22. Дополненіе вывоза главныхъ совокупностей вплоть до октопримъ и коносекундъ.

Е. С. Федорова.

(доложено 21 апрѣля).

Хотя предъидущая статья и представляетъ собою нѣчто законченное, доведшее главныя совокупности до тѣхъ, которыя опредѣляются шестью элементами, но сразу бросается въ глаза, что высшія изъ нихъ—гексасекунды не представляютъ собою совокупностей наиболѣе общаго характера—коносекундъ, а только спеціальныя ихъ разности, могущія быть воспроизведенными прямыми то есть только линейчатыя коносекунды. Только таковыя вполнѣ и однозначно опредѣляются не болѣе чѣмъ шестью точками и плоскостями. Про коносекунды же, въ общемъ случаѣ, извѣстно, даже изъ учебныхъ руководствъ, что онѣ опредѣляются девятью элементами.

Такъ какъ именно коносекунды общаго характера устанавливаютъ полярную коррелятивность между точками и плоскостями въ пространствѣ, то доказательство теоремы, о которой идетъ рѣчь, сводится къ тому, что такая коррелятивность можетъ быть установлена ∞^9 способами.

Заимствую это доказательство изъ Reye, Geometrie der Lage II 134:

„Если даны двѣ плоскости α и ε, то ихъ полюсамъ A и E можно придать ∞^3 различныхъ положеній, а это приводитъ къ ∞^3 различныхъ пространственныхъполярныхъ системъ. Одна изъ нихъ опредѣляется только тогда, когда дана плоскость β, проходящая чрезъ A, ея полюсъ B въ плоскости α и кромѣ того дана нѣкоторая плоскость γ, проходящая чрезъ прямую AB и ея полюсъ C на ребрѣ β пересѣченія полярныхъ плоскостей".

„Точки A, B, C съ точкою D пересѣченія плоскостей α, β, γ образуютъ полярный четырехгранникъ этой полярной системы, въ которой, кромѣ того E есть полюсъ плоскости ε".

Чтобы понять значеніе этого доказательства, нужно 1) принять во вниманіе, что искомая коррелятивность вполнѣ устанавливается пятью данными, и въ данномъ случаѣ мы имѣемъ полюсы A, B, C, D, E, плоскостей α, β, γ, δ, ε соотвѣтственно, а 2) такъ какъ точка въ пространствѣ опредѣляется тремя координатами или перемѣнными независимыми, то для опредѣленія полюсовъ A и E мы имѣемъ въ данномъ случаѣ шесть постоянныхъ; такъ какъ точка въ плоскости опредѣляется двумя такими перемѣнными, то для опредѣленія точки B нужно еще двѣ такія перемѣнныя, наконецъ точка C находится на ребрѣ α β и слѣдовательно для опредѣленія ея точнаго положенія нужна еще одна, а всего для полярной системы—девять независимыхъ перемѣнныхъ.

Если же коносекунда вполнѣ и однозначно опредѣляется произвольными девятью ея точками (съ понятнымъ ограниченіемъ, чтобы никакія четыре не находились въ одной плоскости), то остается только найти способъ соотвѣтствующаго построенія.

Для примѣненія этого построенія всѣ вспомогательныя теоремы извѣстны.

Изъ нихъ мы прежде всего воспользуемся тою, которую Рейе называетъ аналогомъ теоремы Дезарга для пространства, а именно: [1])

Всѣ гексапримы секунды, опредѣляемыя пятью точками, любою плоскостью пересѣкаются въ полярныхъ трехугольникахъ полярной системы этой плоскости.

Каждое изъ десяти реберъ полнаго пятиугольника въ пространствѣ любою плоскостью пересѣкается въ полюсѣ, а противоположная ему плоскость (опредѣляемая остальными тремя точками) въ полярѣ этой точки.

[1]) Reye. Geometrie der Lage II 225.

Кромѣ того, вспомнимъ о полярныхъ отношеніяхъ въ системѣ конопримъ на плоскости, а именно:

Каждой конопримѣ лучей полярна линейная кварта, каждой линейной примѣ конопримъ—линейная терція, а каждой линейной секундѣ конопримъ—линейная же секунда конопримъ точекъ и обратно (то есть совокупностямъ конопримъ точекъ полярны совокупности конопримъ лучей).

