# 21. Главныя совокупности въ системахъ точекъ и плоскостей.

**Е. С. Федорова.**

(доложено 21 апрѣля).

Гексапримы общаго характера, пересѣкаемыя экстраплоскостью въ трехъ точкахъ, Зейдевицъ назвалъ пространственными гиперболами. Если бы эти три точки соотвѣтствовали тремъ взаимноперпендикулярнымъ лучамъ, мы получили бы спеціальную пространственную гиперболу, которая представляла бы аналогію равносторонней гиперболѣ въ томъ отношеніи, что въ послѣдней двѣ экстраточки соотвѣтствуютъ двумъ взаимноперпендикулярнымъ лучамъ. Если бы произвольную точку такой гиперболы мы соединили лучами со всѣми остальными ея точками, мы получили бы конусъ, въ который вписанъ прямой трехгранный уголъ то есть конусъ Шретера, и вписанный въ немъ прямой трехгранный уголъ и былъ бы составленъ лучами, соединяющими взятую точку со всѣми тремя экстраточками.

Отсюда слѣдуетъ, что въ такой пространственной гиперболѣ всѣ принадлежащіе ей конусы есть конусы Шретера, почему этимъ именемъ цѣлесообразнѣе всего обозначить и эту кривую. Отсюда слѣдуетъ далѣе, что два произвольные конуса Шретера, имѣющіе общій лучъ, пересѣкаются въ пространственной гиперболѣ Шретера.

Съ другой стороны, извѣстно, что такіе квадратичные конусы есть конусы спеціальные и опредѣляются четырьмя лучами, причемъ, если четыре таковые даны, то въ составъ конуса необходимо входитъ и пятый высотный лучъ [1]).

Теперь допустимъ, что даны произвольныя четыре точки A, B, C, D и, принявъ одну изъ нихъ напр. A за центръ конуса, проведемъ его лучи AB, AC, AD, и еще высотный лучъ AE. Если къ этимъ четыремъ мы присоединимъ еще произвольный пятый AG, то этими пятью вполнѣ и однозначно опредѣлится тетраприма лучей; совершенно независимо отъ положенія послѣдняго луча будетъ положеніе высотнаго луча.

Теперь за центръ лучей примемъ какую-нибудь другую точку B и получимъ три луча BC, BD, BA и новый высотный лучъ BH. Если на лучѣ AG произвольно возьмемъ точку G, то получимъ еще пятый лучъ BG то-есть опять опредѣлимъ тетраприму лучей (то есть конусъ Шретера), а оба конуса, взятые вмѣстѣ, въ пересѣченіи вполнѣ и однозначно опредѣляютъ пространственную гиперболу Шретера, въ составъ которой входятъ точки A, B, C, D, а въ силу перспективности тѣхъ и другихъ лучей также и точка пересѣченія лучей AG и BG то есть пятая точка G.

Отсюда видимъ, какъ по пяти точкамъ однозначно опредѣлять гиперболы Шретера. Для опредѣленія этихъ гиперболъ, слѣдовательно, необходимо и достаточно пяти точекъ, произвольно данныхъ въ пространствѣ, а потому эти гиперболы есть пентапримы точекъ [1]).

---

[1]) Такъ я обозначаю, рядъ краткости, лучъ, представляющій общее пересѣченіе трехъ плоскостей, проходящихъ чрезъ три (изъ четырехъ) данные луча и перпендикулярныхъ къ плоскостямъ, проходящимъ чрезъ два другіе луча.

[1]) Совокупность нормально-сопряженныхъ лучей изъ одного центра то есть лучей, перпендикулярныхъ къ плоскостямъ, сопряженнымъ по отношенію къ нѣкоторой коносекундѣ, какъ извѣстно, (Reye Geometrie de Lage II 142), образуетъ конусъ Шретера. Совокупность полюсовъ этихъ сопряженныхъ плоскостей образуетъ пространственную кривую III порядка на этомъ конусѣ, и конусы, проведенные изъ всѣхъ точекъ этой кривой (чрезъ всѣ остальныя ея точки), есть конусы Шретера. Слѣдовательно, эта кривая есть пентаприма точекъ. Она непремѣнно зак-

Теорема, ихъ опредѣляющая, есть расширеніе извѣстной теоремы Штейнера о высотныхъ точкахъ трехугольника, какъ таковыхъ, что всѣ конопримы, проходящія чрезъ четыре точки, есть равностороннія гиперболы или тетрапримы точекъ на плоскости.

