23. Новыя особыя точки трехугольниковъ въ связи съ гномоническими проекціями кристаллографическихъ комплексовъ.

Е. С. Федорова

(доложено 5 сентября).

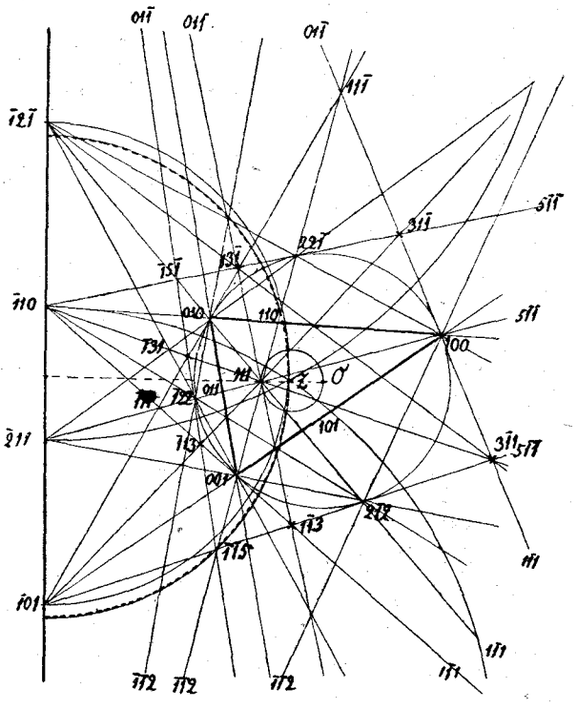
Извѣстно большое число особыхъ точекъ, положеніе которыхъ строго выводится для каждаго даннаго трехугольника. Эти точки открываются при изученіи тѣхъ или другихъ свойствъ трехугольниковъ, число коихъ весьма значительно. Несмотря на всю простоту такого образа, какъ обыкновенный трехугольникъ, изученіе его все-таки еще не можетъ считаться исчерпаннымъ и съ теченіемъ времени, хотя и рѣдко, открываются новыя и новыя свойства.

Недавно мнѣ посчастливилось открыть полярныя свойства трехугольниковъ[1]) какъ вещественныхъ, такъ и мнимыхъ. Для первыхъ находимъ, что совокупность полюсовъ по отношенію къ нимъ какой-нибудь линейной примы лучей есть коноприма, описанная около трехугольника. Полной совокупности, а именно линейной секундѣ такихъ линейныхъ примъ соотвѣтствуетъ полная совокупность, тоже линейная секунда, такихъ конопримъ, описанныхъ около трехугольника. Но, какъ извѣстно, въ линейной секундѣ конопримъ вообще, а въ частности и той, которая опредѣляется трехугольникомъ, имѣется одинъ, и только одинъ (въ общемъ случаѣ) кругъ. Въ разсматриваемомъ случаѣ такой кругъ прямо получается описываніемъ около трехугольника. Представляется задача, впрочемъ разрѣшаемая чрезвычайно просто, найти ту точку, которая служитъ центромъ линейной примы лучей—поляръ точекъ описаннаго круга. Для рѣшенія этой задачи достаточно найти поляры двухъ какихъ-нибудь точекъ круга по отношенію къ трехугольнику; точка ихъ пересѣченія и есть искомая. Она то и составляетъ ту новую особую точку трехугольника, о которой говорится въ заглавіи.

[1]) Эти Записки V 73 и 147.

Но теперь отмѣтимъ ея кристаллографическое значеніе.

Положимъ въ основаніе соображеній обыкновенную гномоническую проекцію комплекса гексагональной сингоніи. Полюсы граней (100), (010), (001) представятъ вершины правильнаго трехугольника;



его центръ есть полюсъ грани (111); онъ же есть центръ круга, на которомъ находятся полюсы граней $(\bar{1}22)$, $(2\bar{1}2)$ и $(22\bar{1})$. Поляра центра по отношенію къ кругу (также какъ и по отношенію къ треугольнику) есть экстропрямая, и она же есть гномоническая проекція пояса [111].

Теперь произведемъ произвольное коллинеарное преобразованіе.

Правильный трехугольникъ преобразуется въ нѣкоторой другой; экстрапрямая преобразуется въ обыкновенную прямую, кругъ—въ нѣкоторую коноприму, а полюсъ большей экстрапрямой по отношенію къ конопримѣ (также какъ и по отношенію къ трехугольнику) даетъ полюсъ грани (111). Но посреди всѣхъ такихъ возможныхъ коллинеарныхъ преобразованій есть такое, при которомъ и преобразованная коноприма будетъ кругомъ, и тогда, какъ мы только—что показали, положеніе полюса (111), а вмѣстѣ съ нимъ и построеніе поляры [111], да и построеніе всего кристаллографическаго комплекса становится строго опредѣленнымъ.