При этомъ подъ выраженіемъ коноприма точекъ, полярная данной, подразумѣвается всякая коноприма, проходящая чрезъ вершины полярнаго четырехугольника первой, а полярнымъ четырехугольникомъ называется такой три пары противоположныхъ сторонъ котораго сопряжены (то есть проходятъ чрезъ ихъ полюсы по отношенію къ конопримѣ).

Итакъ, пусть дано девять точекъ ABCDEFGHI. Беремъ любыя пять напр. ABCDE и еще произвольную плоскость. Согласно расширенной теоремѣ Дезарга мы по данному пятиугольнику устанавливаемъ полярную систему на взятой плоскости то есть находимъ на ней коноприму, вещественную [1]) или мнимую, обусловливающую эту полярность, и принимаемъ ее за коноприму лучей, что впрочемъ не отражается на построеніи полюсовъ и поляръ.

Это обозначаетъ, что какая-бы то ни было коноприма точекъ полярной линейной кварты можетъ быть составлена движеніемъ трехугольниковъ, полярныхъ по отношенію ко всѣмъ конопримамъ кварты.

Найдемъ еще конопримы соотвѣтственно пятиугольникамъ ABCDF, ABCDG, ABCDH и ABCDI. Всего получаемъ на плоскости пять конопримъ лучей, каждая изъ которыхъ обусловливаетъ корреляти*вность полюсовъ и поляръ.*

По первымъ двумъ находимъ линейную приму конопримъ лучей и полярную ей линейную терцію конопримъ точекъ, по первымъ тремъ находимъ линейную секунду конопримъ лучей и полярную ей линейную секунду конопримъ точекъ, по первымъ четыремъ находимъ линейную терцію конопримъ лучей и полярную ей линейную приму конопримъ точекъ, а по всѣмъ пяти конопримамъ опредѣляется одна единственная коноприма точекъ, полярная по отношенію ко всѣмъ конопримамъ лучей линейной кварты, такимъ образомъ построенной по всѣмъ девяти даннымъ точкамъ.

Эта единственная коноприма и есть искомое сѣченіе коносекунды взятою плоскостью. Это видно изъ слѣдующаго.

[1]) Вещественная получается какъ совокупность точекъ касанія гексапримъ къ данной плоскости. Ср. loc. cit стр. 226.

Если бы въ дѣйствительности построили по даннымъ девяти точкамъ коносекунду точекъ, то вмѣстѣ съ этимъ была бы вполнѣ и одозначно установлена пространственная полярная система, въ которой каждой точкѣ, какъ полюсу, коррелятивно соотвѣтствовала бы одна единственная плоскость какъ ея поляра, а въ сѣченіи произвольною плоскостью чрезъ этотъ полюсъ, мы получили бы полярную систему на плоскости, и той же точкѣ въ качествѣ поляры была бы коррелятивна одна единственная прямая. Выраженіемъ этой коррелятивности служила бы нѣкоторая коноприма точекъ, представляющая плоское сѣченіе коносекунды. Но такъ какъ по даннымъ девяти точкамъ можно вывести только одну полярную систему въ пространствѣ, то также однозначно таковая вывелась бы и въ каждой плоскости. Никакой другой полярной системы въ данной плоскости получить уже нельзя, а она опредѣляется тою единственною конопримою, которая представляетъ сѣченіе коносекунды. Слѣдовательно, полученная коноприма, устанавливающая полярную систему во взятой плоскости, и есть плоское сѣченіе искомой коносекунды.

Изложенный здѣсь ходъ операцій воспроизведенія такой конопримы отличается чрезвычайною сложностью. Даже при общемъ заданіи мы можемъ его значительно упростить, если примемъ плоскость, проходящую чрезъ какія-нибудь три изъ девяти данныхъ точекъ, за сѣкущую.

Тогда ясно, что искомое плоское сѣченіе коносекунды будетъ одною изъ конопримъ линейной секунды, опредѣляемой тремя данными точками. Въ нашемъ распоряженіи остается еще шесть точекъ, по которымъ въ той же плоскости мы можемъ воспроизвести линейную приму конопримъ лучей и полярную ей линейную терцію конопримъ точекъ. Задача сводится къ нахожденію конопримы пересѣченія этой линейной терціи съ упомянутою линейною секундою конопримъ [2]).