Такъ же, какъ послѣднія, пентапримы точекъ въ пространствѣ, есть образы непозиціонныя и напр. они вообще отнюдь не коррелятивны съ пентапримами плоскостей, какъ тетрапримы точекъ (равностороннія гиперболы) не коррелятивны тетраприматъ лучей (параболамъ) на плоскости.

Итакъ, если даны четыре произвольныя точки A, B, C, D, лишь бы всѣ четыре не находились въ одной плоскости, мы всегда изъ нихъ однозначно выводимъ по высотному лучу при каждой точкѣ.

Если даны пять точекъ, то изъ нихъ мы можемъ составить $\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}=5$ различныхъ четырехгранниковъ и для каждаго, и притомъ при каждой вершинѣ найдемъ высотный лучъ, который долженъ пересѣкать пентраприму, опредѣляемую этими пятью точками. Слѣдовательно, упомянутое простое построеніе къ пяти даннымъ точкамъ даетъ возможность легко присоединить еще пять хордъ пентапримы.

Эта теорема аналогична теоремѣ Штейнера, по которой къ четыремъ точкамъ на плоскости мы можемъ присоединить еще четыре высотныхъ точки, принадлежащія тетрапримѣ, вполнѣ и однозначно опредѣляемой данными четырьмя.

Отъ пентапримъ непосредственный переходъ къ пентасекундамъ точекъ.

Такую спеціальную поверхность составляетъ гиперболоидъ вращенія Шретера — также единственная въ своемъ родѣ поверхность какъ шаръ.

Взявъ на этой поверхности шесть произвольныхъ точекъ мы по нимъ можемъ построить гексаприму общаго характера, которая однако цѣликомъ находится на этой поверхности, такъ какъ шестью точками вообще опредѣляется одна единственная гексаприма, также какъ и одинъ единственный гиперболоидъ Шретера какъ гексасекунда.

Но если мы возьмемъ только пять точекъ и построимъ по нимъ пентаприму, которая также цѣликомъ находится на той же поверхности притомъ еще необходимо проходитъ чрезъ три экстраточки, принадлежащія ассимптотическому конусу и соотсоотвѣтствующія прямому трехгранному углу, то хорды гексапримы изъ точекъ круга, опредѣленнаго по тремъ экстраточкамъ, составятъ пентасекунду.

Если около оси вращенія сдѣлаемъ оборотъ этой пентапримы, то цѣликомъ воспроизведемъ данную поверхность вращенія. Отсюда видимъ, что для ея опредѣленія достаточно пяти произвольно-взятыхъ точекъ. Воспроизведя по нимъ пентаприму, намъ останется только найти положеніе оси вращенія и центра поверхности.

Что касается ассимптотическаго конуса, то онъ опредѣляется уже самою пентапримою ,потому что она пересѣкаетъ экстраплоскость въ трехъ взаимноперпендикулярныхъ экстраточкахъ (какъ мы можемъ выразить ради краткости). По тремъ лучамъ мы легко находимъ конусъ вращенія Шретера, а слѣдовательно и направленіе его оси вращенія.

Если, слѣдовательно, мы проведемъ одну такую плоскость, перпендикулярную къ этой оси, чтобы она пересѣкла пентаприму въ трехъ вещественныхъ точкахъ, а по этимъ точкамъ воспроизведемъ кругъ, то ясно, что искомая ось вращенія пройдетъ чрезъ центръ этого круга и перпендикулярно къ его плоскости, чѣмъ она вполнѣ и опредѣляется.

Слѣдовательно, искомая поверхность получится изъ пентапримы полнымъ оборотомъ около этой оси. Центръ же поверхности найдется по одной плоскости, касательной къ поверхности, параллельной оси вращенія, такъ какъ точка касанія принадлежитъ кругу, центръ котораго и есть центръ поверхности.

Итакъ, однополый гиперболоидъ вращенія Шретера есть пентасекунда точекъ то есть совокупность всѣхъ ея точекъ вполнѣ и однозначно опредѣляется любыми пятью точками, взятыми на этой поверхности.

Изъ способа ея построенія усматриваемъ, что и этотъ геометрическій образъ не есть позиціонный.