Такъ какъ полюсъ каждой изъ трехъ граней $\{\bar{1}22\}$ съ вершинами правильнаго треугольника образуетъ гармоническій четырехугольникъ [1]), то таковой же получится и послѣ коллинеарнаго преобразованія. Если въ двухъ вершинахъ трехугольника напр. (100) и (010) проведемъ касательныя къ конопримѣ, а изъ точки пересѣченія прямую чрезъ (001), то она пройдетъ и чрезъ $(22\bar{1})$ и чрезъ (111). Слѣдовательно, три такія прямыя въ пересѣченіи дадутъ полюсъ (111).

Такъ какъ шесть полюсовъ $\{100\}$ и $\{\bar{1}22\}$ образуютъ вершины шестиугольника, вписаннаго въ коноприму, то по теоремѣ Паскаля пары противоположныхъ сторонъ пересѣкутся въ трехъ точкахъ, находящихся на прямой, а именно на полярѣ [111] точки (111). На той же полярѣ находятся и три точки пересѣченія сторонъ трехугольника съ касательными, проведенными при противоположной вершинѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ вершины трехугольника напр. съ полюсомъ $(\bar{1}22)$ образуютъ вершины гармоническаго четырехугольника, то точка пересѣченія касательныхъ въ (100) и $(\bar{1}22)$, то есть полюсъ $(01\bar{1})$, долженъ находиться и на сторонѣ (010): (001) трехугольника. Онъ же имѣетъ своею полярою, по отношенію къ конопримѣ, прямую (100): $(\bar{1}22)$, проходящую чрезъ полюсъ $(1\bar{1}1)$.

Такимъ образомъ найдемъ на этой полярѣ шесть гномоническихъ полюсовъ $(1\bar{1}0)$ и $(\bar{2}11)$, какъ это легко усмотрѣть изъ приложенной фигуры.

Если во всѣхъ вершинахъ упомянутаго шестиугольника проведемъ касательныя къ конопримѣ, то получимъ другой шестиугольникъ, описанный около конопримы (хотя его также можно вписать въ другую коноприму); его вершины есть полюсы $(31\bar{1})$, $(3\bar{1}1)$, $(1\bar{1}3)$...

Если стороны этого шестиугольника будемъ продолжать до пересѣченія черезъ одну, то получимъ два трехугольника съ вершинами $(11\bar{1})$, $(1\bar{1}1)$, $(\bar{1}11)$ и $(5\bar{1}\bar{1})$, $(\bar{1}5\bar{1})$ $(\bar{1}\bar{1}5)$.

Такъ какъ поляры точекъ (011), (101), (110) есть прямыя, проходящія соотвѣтственно черезъ $(\bar{2}11)$, $(\bar{1}2\bar{1})$, $(\bar{1}\bar{1}2)$, то мы получаемъ на этой прямой инволюцію паръ точекъ; принявъ же образуемые этими парами отрѣзки за діаметръ круговъ, найдемъ, что круги эти образуютъ линейную приму и пересѣкаются въ постоянной парѣ точекъ (Z и симметричной по отношенію къ этой прямой), причемъ эта пара точекъ находится на перпендикулярѣ ихъ полюса (111).

Въ частности, если за описанную около трехугольника коноприму примемъ кругъ, а его за кругъ реципрочнаго преобразованія, то поляра преобразуется въ другой кругъ, концы діаметра котораго есть полюсъ (111) и центръ O круга преобразованія. Слѣдовательно, оба эти круга принадлежатъ одной линейной примѣ круговъ, радикальная ось которой есть поляра точки (111); и всѣ круги этой примы прямоугольно пересѣкаются кругами предъидущей линейной примы; точечные же круги этой примы есть точка Z и ей симметрическая. Отсюда заключаемъ, что центръ O и полюсъ (111) гармонически раздѣляютъ послѣднюю пару точекъ.

Этимъ положеніе полюса (111), какъ новой особой точки трехугольника, вполнѣ опредѣляется.

Столь разнообразныя и, интересныя соотношенія раскрываются при примѣненіи новаго понятія въ связи съ развитіемъ кристаллографическаго комплекса въ гномонической проекціи.

[1]) Напомню, что гармоническимъ четырехугольникомъ, вписаннымъ въ конопримѣ, называется такой, коего вершины на конопримѣ образуютъ четыре гармоническія точки. Любая точка конопримы, соединенная лучами съ этими точками, есть центръ четырехъ гармоническихъ лучей. Если въ двухъ сопряженныхъ вершинахъ гармоническаго четыреугольника проведемъ къ конопримѣ касательныя, то обѣ остальныя вершины находятся на одной прямой съ точкою пересѣченія касательныхъ.