[2]) Существуетъ еще болѣе простой способъ построенія, основанный на теоремѣ: находящаяся на поверхности биквадратичная кривая, описанная около пространственнаго пятиугольника, всякою вообще плоскостью пересѣкается въ полярномъ четырехугольникѣ, причемъ полярность въ плоскости опредѣляется точками пересѣченія сторонъ и прямыми пересѣченія противоположныхъ плоскостей пятиугольника. Такимъ образомъ, выбирая изъ оставшихся шести точекъ сначала одинъ, а потомъ другой пятиугольникъ, мы по этой теоремѣ найдемъ на взятой плоскости еще двѣ точки, которыя находятся на биквадратичной кривой, а слѣдовательно и на поверхности коносекунды.

Эти же пять точекъ опредѣляютъ коноприму ея сѣченія (Reye Geom. d. L. III 26).

Задача упрощается въ еще болѣе значительной степени, если четыре изъ девяти данныхъ точекъ окажутся находящимися въ одной плоскости.

Тогда, принявъ эту плоскость за сѣкущую, найдемъ линейную приму конопримъ, пересѣкающихся въ четырехъ данныхъ точкахъ и вмѣстѣ съ тѣмъ найдемъ по остальнымъ пяти точкамъ полярную коноприму лучей.

Ясно, что только та единственная коноприма этой линейной примы, которая окажется полярною по отношенію къ полярной конопримѣ лучей и есть одно плоское сѣченіе искомой коносекунды точекъ.

Имѣя ее и проводя плоскости чрезъ каждыя три изъ оставшихся въ нашемъ распоряженіи пяти точекъ, мы будемъ въ каждой такой плоскости имѣть по пяти точекъ для опредѣленія другихъ плоскихъ сѣченій искомой коносекунды (двѣ получаются отъ пересѣченія первой конопримы плоскостью).

Коносекунду общаго характера мы можемъ получить даже тогда, когда пять изъ девяти данныхъ точекъ находится въ одной плоскости. Этими пятью точками вполнѣ и однозначно опредѣляется коноприма сѣченія въ этой плоскости и еще имѣются въ распоряженіи четыре точки. Проведемъ плоскость чрезъ какія-нибудь три изъ этихъ точекъ. Въ этой плоскости получимъ пять точекъ для опредѣленія второй конопримы сѣченія и еще въ нашемъ распоряженіи остается одна точка.

Проводя чрезъ эту послѣднюю любыя плоскости мы всякій разъ, кромѣ этой, будемъ имѣть еще по двѣ пары точекъ пересѣченія съ обѣими конопримами, а потому уже въ каждой плоскости этой линейной секунды мы легко построимъ коноприму сѣченія.

Но если бы оказалось, что шесть изъ девяти данныхъ точекъ находятся въ одной плоскости, то искомая коносекунда уже не можетъ быть общаго характера, а должна быть спеціальною, а именно представляетъ изъ себя пару плоскостей, изъ которыхъ одна есть та, въ которой находится шесть данныхъ точекъ, а другая опредѣляется тремя остальными точками.

Изъ изложеннаго видно, что операціи построенія коносекунды приводятся исключительно къ позиціоннымъ построеніямъ; слѣдовательно, сами коносекунды относятся къ позиціоннымъ главнымъ совокупностямъ, и могутъ быть коррелятивно воспроизведены въ линейнымъ терціяхъ всѣхъ геометрическихъ системъ. Въ частности, коносекунды могутъ быть воспроизведены и въ системѣ плоскостей, и для этого воспроизведенія необходимо и достаточно девяти данныхъ плоскостей.

При этомъ коносекунды общаго характера могутъ быть воспроизведены нетолько въ томъ случаѣ, если четыре изъ девяти плоскостей пересѣкаются въ одной точкѣ, но даже тогда, когда въ одной точкѣ пересѣкается пять плоскостей.

Тогда этими пятью плоскостями опредѣляется конусъ, а если изъ точки пересѣченія трехъ другихъ плоскостей проведемъ къ этому конусу двѣ касательныя плоскости, то получимъ снова пять плоскостей, пересѣкающихся въ одной точкѣ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и второй конусъ.

Имѣя для опредѣленія еще одну плоскость, мы можемъ изъ каждой ея точки провести по парѣ касательныхъ плоскостей къ обоимъ конусамъ и будемъ имѣть при каждой точкѣ пять плоскостей, опредѣляющихъ новые конусы, совокупность которыхъ огибаетъ искомую коносекунду плоскостей.