Совокупность же, представляющая гексасекунду точекъ, есть вообще всякій однополый гиперболоидъ вращенія.

Онъ получается, если по тремъ экстраточкамъ гексапримы (изъ коихъ пара можетъ быть мнимою)

---

лючаетъ въ себѣ три экстраточки, соотвѣтствующія взаимно-перпендикулярнымъ осямъ. По отношенію къ конусекундѣ ей коррелятивна пентаприма плоскостей, такъ какъ коррелятивныя плоскости есть плоскости кривизны нѣкоторой гексапримы, и одна изъ нихъ (полярная центру коносекунды) есть экстраплоскость.

Этотъ примѣръ замѣчателенъ въ томъ отношеніи, что двѣ аналогичныя совокупности (пентапримы) связаны даже коррелятивностью.

Въ этомъ случаѣ, также и нормально сопряженнымъ лучамъ одной плоскости, огибающимъ нѣкоторую параболу (тетраприму лучей въ одной плоскости), коррелятивенъ конусъ Шретера (тетраприма лучей, исходящихъ изъ одного центра).

построимъ кругъ и чрезъ всѣ его точки проведемъ хорды гексапримы [1]).

Гексаприма, какъ извѣстно, опредѣляетъ нулевую систему (ея точки есть полюсы проходящихъ чрезъ нихъ плоскостей кривизны).

Если около главной оси (вращенія) этой нулевой системы мы будемъ вращать гексаприму, то получимъ тотъ же однополый гиперболоидъ какъ гексасекунду.

Гексаприма плоскостей также предопредѣляетъ гексасекунду, какъ и гексаприма точекъ. Одна гексаприма изъ другой выводится коррелятивно, а каждая изъ нихъ опредѣляетъ нулевую систему и ея главную ось, которая есть ось вращенія. Итакъ, гексаприма плоскостей также есть однополый гиперболоидъ вращенія.

Наконецъ, тотъ крайній членъ гексапримъ плоскостей, въ составъ котораго входитъ экстраплоскость, то есть параболоидъ вращенія есть пентасекунда плоскостей.

Въ самомъ дѣлѣ, пентаприма плоскостей есть пространственная парабола, и полюсъ ея экстраплоскости въ нулевой системѣ есть ея единственная экстраточка, которая принадлежитъ и оси вращенія. Вращеніе около этой оси нулевой системы изъ параболы плоскостей воспроизводитъ параболоидъ вращенія.

Въ этой, какъ и въ нѣсколькихъ предшествующихъ работахъ, выведены тѣ изъ совокупностей, которыя вполнѣ и однозначно опредѣляются наименьшимъ цѣлымъ числомъ элементовъ (не болѣе шести). Назовемъ такія совокупности главными въ виду исключительной важности ихъ роли въ новой геометріи.

Хотя нѣкоторыя изъ этихъ совокупностей, какъ опредѣленныя геометрическіе образы, извѣстны съ глубокой древности, но до появленія теоремы Паскаля не были извѣстны тѣ ихъ свойства, которыя заставляютъ ихъ относить къ главнымъ.

Теорема Паскаля впервые отмѣтила, что коническія сѣченія общаго характера вполнѣ и однозначно опредѣляются пятью, какъ прямая вполнѣ и однозначно опредѣляется двумя точками. Однако, какъ это свойство прямой, такъ и свойство круга вполнѣ и однозначно опредѣляться тремя точками, хотя и были извѣстны въ древности, по существу представляя собою первыя начала геометріи, но именно этимъ свойствамъ отводили не первенствующее, а второстепенное значеніе. Опредѣленіе основывалось на другихъ свойствахъ, особыхъ для каждаго геометрическаго образа.

Впервые эта основная точка зрѣнія новой геометрія, можно сказать, выдвинулась лишь въ работахъ Штейнера, когда онъ выяснилъ глубокую связь между точками прямой и коническими сѣченіями, имѣющими двѣ пары общихъ, вещественныхъ или мнимыхъ, точекъ. Попутно ему пришлось указать, что въ такой линейной примѣ коническихъ сѣченій всегда представлена одна единственная равносторонняя гипербола, и значитъ эта кривая вполнѣ и однозначно опредѣляется четырьмя точками. Также если мы будемъ разсматривать совокупности ихъ касательныхъ и примемъ четыре изъ нихъ за постоянныя, то въ ихъ линейной примѣ (Kegelschnittschaar) представлена одна единственная парабола и значитъ эта кривая вполнѣ и однозначно опредѣляется четырьмя касательными.