24. Линейчатая поверхность IV порядка съ высокой симметріей и кривая съ четырьмя точками возврата.

Е. С. Федорова.

(доложено 5 сентября).

Какъ извѣстно, эти поверхности IV порядка могутъ быть воспроизведены двумя проективными квадратичными примами плоскостей. Теорія этихъ поверхностей излагается въ подробныхъ руководствахъ [1]).

Каждыя двѣ проективныя плоскости при двухъ центрахъ S и S_1 пересѣкаются въ одномъ лучѣ этой поверхности.

Въ общемъ случаѣ на поверхности имѣется гексаприма точекъ, въ которыхъ пересѣкается по два луча поверхности. Плоскости, проходящія чрезъ такую пару лучей, могутъ считаться касательными плоскостями, а такъ какъ плоское сѣченіе поверхности въ общемъ случаѣ есть кривая IV порядка, то понятно, что если плоскость проходитъ чрезъ одинъ изъ лучей поверхности, то эта кривая распадается на этотъ лучъ и кривую III порядка, а если плоскость проходитъ чрезъ пару лучей, то таже кривая распадается уже на эту пару и еще конопріму; отсюда видимъ, что касательныя плоскости, проходящія чрезъ пары лучей поверхности, пересѣкаютъ эту поверхность еще въ конопримѣ.

Упомянутая гексаприма на поверхности есть кривая самопересѣченія поверхности или кривая ея двойныхъ точекъ. Лучи поверхности входятъ въ составъ секунды хордъ гексапримы. Поэтому произвольная плоскость, пересѣкающая послѣднюю въ трехъ точкахъ, въ этихъ же точкахъ пересѣкаетъ и поверхность. Такая поверхность можетъ быть образована совокупностью хордъ гексапримы, пересѣкающихъ произвольно данную прямую. Въ каждой плоскости, проходящей чрезъ эту прямую кривая IV порядка распадается на четыре прямыя, а именно, кромѣ упомянутой, еще на стороны трехугольника, вершины коего есть точки пересѣченія гексапримы

[1]) Напр. Reye. Geometrie der Lage II 229.

Какъ сама гексаприма, такъ и воспроизводимая изъ нея поверхность IV порядка, не могутъ имѣть никакихъ элементовъ симметріи. Но для спеціальныхъ разностей, а именно когда гексаприма распадается на прямую и конопріму, а тѣмъ болѣе, когда она распадается на три прямыя, симметрія можетъ имѣть мѣсто [2]). Напр. взявъ такую симметричную гексапріму, чтобы плоскость симметріи разсѣкала ея составную конопріму и проходила чрезъ пересѣкающую эту конопріму прямую, мы можемъ составить такую совокупность хордъ этой гексапримы, которая пересѣкала бы нѣкоторую прямую, перпендикулярную къ плоскости симметріи (лишь бы она не имѣла съ гексапримой общихъ точекъ).

Тогда ясно, что въ результатѣ мы получимъ кривую поверхность IV порядка, обладающую плоскостью симметріи.

Но особенно высокій видъ симметріи получится, если гексаприма разложится на три прямыя, расположенныя симметрично.

Такой случай будетъ имѣть мѣсто, если мы параллельно горизонтальной плоскости помѣстимъ двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя, а въ срединной горизонтальной плоскости помѣстимъ кругъ такъ, чтобы его центръ прямо проектировался кратчайшимъ разстояніемъ между обѣими прямыми. Совокупность лучей, пересѣкающихъ обѣ прямыя и проходящихъ чрезъ точки круга, составитъ поверхность IV порядка, принадлежащую тетрагонально-скаленоэдрическому виду симметріи. Кратчайшее разстояніе между парою прямыхъ есть четверная ось сложной симметріи, плоскость круга есть плоскость сложной симметріи, а плоскости, проходящія

[2]) См. эти Записки V стр. 6.

чрезъ упомянутую ось и чрезъ обѣ прямыя, есть плоскости симметріи.

Что полученная есть поверхность IV порядка можно усмотрѣть изъ болѣе общихъ соображеній о поверхностяхъ, производимыхъ по какой-нибудь конопримѣ и двумъ прямымъ, неимѣющимъ общихъ точекъ ни между собою, ни съ конопримою.

