20. Полярныя отношенія вещественныхъ трехугольниковъ и четырехгранниковъ.

Е. С. Федорова.

(доложено 21 апрѣля)

Въ замѣткѣ „Полярныя отношенія мнимыхъ трехугольниковъ и четырехгранниковъ“ мы показали, что эти отношенія тождественны съ тѣми, которыя опредѣляются извѣстнымъ мнимымъ эллипсомъ или эллипсоидомъ, причемъ ни тотъ, ни другой не проходятъ чрезъ данныя точки. Но изъ основаній, приведенныхъ въ этой замѣткѣ, слѣдуетъ, что могутъ существовать опредѣленныя полярныя отношенія вещественныхъ трехугольниковъ и четырехгранниковъ.

Эта работа составляетъ, такимъ образомъ, естественное продолженіе предъидущей замѣтки, но относится къ трехугольникамъ и четырехгранникамъ, принятымъ за вещественные.

Пара прямыхъ на плоскости составляетъ спеціальную конопріму: любой точкѣ плоскости по отношенію къ ней полярна та прямая, которая проходитъ чрезъ центръ пары и съ нею гармонически раздѣляетъ пару прямыхъ. Каждая сѣкущая, изъ данной точки, раздѣляется гармонически двумя парами точекъ: тою, которая опредѣляется парою прямыхъ и тою, которая принадлежитъ полюсу (данной точкѣ) и его полярѣ то есть, если дана пара лучей и сѣкущая, то каждой точкѣ на послѣдней коррелятивна поляра, проходящая чрезъ четвертую гармоническую точку на сѣкущей и чрезъ центръ пары лучей.

Но отсюда слѣдуетъ, что каждой точкѣ луча, исходящаго изъ той же данной точки, поляренъ одинъ и тотъ же лучъ, что и отмѣчаетъ особую спеціальность этого случая.

Однако, данная пара лучей, совмѣстно съ нѣкоторой сѣкущей, опредѣляетъ трехугольникъ, а каждой точкѣ, находящейся на одной изъ сторонъ трехугольника, полярна прямая, проходящая чрезъ противолежащую вершину трехугольника и четвертую гармоническую точку на сѣкущей, такъ какъ каждой такой точкѣ коррелятивна одна единственная прямая.

Въ частности, экстраточкѣ полярна прямая, проходящая чрезъ противолежащую вершину и чрезъ средину стороны трехугольника. Если возьмемъ всѣ три экстраточки на сторонахъ трехугольника, то три поляры этихъ точекъ пересѣкутся въ его центрѣ тяжести, а потому экстрапрямая есть поляра центра тяжести трехугольника.

Какъ видимъ, полюсъ этой прямой, то есть центръ тяжести трехугольника, получится, если на каждой сторонѣ опредѣлимъ четвертую гармоническую (то есть средину стороны трехугольника) и проведемъ прямую чрезъ нея и противолежащую вершину трехугольника.

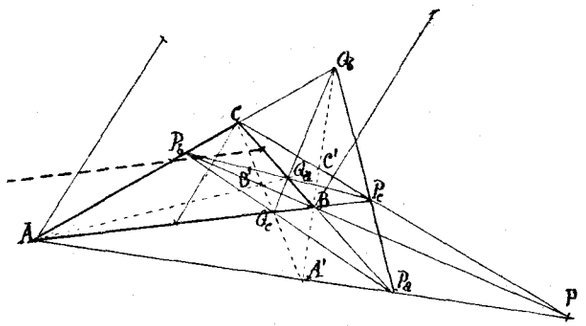
Коллинеарное преобразованіе позволяетъ обобщить эти соотношенія и утверждать, что каждой точкѣ по отношенію къ трехугольнику имѣется поляра, которая получится, если изъ данной точки проведемъ лучи чрезъ вершины трехугольника и найдемъ полюсы этихъ трехъ лучей, а эти полюсы есть точки на тѣхъ же противолежащихъ сторонахъ; всѣ эти три полюса именно и находятся на одной прямой—искомой полярѣ данной точки [1]).