Но если дано для опредѣленія только восемь плоскостей, то мы всегда къ нимъ, въ качествѣ девятой, можемъ присоединить экстраплоскость, а по этимъ девяти опредѣлить вполнѣ и однозначно октосекунду плоскостей. Ясно, что таковая уже не будетъ общаго характера, а представляетъ параболоидъ.

Итакъ, октосекунда плоскостей есть параболоидъ. Но по тѣмъ же восьми плоскостямъ, примѣняя общій процессъ построенія, мы найдемъ линейную приму коносекундъ, а въ этой линейной примѣ одна, и только одна, есть параболоидъ, такъ какъ таковой по восьми плоскостямъ опредѣляется однозначно.

Итакъ, въ каждой линейной примѣ коносекундъ плоскостей имѣется одинъ, и только одинъ, параболоидъ. Онъ составляетъ, слѣдовательно, экстраэлементъ этой примы.

Понятно, что октоприма плоскостей не есть позиціонная главная совокупность. Для каждой геометрической системы таковую приходится строить особо.

Въ частности, легко таковую опредѣлить и для системы точекъ.

Примѣнимъ общій пріемъ построенія коносекундъ по восьми точкамъ, принявъ за сѣкущую экстраплоскость. Мы получимъ въ этой плоскости уже не одну, а линейную приму конопримъ точекъ, пересѣкающихся въ четырехъ точкахъ, но въ этой линейной примѣ имѣется одна, и только одна, тетраприма точекъ. Ей соотвѣтствуетъ на поверхности, въ качествѣ ассимптотическаго, конусъ Шретера почему и сама поверхность названа двуполымъ гиперболоидомъ Шретера. [1])

[1]) Эти Записки IV 363.

Отсюда заключаемъ, что октосекунда точекъ есть двуполый гиперболоидъ Шретера.

Какъ таковая, она необходимо входитъ, и притомъ непремѣнно въ единственномъ числѣ, въ составъ каждой линейной примы коносекундъ, если только сама линейная прима не сплошь состоитъ изъ октосекундъ.

Эта операція имѣетъ большую аналогію съ тою, которая служитъ доказательствомъ того, что тетраприма на плоскости есть равносторонняя гипербола.

Въ самомъ дѣлѣ, если даны четыре точки, то по теоремѣ Дезарга на каждой прямой опредѣляется инволюція. Но въ инволюціи на экстрапрямой только одна пара точекъ инволюціи есть особая, представляющая ту, которой соотвѣтствуетъ прямой уголъ. Въ кривой, проходящей чрезъ данныя четыре точки имѣются двѣ перпендикулярныя ассимптоты [1]).

Одна изъ величайшихъ заслугъ Штейнера состоитъ въ доказательствѣ того, что конопримы на плоскости могутъ быть приняты за элементы новой системы V ступени. На основаніи теоремъ, доказанныхъ имъ же, легко заключить, что нетолько конопримы вообще, но и спеціально тетрапримы и сферопримы также могутъ быть приняты за элементы самостоятельныхъ системъ, то есть что по двумъ тетрапримамъ получается линейная прима именно тетрапримъ, а по двумъ сферопримамъ получается линейная прима именно сферопримъ; по отношенію къ шарамъ, какъ элементамъ системы IV ступени, это сдѣлалъ Рейе.

Теперь мы распространимъ это, кромѣ коносекундъ, на октосекунды, гептасекунды, гексасекунды и пентасекунды.

Пусть дано девять точекъ и построена единственная, опредѣляемая ими, коносекунда точекъ.

Но мы видѣли, что если дано только восемь точекъ, то получается уже не одна единственная, а линейная прима коносекундъ; если дано семь точекъ, то получается уже линейная секунда коносекундъ.

Въ сѣченіи экстраплоскостью въ первомъ случаѣ изъ линейной примы конопримъ представлена только одна единственная тетраприма, а во второмъ —ихъ линейная прима, и притомъ каждая тетраприма связана однозначно съ октосекундою. Слѣдовательно, какъ изъ двухъ произвольно взятыхъ тетрапримъ экстраплоскости однозначно выводится линейная прима, представленная только тетрапримами, такъ по двумъ произвольно взятымъ октосекундамъ однозначно выводится линейная прима, представленная только октосекундами, что и служитъ доказательствомъ самостоятельности системы, элементы которой есть октосекунды.