Если возьмемъ произвольную прямую и изъ ея точекъ проведемъ совокупность лучей, пересѣкающихъ обѣ данныя прямыя, то получимъ приму производящихъ гиперболоида, въ составѣ которыхъ будутъ и тѣ, которыя пересѣкаютъ коноприму. Пересѣкши этотъ гиперболоидъ плоскостью конопримы, мы найдемъ другую коноприму пересѣченія. Обѣ же конопримы въ этой плоскости пересѣкаются въ двухъ парахъ точекъ (какъ одна, такъ и обѣ могутъ быть мнимыми). Слѣдовательно, взятая произвольная прямая пересѣкаетъ поверхность въ двухъ парахъ точекъ, а потому это поверхность IV порядка.

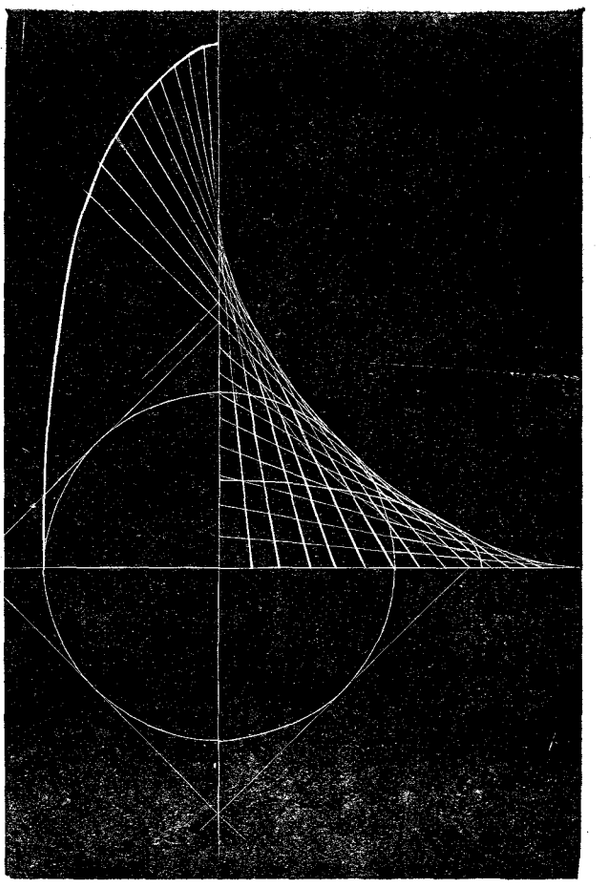
Каждая изъ двухъ данныхъ прямыхъ представляетъ совокупность двойныхъ точекъ поверхности, въ коихъ пересѣкается пара лучей поверхности. Но, кромѣ того, плоскость конопримы пересѣкаетъ обѣ прямыя въ точкахъ двойного луча то есть двухъ лучей поверхности, совмѣстившихся въ одинъ; эти два луча исходятъ изъ двухъ точекъ пересѣченія конопримы прямою, проходящею чрезъ обѣ данныя прямыя. Отсюда ясно, что кромѣ двухъ данныхъ прямыхъ, представляющихъ совокупность двойныхъ точекъ поверхности, мы имѣемъ еще третью прямую на поверхности, представляющую ея двойной лучъ.

Всѣ плоскости, проходящія чрезъ этотъ лучъ, въ которомъ совмѣщены два луча поверхности, должны пересѣкать поверхность еще въ конопримѣ.

Возвращаясь къ нашему случаю особой поверхности высокой симметріи, мы найдемъ, что двойной лучъ, находящійся въ плоскости сложной симметріи, соединяетъ пару мнимыхъ точекъ пересѣченія круга двумя данными лучами и представляетъ экстрапрямую въ этой плоскости.

Всѣ проходящія чрезъ него плоскости есть плоскости горизонтальныя (параллельныя плоскости сложной симметріи), и онѣ должны пересѣкать поверхность въ конопримахъ, три изъ которыхъ даны, а именно кругъ, находящійся именно въ плоскости сложной симметріи и обѣ прямыя (лучи двойныхъ точекъ) какъ спеціальныя разности эллипсовъ (или скорѣе параболы, такъ какъ имѣютъ одну экстраточку). Нетрудно видѣть, что всѣ остальныя горизонтальныя конопримы сѣченія этой поверхности есть эллипсы, коихъ оси находятся въ плоскостяхъ симметріи.