[1]) Но, примѣняя это правило къ точкамъ на сторонахъ трехугольника, мы найдемъ, что ихъ поляры есть сами стороны трехугольника, на коихъ онѣ находятся. Итакъ, если будемъ опредѣлять совокупность поляръ точекъ нѣкоторой линейной примы (прямой), то за поляры точекъ на сторонахъ мы не должны принимать тѣ, которыя составляютъ поляры тѣхъ же точекъ какъ точекъ пересѣченія прямой, принимаемой за поляру.

Конечно и обратно, для каждой прямой на плоскости получимъ полюсъ, если проведемъ три поляры точекъ пересѣченія этой прямой со сторонами трехугольника. Эти три поляры пересѣкутся въ одной точкѣ—искомомъ полюсѣ данной прямой.

Пусть данный трехугольникъ есть A B C и данная точка P.

Проведемъ три луча P A, PB и PC и найдемъ соотвѣтственныя точки пересѣченія P*a*, P*b*, P*c* и имъ гармоническія сопряженныя точки Q*a*, Q*b* и Q*c* на сторонахъ трехугольника. Согласно сказанному, эти три точки находятся на прямой, которая и есть поляра точки P.



Если означимъ еще точки пересѣченія A P съ B Q*b* (или C Q*c*) чрезъ A′, B P съ C Q*c* чрезъ B′ и C P съ A Q*a* чрезъ C′, то найдемъ, что поляры этихъ трехъ точекъ есть соотвѣтственно Q*a*, P*b* P*c*, P*a* Q*b* P*c* и P*a* P*b* Q*c*, поляры точекъ P*a*, P*b*, P*c* есть соотвѣственно A B′ C′, A′ B C′ и A′ B′ C, и наконецъ поляры точекъ Q*a*, Q*b*, Q*c* есть соотвѣственно A A′, B B′, C C′, если эти точки есть точки пересѣченія; иначе же, ихъ поляры есть прямыя *a*, *b*, *c*.

Означимъ еще три стороны трехугольника соотвѣтственно чрезъ *a*, *b*, *c*. Любой лучъ *p* изъ P пересѣчетъ эти прямыя соотвѣтственно въ точкахъ *pa*, *pb*, *pc*; эти три точки будутъ имѣть своими полярами три луча изъ A, B, C, пересѣкающіеся въ одной точкѣ Q—полюсѣ луча *p*.

Вращая лучъ *p* около точки P, мы на каждой изъ сторонъ *a*, *b*, *c*. трехугольника получимъ рядъ проективныхъ (гомологичныхъ) точекъ, а ихъ полярамъ будутъ коррелятивны лучи изъ A, B, C. Достаточно имѣть двѣ гомологичныя примы лучей изъ A и B, чтобы воспроизвести коноприму, точки которой есть полюсы лучей изъ P; въ этихъ же точкахъ будутъ пересѣкаться и гомологичные лучи изъ C.

Отсюда заключаемъ, что совокупность лучей P, то есть ихъ линейная прима, будетъ имѣть своими полюсами коноприму, которая, согласно условіямъ ея происхожденія, необходимо проходитъ чрезъ всѣ вершины трехугольника A B C.

Итакъ, линейнымъ примамъ лучей на плоскости коррелятивны конопримы, проходящія чрезъ вершины трехугольника проективности.

Эти конопримы опредѣляются, слѣдовательно, тремя постоянными точками A, B, C и еще двумя перемѣнными, а именно полюсами какихъ-нибудь двухъ лучей данной линейной примы. Поэтому мы можемъ смотрѣть на нихъ какъ на линейныя примы геометрической системы съ параметромъ въ видѣ трехъ постоянныхъ точекъ. Полная совокупность точекъ на плоскости (центровъ примъ лучей) есть линейная секунда, и ей коррелятивна линейная секунда конопримъ, проходящихъ чрезъ три постоянныя точки.

Совершеннно аналогично, исходя изъ нѣкоторой прямой и опредѣляя поляры ея точекъ, найдемъ, что всѣмъ прямымъ на плоскости коррелятивны конопримы лучей, заключающихъ въ себѣ три постоянныя прямыя то есть стороны трехугольника. Каждая таковая, кромѣ этихъ трехъ прямыхъ, опредѣляется еще полярами какихъ-либо двухъ точекъ на данной прямой.