Его непосредственные ученики и послѣдователи выдвинули еще нѣсколько главныхъ совокупностей, а именно Штеръ посреди конусовъ—тѣ, которые опредѣляются четырьмя лучами или четырьмя плоскостями (тетрапримы точекъ и лучей на сферѣ).

Нѣсколько геометровъ, и между ними въ особенности Рейе, подробно изучилъ свойства пространственной кривой III порядка (гексапримы), вполнѣ и однозначно опредѣляемой шестью точками.

Соединяя теперь всѣ извѣстныя главныя совокупности, мы можемъ раздѣлить ихъ на два разряда: 1) позиціонныя и 2) непозиціонныя.

Первыя для новой геометріи представляютъ неизмѣримо большую важность, такъ какъ онѣ не

---

[1]) Здѣсь примѣняется слѣдующая теорема, доказательство которой мнѣ неизвѣстно изъ литературы: однополый гиперболоидъ вполнѣ опредѣленъ, если дана коноприма и гексаприма, три точки которой принадлежатъ конопримѣ (пара точекъ можетъ быть и мнимою).

Возьмемъ на конопримѣ произвольно двѣ точки, проведемъ чрезъ нихъ хорды гексапримы и примемъ ихъ за оси двухъ гомологичныхъ линейныхъ примъ плоскостей. Гомологичность можетъ быть установлена по тремъ точкамъ гексапримы въ плоскости конопримы. Ясно, что воспроизведенный такимъ образомъ гиперболоидъ пройдетъ какъ чрезъ гексаприму, такъ и чрезъ конопримy.

Плоскость конопримы можетъ быть и экстраплоскостью.

Если гексаприму пересѣчемъ произвольною плоскостью, а черезъ три точки сѣченія (пара можетъ быть мнимою) проведемъ конопримy, то совокупность хордъ гексапримы, проходящихъ чрезъ точки конопримы, составитъ гиперболоидъ (его производящія).

Коррелятивное построеніе въ системѣ плоскостей таково: три произвольныя плоскости гексапримы пересѣкаются въ нѣкоторой точкѣ, которую, мы примемъ за центръ конопримы плоскостей, въ составъ которой входятъ и три взятыя плоскости. Три точки кривизны гексапримы въ этихъ плоскостяхъ, какъ извѣстно, лежатъ въ той же плоскости, что и точка ихъ пересѣченія.

Совокупность прямыхъ (такъ наз. «осей» гексапримы плоскостей) на плоскостяхъ конопримы, въ которыхъ пересѣкается по двѣ плоскости гексапримы, составитъ коррелятивный гиперболоидъ.

только представлены во всѣхъ геометрическихъ системахъ, но и коррелятивно переносятся изъ одной во всѣ остальныя. Всякая теорема, къ нимъ относящаяся, непосредственно переносится во всѣ самостоятельныя системы, а не только въ родственныя, и для этого переноса не требуется никакихъ добавочныхъ разсужденій, а только перефразировка изъ терминовъ одной системы въ соотвѣтственные терминовъ другой.

Вотъ почему геометрія послѣдняго времени преимущественное вниманіе удѣляла именно этимъ совокупностямъ и относящимся къ нимъ теоремамъ.

Но таковыхъ изучено мало, а именно всего четыре; 1a) линейныя совокупности, представленныя въ системахъ точекъ и плоскостей примою, опредѣляемою двумя, 1b) секундою, опредѣляемою тремя элементами и 1c) полная совокупность элементовъ пространства—терція, опредѣляемая четырьмя; 2) конопримы, опредѣляемыя пятью элементами въ предѣлахъ одной линейной секунды и 3) гексапримы, опредѣляемыя шестью элементами. Для совокупностей 3-го случая никоимъ образомъ нельзя брать всѣ элементы въ предѣлахъ одной линейной секунды, а эти совокупности въ общемъ видѣ получаются лишь тогда, когда никакіе четыре изъ данныхъ элементовъ не находятся въ одной линейной секундѣ.

Непозиціонныя главныя совокупности гораздо разнообразнѣе.