Ради большей наглядности въ представленіи себѣ этой поверхности я изобразилъ ее на приложенной фигурѣ, причемъ вычертилъ только тѣ части лучей поверхности, которыя ограничены двумя горизонтальными плоскостями, проходящими черезъ обѣ данныя прямыя—верхнюю и нижнюю. Ради еще большей наглядности ту половину, которая находится выше плоскости круга, я вычертилъ толстою, а ту, которая ниже—тонкою чертою. Такимъ образомъ границу между толстыми и тонкими чертами составляютъ точки самого круга. Я показалъ еще пунктиромъ два эллипса, изъ коихъ одинъ находится въ плоскости посрединѣ между плоскостью круга и верхнею, а другой находится въ плоскости ниже нижней на двойномъ разстояніи отъ центра симметріи.



При разсмотрѣніи чертежа бросается въ глаза еще одно замѣчательное свойство поверхности, а именно, что всѣ проектированныя части лучей представляютъ равные отрѣзки.

Отсюда вытекаетъ особенность проектируемаго контура въ видѣ спеціальной кривой IV порядка

Эта кривая огибается постояннымъ отрѣзкомъ, опирающимся при своемъ движеніи на двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя. По извѣстной теоремѣ среднія точки отрѣзковъ описываютъ кругъ. Точки этой кривой на обѣихъ перпендикулярахъ есть точки возврата.

Но если проекціи отрѣзковъ между двумя параллельными плоскостями равны, то равны и сами отрѣзки, а слѣдовательно и величины угловъ ихъ наклона къ плоскостямъ.

Отсюда слѣдствіе: лучи особой поверхности IV порядка параллельны лучамъ конуса вращенія и выводъ, что эта поверхность пересѣкается экстраплоскостью въ кругѣ, что впрочемъ и непосредственно очевидно, такъ какъ экстраплоскость можетъ быть принята параллельною плоскости сложной симметріи и значитъ перпендикулярной къ четверной оси сложной симметріи, а разрѣзъ поверхности въ ней кромѣ двойного луча долженъ быть представленъ конопримою; слѣдовательно, послѣдняя можетъ быть только кругомъ.

Отсюда видимъ, что, основываясь на этомъ, мы, идя въ обратной послѣдовательности, можемъ доказать элементарную теорему: среднія точки постояннаго отрѣзка, опирающагося при своемъ движеніи на двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя, описываютъ кругъ.

Въ разсмотрѣнной поверхности особенный интересъ представляетъ послѣдовательность эллипсовъ ея горизонтальныхъ сѣченій. Изъ положенія точекъ лучей этой поверхности, находящихся въ обѣихъ плоскостяхъ симметріи, можно непосредственно заключить, что въ этой послѣдовательности большія оси непрерывно возрастаютъ, а малыя оси непрерывно уменьшаются въ ариѳметической прогрессіи.

Если означимъ радіусъ круга чрезъ r, а разстояніе между данными прямыми примемъ за величину 2, то для какого-нибудь эллипса найдемъ величины осей: 1) $r+x$ и 2) $r-x$. Если возьмемъ такое разстояніе, чтобы $x=r$, то получимъ эллипсъ съ осями: 1) $2r$ и 2) 0.

Если возьмемъ два такихъ эллипса, для которыхъ соотвѣтственныя величины x есть nr и $\frac{r}{n}$, то

для осей перваго найдемъ: 1) $r+nr=r\,(n+1)$
и 2) $r-nr=-r\,(n-1)$

для осей второго найдемъ: 1) $r+\frac{r}{n}=r\,\frac{n+1}{n}$ и

2) $r-\frac{r}{n}=r\,\frac{n-1}{n}$

Отсюда усматриваемъ, что такіе два эллипса будутъ подобными.

Это мы можемъ формулировать слѣдующимъ образомъ: если совокупность горизонтальныхъ плоскостей мы примемъ за инволюцію и за двойныя плоскости этой инволюціи тѣ двѣ изъ нихъ, которыя проходятъ чрезъ обѣ данныя прямыя, то найдемъ, что въ сопряженныхъ плоскостяхъ инволюціи представлены подобные эллипсы.

Въ частности, сопряженными будутъ и два круга въ плоскости сложной симметріи и въ экстраплоскости.

Плоскости, проходящія чрезъ пары лучей, перпендикулярны къ одной изъ плоскостей симметріи, и потому въ соотвѣтствующей плоскости находится одна изъ осей конопримы сѣченія. Сами конопримы представлены, начиная отъ одной изъ данныхъ прямыхъ, какъ двойныхъ лучей, чрезъ рядъ эллипсовъ, параболу (въ плоскости касательной къ кругу) и гиперболы вплоть до пары прямыхъ (въ плоскости симметріи).

Въ сѣченіяхъ чрезъ обѣ данныя прямыя, какъ двойные лучи, конопримы сплошь представлены парами лучей вещественныхъ и мнимыхъ (въ промежуткѣ наклонные двойные лучи).