Эти конопримы представляютъ линейныя примы системъ съ параметромъ въ видѣ трехъ постоянныхъ лучей.

Въ числѣ конопримъ линейной секунды имѣются и спеціальныя, представленныя съ одной стороны парами лучей, съ другой парами точекъ.

Къ тремъ постояннымъ точкамъ A, B, C мы можемъ присоединить любую перемѣнную точку X, и, разсматривая ихъ за вершину полнаго четырехугольника, найдемъ всякій разъ эти спеціальныя конопримы точекъ въ видѣ паръ противоположныхъ сторонъ.

Къ тремъ постояннымъ лучамъ *a*, *b*, *c* мы можемъ присоединить любой перемѣнный лучъ *x*, и, разсматривая ихъ за стороны полнаго четырехсторонника, найдемъ всякій разъ три спеціальныя конопримы лучей въ видѣ трехъ паръ противоположныхъ вершинъ, какъ центровъ линейныхъ примъ лучей.

Нетрудно видѣть, что такимъ конопримамъ соотвѣтствуютъ во второмъ случаѣ прямыя, проходящія чрезъ вершины трехугольника, въ первомъ

Тоже коррелятивно относится и къ лучамъ, проходящимъ чрезъ вершины трехугольника. Изъ этого усматриваемъ своеобразность полярныхъ отношеній, о коихъ идетъ рѣчь, и неприводимость ихъ къ какимъ-либо извѣстнымъ полярнымъ системамъ.

—центры лучей, находящіеся на сторонахъ трехугольника.

Достаточно доказать для перваго случая потому что для второго доказательство выводится изъ него коррелятивно.

Итакъ, возьмемъ напр. на сторонѣ a точку D′, примемъ ее за центръ линейной примы лучей и найдемъ коррелятивную конопріму.

Каждый лучъ x такой примы пересѣчетъ стороны b и c соотвѣтственно въ точкахъ Bx и Cx; сторона a всегда будетъ пересѣчена въ точкѣ D′, поляра которой есть постоянная прямая A D, и въ ея точкахъ будутъ перспективно пересѣкаться поляры точекъ Bx и Cx и слѣдовательно эта прямая принадлежитъ искомой конопримѣ точекъ. Но спеціально лучу a будетъ коррелятивна точка пересѣченія двухъ поляръ, проведенныхъ изъ вершинъ B и C и совпадающихъ со стороною a то есть всѣ точки этой стороны, а потому искомая коноприма сложится изъ совокупности двухъ прямыхъ, а эта совокупность, какъ и всѣ конопримы секунды, пройдетъ чрезъ всѣ три вершины A, B и C.

Если вообще каждая точка на сторонахъ трехугольника есть центръ спеціальной конопримы, представленной двумя лучами, то, въ частности, экстраточки на тѣхъ же сторонахъ есть центры паръ параллельныхъ лучей. Такимъ спеціальнымъ конопримамъ полярны линейныя примы лучей, исходящихъ изъ срединъ сторонъ трехугольниковъ.

Поляры экстраточекъ огибаютъ нѣкоторую конопріму лучей, въ составъ коихъ входятъ и стороны трехугольника. Тѣмъ же экстраточкамъ, которыя находятся на этихъ сторонахъ, полярны эти самыя стороны; это единственныя точки, коихъ поляры проходятъ чрезъ нихъ самихъ. Съ другой стороны, точкамъ какой-нибудь стороны трехугольника полярны лучи, исходящіе изъ противоположной вершины, а слѣдовательно точкамъ, неопредѣленно приближающимся къ экстраточкамъ на сторонахъ, полярны лучи, неопредѣленно приближающіеся къ среднимъ точкамъ сторонъ.

Отсюда вытекаетъ, что совокупность поляръ экстраточекъ огибаетъ конопріму, вписанную въ трехугольникъ ABC и имѣющую точками касанія среднія точки сторонъ [1]).