Доказательство для остальныхъ перечисленныхъ главныхъ совокупностей настолько аналогично приведенному, что на немъ можно не останавливаться.

Коносекунда опредѣляется вполнѣ по произвольной конопримѣ (даже если бы она была спеціальная, въ видѣ пары прямыхъ) и четыремъ точкамъ, не находящимся въ одной плоскости и при условіи, что ни одна изъ точекъ не находится въ плоскости конопримы.

Въ этомъ случаѣ, проведя плоскость чрезъ три изъ этихъ четырехъ точекъ, мы найдемъ двѣ точки (то есть пару вещественныхъ или мнимыхъ) пересѣченія съ конопримою, а пятью точками опредѣляется новая коноприма на поверхности коносекунды. Двѣ же такія конопримы и еще одна точка вполнѣ опредѣляютъ коносекунду. Мы могли бы чрезъ три точки провести кругъ, и тогда онъ совокупно съ четырьмя точками опредѣлилъ бы нѣкоторую коносекунду, и такимъ образомъ намъ для ея опредѣленія понадобилось бы только семь точекъ.

Но это опредѣленіе не было бы однозначнымъ, потому что коносекунды получились бы различныя, смотря потому, чрезъ какія изъ трехъ точекъ мы провели бы кругъ. Но напр. если бы эти три точки были бы даны въ экстраплоскости, то опредѣленіе стало бы однозначнымъ, и мы получили бы коносекунду вращенія (съ ассимптотическимъ конусомъ вращенія).

Такое заданіе было бы однако совершенно спеціальнымъ. Въ общемъ же случаѣ по семи даннымъ точкамъ мы получаемъ въ экстраплоскости секунду конопримъ, и въ составъ этой секунды входитъ одинъ, и только одинъ, кругъ [2]). Съ другой стороны, если къ даннымъ семи точкамъ мы присоединимъ перемѣнную точку, то каждому положенію послѣдней соотвѣтствуетъ одинъ, и только одинъ, гиперболоидъ Шретера то есть тетраприма въ экстраплоскости. Въ совокупности получимъ линейную приму такихъ гиперболоидовъ, которая необходимо входитъ въ составъ полной линейной секунды коносекундъ, опре-

[1]) Это построеніе тетрапримъ отличается отъ Штейнеровскаго пріема предварительнаго построенія высотныхъ точекъ трехугольника. Но изъ теоремы Штейнера слѣдуетъ, что въ данномъ для опредѣленія четырехугольникѣ ни одна вершина не должна быть высотною точкою трехугольника, составленнаго изъ трехъ остальныхъ точекъ.

[2]) Конечно, мыслимы и спеціальныя секунды, въ составъ которыхъ входитъ линейная прима круговъ, и даже вся секунда можетъ сплошь состоять изъ круговъ. Но мы сейчасъ увидимъ, что эти спеціальные случаи не нарушаютъ общности выводимой сейчасъ теоремы.

дѣляемой семью точками. Но такъ какъ въ составъ этой примы входитъ вообще одинъ, и только одинъ, гиперболоидъ вращенія, то значитъ онъ и есть тотъ единственный представитель линейной секудны, который вполнѣ и однозначно опредѣляется семью точками.

Итакъ, гептасекунда точекъ есть гиперболоидъ вращенія Шретера.

На діаграммѣ коносекундъ гиперболоиды Шретера выражаются дугою круга $2' - 3'$, и слѣдовательно это есть октосекунды, а именно гиперболоидъ вращенія $2'$ есть гептасекунда точекъ.

Кривая пересѣченія двухъ произвольныхъ коносекундъ есть, какъ извѣстно, кривая IV порядка и опредѣляется вполнѣ и однозначно восемью произвольными точками, лишь бы эта группа точекъ не была ассоціированною [1]). Каждая девятая точка вполнѣ и однозначно опредѣляетъ проходящую чрезъ нее коносекунду, и значитъ кривая опредѣляетъ вообще линейную приму коносекундъ. Каждое плоское ея сѣченіе даетъ тѣ четыре точки, въ которыхъ пересѣкается линейная прима конопримъ. Нетолько одна и даже обѣ пары точекъ могутъ быть мнимыми, но можетъ быть мнимою и вся кривая. Это очевидно изъ того, что мы всегда можемъ такъ подобрать двѣ коносекунды, чтобы у нихъ не было общихъ точекъ пересѣченія. Но если въ ней есть хоть одна вещественная точка, то вообще вещественна и эта кривая, опредѣляемая вполнѣ и однозначно восемью точками то есть октоприма точекъ. Но каждая пара ея точекъ въ опредѣленіи можетъ быть замѣнена парою мнимыхъ точекъ. Также и въ пересѣченіи ея любою плоскостью нетолько одна, но и обѣ пары точекъ сѣченія, могутъ быть мнимыми.

