтальна, плоскости дѣлаются все сильнѣе и сильнѣе наклоненными (по простому закону r. tang $\rho = k$) и для экстраточекъ становятся вертикальными ($\rho = 0$).

Въ разсматриваемой спеціальной нулевой системѣ, какъ разъ наоборотъ, нулевая плоскость точки на особомъ вертикальномъ лучѣ вертикальна, а нулевая плоскость экстраточки горизонтальна.

Изъ содержанія этой статьи усматривается, какъ просто развертываются квадратичныя примы лучей и даже примы болѣе высокаго порядка при допущеніи принятой здѣсь концепціи линейной терціи и другихъ линейныхъ совокупностяхъ системы лучей,

[1]) R. Schumacher, Mathem. Annalen **37** 102. Ср. Reye Geom. d. Lage II 185.

[2]) Точкѣ на особомъ экстралучѣ, какъ точкѣ одной и какъ точкѣ другой плоскости коррелятивны два гомологичные луча, а потому всѣмъ вообще точкамъ этого луча въ особой плоскости коррелятивна нѣкоторая коноприма.