Эта особая коноприма есть конечно эллипсъ (ни одна изъ его точекъ не можетъ находиться внѣ площади трехугольника AB(), и ея положеніе позволяетъ опредѣлить составъ конопримъ полной секунды. Назовемъ ее экстраэллипсомъ (такъ какъ полюсы его касательныхъ есть экстраточки). Одна изъ его касательныхъ изображена на фигурѣ толстымъ пунктиромъ.

Если возьмемъ точку внѣшнюю по отношенію къ экстраэллипсу, то въ числѣ лучей опредѣляемой ею линейной примы непремѣнно находятся два луча, касательные къ эллипсу, а полюсы ихъ обоихъ есть экстраточки, а слѣдовательно коррелятивная коноприма есть гипербола (которой принадлежатъ эти обѣ экстраточки). Точки внутри экстраэллипса опредѣляютъ примы лучей, полюсы которыхъ не содержатъ ни одной экстраточки и значитъ составляютъ эллипсы. Точки же самого экстраэллипса опредѣляютъ примы лучей, коихъ полюсы образуютъ параболы, а, въ частности, среднія точки сторонъ трехугольника опредѣляютъ спеціальныя параболы (въ видѣ пары параллельныхъ).

Поляры экстраточекъ по отношенію къ трехугольнику огибаютъ экстраэллипсъ. Полюсъ экстрапрямой то-есть полной совокупности экстраточекъ есть центръ тяжести трехугольника, а вмѣстѣ съ тѣмъ и вписаннаго эллипса; онъ же есть и полюсъ экстрапрямой по отношенію къ экстраэллипсу.

Производя произвольное коллинеарное преобразованіе, мы придемъ къ слѣдующей теоремѣ:

Линейная прима элементовъ полярно преобразуется по отношенію къ трехугольнику въ квадратичную. Полюсъ этой линейной примы по отношенію къ трехугольнику есть одновременно и ея полюсъ по отношенію къ преобразованной квадратичной примѣ.

Выраженіе полюсъ здѣсь принято условно. Если взята линейная лучей, то за ея полюсъ считаемъ прямую—поляру общей точки пересѣченія лучей. Если трехугольникъ правильный, то экстраэллипсъ есть кругъ.

Экстраточкамъ на прямыхъ, проходящихъ чрезъ вершины трехугольника и его центръ тяжести, полярны прямыя, параллельныя противолежащимъ сторонамъ, и отсѣкающимъ отъ вершины третьи части его сторонъ. Три такія прямыя совмѣстно съ тремя сторонами опредѣляютъ шестиугольникъ съ парами параллельныхъ и равныхъ сторонъ и значитъ обладающій центромъ обратнаго равенства; а такъ какъ всѣ его шесть сторонъ есть касательныя къ экстраэллипсу и его вполнѣ опредѣляютъ, то такъ же центръ обратнаго равенства долженъ быть и центромъ эллипса.

[1]) Отсюда побочно слѣдуетъ элементарная теорема: если впишемъ въ трехугольникъ такой эллипсъ, чтобы онъ касался къ двумъ сторонамъ трехугольника въ ихъ среднихъ точкахъ, то онъ будетъ касаться и третьей стороны въ ея средней точкѣ.

Итакъ центръ тяжести трехугольника есть центръ экстраэллипса.

На фигурѣ толстымъ пунктиромъ представлена четвертая изъ сторонъ шестиугольника, въ который вписанъ экстраэллипсъ. Ясно, что центръ обратнаго равенства этого шестиугольника есть точка на среднемъ лучѣ изъ C и притомъ на серединѣ между этою стороною шестиугольника и параллельной ей стороною трехугольника. Точки же пересѣченія того же луча съ обѣими касательными есть точки касанія экстраэллипса. Средній лучъ есть, слѣдовательно, діаметръ сопряженный этимъ сторонамъ шестиугольника.