Теперь представимъ себѣ, что намъ дано семь постоянныхъ точекъ и мы произвольно возьмемъ еще двѣ точки, которыми мы опредѣлимъ двѣ октосекунды точекъ. Эти двѣ октосекунды, какъ всякія двѣ поверхности II порядка, опредѣляютъ собою кривую пересѣченія, и одновременно линейную приму поверхностей, пересѣкающихся въ той же кривой. Слѣдовательно, эта особая кривая вполнѣ и однозначно опредѣляется семью точками и значитъ есть гептаприма точекъ.

Эта гептаприма есть лишь спеціальный видъ октопримы. Также какъ послѣдняя, и она пересѣкается всякою плоскостью въ четырехъ точкахъ, изъ коихъ одна или обѣ пары могутъ быть мнимыми. Но экстраплоскость пересѣкаетъ ее въ такихъ четырехъ точкахъ, что любая пятая экстраточка опредѣляетъ съ ними тетраприму въ экстраплоскости. Это и есть главная особенность гептапримы.

Итакъ, гептаприма точекъ пересѣкается экстраплоскостью въ такихъ четырехъ точкахъ, что четвертая есть высотная точка трехугольника, образуемаго тремя остальными.

Октоприма плоскостей есть такая ихъ прима, которая заключаетъ съ себѣ всѣ восемь плоскостей, общихъ плоскостямъ линейной примы коносекундъ. Сюда коррелятивно примѣнимы всѣ оговорки, сдѣланныя для октопримы точекъ.

Гептаприма плоскостей есть лишь та спеціальная разность октопримы, въ составъ которой входитъ экстраплоскость.

Гептаприму плоскостей мы можемъ воспроизвести слѣдующимъ образомъ.

Пусть въ составъ опредѣляющихъ входятъ плоскости a, b, c и еще четыре плоскости. Сначала воспроизведемъ гексаприму плоскостей по этимъ четыремъ, плоскости a и экстраплоскости. Ясно, что полученная прима есть прима плоскостей кривизны пространственной параболы. Найдя тѣ пары плоскостей этой примы, коихъ ребра пересѣченія находятся въ плоскостяхъ b и c, мы отсюда можемъ вывести гиперболическій параболоидъ α по двумъ осямъ и проективности точекъ на нихъ, опредѣляемой плоскостями гексапримы.

Аналогично по тѣмъ же четыремъ плоскостямъ, но плоскости b и экстраплоскости получимъ другой параболоидъ β.

Плоскости, общія обѣимъ гексапримамъ, и составятъ искомую гептаприму плоскостей IV порядка, характеризующуюся присутствіемъ экстраплоскости.

Но этими же двумя параболоидами опредѣляется и линейная прима параболоидовъ; въ частности, тотъ параболоидъ этой примы, который присутствуетъ въ этой примѣ въ единичномъ числѣ, то есть параболоидъ ортогональный (съ двумя взаимноперпендикулярными ассимптотическими плоскостями) вполнѣ и однозначно опредѣляется семью данными плоскостями.

Итакъ, гептасекунда плоскостей есть ортогональный гиперболическій параболоидъ.

Для опредѣленія же каждаго иного параболоида этой примы нужна еще восьмая плоскость и слѣдовательно октосекунды плоскостей есть параболоиды вообще.

Этимъ завершается циклъ вывода главныхъ совокупностей вплоть до такихъ примъ, которыя опре-

[1]) Какъ извѣстно, восьмая точка такой группы опредѣляется вполнѣ однозначно семью изъ нихъ (Ср. Reye Geom. d. Lage III 22).

дѣляются восемью и такихъ секундъ, которыя опредѣляются девятью элементами.

Изъ главныхъ совокупностей, выведенныхъ въ этой замѣткѣ, только октопримы и коносекунды позиціонны. Остальныя же не позиціонны, и для каждой геометрической системы требуютъ особаго спеціальнаго вывода, что и сдѣлано для системъ точекъ и плоскостей.