Прежде всего сюда слѣдуетъ отнести 1) сферопримы, опредѣляемыя тремя элементами. Само собою разумѣется, что эти совокупности принадлежатъ линейнымъ секундамъ, которыя также опредѣляются тѣми же тремя элементами. Въ системѣ точекъ онѣ представлены кругами, въ системѣ плоскостей—огибающими конусъ вращенія.

2) Сферосекунды, опредѣляемыя четырьмя элементами. Въ системѣ точекъ это шары, а въ системѣ плоскостей—такіе же шары являются огибаемыми поверхностями.

3) Тетрапримы, опредѣляемыя четырьмя элементами, въ предѣлахъ одной линейной секунды.

Въ системѣ точекъ это равностороннія гиперболы. По теоремѣ Штейнера, какія бы три точки этой совокупности ни были даны, всегда ей принадлежитъ и высотная точка трехугольника.

Въ системѣ лучей на плоскости это есть параболы, и въ числѣ ихъ огибающихъ всегда находится экстралучъ.

Въ системѣ лучей, исходящихъ изъ одной точки, сюда относится конусъ Шретера. По теоремѣ Шретера, какія бы три луча этой совокупности ни были даны, всегда ей принадлежитъ и высотный лучъ, если подъ послѣднимъ понимать общій лучъ пересѣченія трехъ плоскостей, проходящихъ каждыя чрезъ одинъ изъ лучей перпендикулярно противолежащей плоскости.

Въ системѣ плоскостей (тоже проходящихъ чрезъ одну общую точку) огибаемый конусъ есть полярный конусъ Шретера. Если въ двухъ послѣднихъ системахъ мы возьмемъ общій центръ лучей и плоскостей, то обѣ родственныя системы связаны полярностью, и всѣ теоремы и построенія переносятся коррелятивно (полярно) изъ одной въ другую. Полярный конусъ Шретера и есть совокупность, полярно связанная съ обыкновеннымъ конусомъ Шретера.

4. Тетрасекунды въ системѣ точекъ и плоскостей представлены только сферосекундами.

5. Пентапримы, опредѣляемыя пятью элементами. Если эти пять элементовъ даны въ предѣлахъ одной линейной секунды, то они составляютъ конопримы, принадлежащія предъидущей группѣ.

Если же данные элементы общаго положенія, то для системы точекъ получается пространственная гипербола Шретера, а для системы плоскостей—пространственная парабола. Въ первой три экстраточки взаимно-перпендикулярны. Во второй только одна экстраточка, и она же есть полюсъ экстраплоскости.

6. Пентасекунды, опредѣляемые пятью элементами.

Въ системѣ точекъ это однополый гиперболоидъ вращенія Шретера. Въ системѣ плоскостей это параболоидъ вращенія.

7. Гексапримы, опредѣляемыя шестью элементами. Однако, въ системѣ точекъ и плоскостей, эти гексапримы есть совокупности позиціонныя и относятся къ предъидущей группѣ.

8. Гексасекунды, опредѣляемыя шестью элементами. Въ системѣ точекъ, какъ и въ системѣ плоскостей, таковые представлены гиперболоидами вращенія.

Выведя рядъ главныхъ совокупностей, какъ позиціонныхъ, такъ и непозиціонныхъ, мы можемъ теперь болѣе отчетливо опредѣлить само понятіе таковыхъ.

Главною совокупностью мы называемъ таковую, которая вполнѣ и однозначно выводится по данному числу элементовъ, если всѣмъ этимъ элементамъ принадлежитъ въ построеніи одинаковая роль. Если означимъ данныя элементы буквами и выведемъ построеніе совокупности, вводя сначала элементы, отмѣченные одними, а потомъ другими буквами, то если выводимая совокупность есть главная, то мы можемъ буквы по отношенію къ элементамъ перемѣстить иначе, а построеніе остается справедли-

вымъ, если въ его порядкѣ хода мы оставимъ, и прежнія буквы.

Могутъ встрѣтиться и такія построенія, которыя хотя и опредѣляются вполнѣ и однозначно даннымъ числомъ элементовъ, но разнымъ изъ нихъ принадлежитъ неодинаковая роль. Одинъ изъ лучшихъ примѣровъ представляетъ поверхность III порядка, вполнѣ и однозначно опредѣляемая семью точками, о которой идетъ рѣчь въ статьѣ „Полярныя отношенія вещественныхъ трехугольниковъ и четырехгранниковъ“ и которая никоимъ образомъ не представляетъ главной совокупности.