Какъ видимъ, для опредѣленія экстраэллипса (лучей) достаточно имѣть три стороны трехугольника. Въ частномъ случаѣ, когда три данные луча есть стороны правильнаго трехугольника, экстраэллипсъ дѣлается экстракругомъ. Сдвигами и растяженіями мы можемъ преобразовать всякій данный трехугольникъ въ правильный, и тогда экстраэллипсъ преобразуется въ экстракругъ; но тотъ же экстракругъ мы можемъ опредѣлить не однимъ, а цѣлою примою описанныхъ правильныхъ трехугольниковъ, между тѣмъ какъ обратные сдвиги и растяженія намъ дадутъ изъ круга экстраэллипсъ тождественный съ полученнымъ раньше.

Отсюда заключаемъ, что одинъ и тотъ же экстраэллипсъ опредѣляется не однимъ, а цѣлою примою различныхъ, описанныхъ около него, трехугольниковъ.

Какъ въ системѣ лучей имѣется одинъ экстралучъ, точкамъ котораго поляренъ вписанный эллипсъ, такъ въ системѣ точекъ представлена экстраточка—центръ тяжести трехугольника; всѣмъ, исходящимъ изъ нея, лучамъ полярны точки экстраэллипса.

Чтобы понять значеніе центра тяжести, достаточно упомянуть, что при всѣхъ сдвигахъ и растяженіяхъ этотъ центръ преобразуется въ точку, которая въ преобразованномъ трехугольникѣ сохраняетъ значеніе центра тяжести.

Въ частномъ случаѣ правильнаго трехугольника экстраэллипсъ точекъ становится экстракругомъ, описаннымъ около трехугольника, причемъ ясно, что преобразованный правильный трехугольникъ мы можемъ замѣнить цѣлою примою другихъ, и по отношенію ко всѣмъ имъ линейная прима лучей, исходящихъ изъ центра, полярно преобразуется въ тотъ же кругъ, а потому и послѣ остальныхъ сдвиговъ и растяженій тотъ же кругъ преобразуется въ тотъ же экстраэллипсъ точекъ. Другими словами, одинъ и тотъ же экстраэллипсъ выводится изъ цѣлой примы различныхъ трехугольниковъ, въ него вписанныхъ.

Какъ изъ мнимаго трехугольника мы можемъ однозначно вывести мнимый эллипсъ, такъ изъ вещественнаго трехугольника можемъ однозначно вывести экстраэллипсъ. Но коренное различіе въ томъ, что мнимый эллипсъ для полярной системы играетъ ту же роль, что и всякій замѣняющій его трехугольникъ. Здѣсь же полярная система выводится только изъ трехугольника и притомъ только одного, не могущаго быть замѣненнымъ никакимъ другимъ.

Въ послѣднемъ случаѣ имѣемъ геометрическую систему съ параметромъ изъ трехъ постоянныхъ точекъ (или лучей); совокупность линейныхъ примъ представлена секундою конопримъ, имѣющихъ три постоянные элемента.

Какъ изъ линейной примы лучей мы выводимъ полярную коноприму точекъ, такъ, проведя къ послѣдней касательныя, мы найдемъ кривую IV порядка и III класса какъ совокупность полюсовъ этихъ касательныхъ. Что кривая есть IV порядка, видно изъ того, что, пересѣкши ее прямою и построивъ коноприму лучей, полярную ея точкамъ, найдемъ, что точкамъ ея пересѣченія полярны общія касательныя двухъ конопримъ, а таковыхъ вообще четыре, которыя попарно могутъ быть и мнимыми. Касательнымъ круга, проведеннаго чрезъ вершины правильнаго трехугольника, полярна весьма симметричная кривая IV порядка (симметрія та же, что правильнаго трехугольника).

Этимъ первая часть поставленной здѣсь задачи исчерпана.

Теперь перейдемъ къ четырехграннику и начнемъ съ того, что разсмотримъ соотношеніе его центра тяжести къ экстраплоскости.

Экстраплоскость пересѣкаетъ всѣ плоскости четырехгранника въ экстрапрямыхъ, а для послѣднихъ въ соотвѣтсвенныхъ плоскостяхъ въ качествѣ полюсовъ являются центры тяжести трехугольниковъ. Если эти центры тяжести соединимъ лучами съ противолежащими вершинами, то каждый изъ этихъ лучей пройдетъ чрезъ центръ тяжести четырехгранника, а слѣдовательно всѣ четыре луча пересѣкутся въ одной точкѣ — этомъ центрѣ тяжести.

Подвергнувъ систему коллинеарному преобразованію, найдемъ, что вообще всякой плоскости коррелятивна, въ качествѣ ея полюса, нѣкоторая точка, которая получится, если въ каждой изъ плоскостей четырехгранника найдемъ полюсъ прямой пересѣченія этой плоскости съ данною и соединимъ полюсъ этой прямой въ той же плоскости съ противолежащей вершиною; въ этомъ полюсѣ пересѣкутся четыре проведенныя прямыя.

И обратно, если дана произвольная точка и нужно опредѣлить ея полярную плоскость, мы проведемъ

изъ нея четыре луча чрезъ вершины до пересѣченія съ противолежащими плоскостями четырехгранника, а по полученнымъ точкамъ пересѣченія выведемъ ихъ поляры въ тѣхъ же плоскостяхъ; всѣ четыре поляры находятся въ одной, а именно полярной, плоскости данной точки.

Та же экстраплоскость пересѣкаетъ шесть реберъ четырехгранника въ шести экстраточкахъ; если на ребрѣ возьмемъ среднюю точку (какъ четвертую гармоническую по отношенію къ экстраточкѣ) и проведемъ плоскость чрезъ нея и противоположное ребро, то въ этой плоскости долженъ находиться центръ тяжести четырехгранника.

Подвергнувъ систему коллинеарному преобразованію, найдемъ, что вообще если по отношенію къ шести точкамъ на ребрахъ, въ которыхъ они пересѣкаются данною плоскостью, выведемъ четвертыя гармоническія и проведемъ чрезъ найденныя шесть точекъ и противоположныя ребра шесть плоскостей, то всѣ шесть пересѣкутся въ одной точкѣ—полюсѣ данной плоскости.

И обратно, если чрезъ данную точку и всѣ шесть реберъ проведемъ плоскости, а точкамъ пересѣченія этихъ плоскостей съ противоположными ребрами найдемъ на нихъ четвертыя гармоническія, то всѣ полученныя шесть точекъ окажутся находящимися въ одной плоскости—полярной по отношенію къ данной точкѣ.

Такимъ образомъ по отношенію къ четырехграннику мы имѣемъ два способа вывода полюсовъ и полярныхъ плоскостей, и оба должны приводить къ тождественному результату.

Въ частности, мы можемъ признать по отношенію къ какой-либо точкѣ на плоскости четырехгранника за полярную ту плоскость, которая опредѣляется полярою этой точки въ той же плоскости по отношенію къ трехугольнику этой плоскости и противолежащею вершиною, а за плоскость, полярную по отношенію къ нѣкоторой точкѣ, находящейся на ребрѣ четырехгранника, ту, которая опредѣляется четвертою гармоническою точкою на томъ же ребрѣ и противоположнымъ ребромъ. Изъ перваго построенія необходимо вытекаетъ и второе, какъ слѣдствіе. [1]).

[1]) Однако, примѣняя общее правило для точекъ въ плоскости четырехгранника, мы неопредѣленно найдемъ для всѣхъ нихъ въ качествѣ полярной эту самую его плоскость, а, примѣняя его къ точкамъ на его ребрахъ найдемъ, въ качествѣ полярныхъ плоскостей, неопредѣленныя плоскости, проходящія чрезъ то же ребро. Этотъ выводъ коррелятивно переносится и на плоскости, проходящія чрезъ вершины четырехгранника, и на плоскости, проходящія чрезъ его ребра. О такихъ своеобразныхъ полярныхъ отношеніяхъ уже было отмѣчено въ первой части этого труда.

Проведемъ чрезъ произвольную прямую въ пространствѣ линейную приму плоскостей и опредѣлимъ совокупность ихъ полюсовъ по отношенію къ четырехграннику.

На каждой изъ его плоскостей эта прима пересѣчется въ перспективной линейной примѣ лучей, а совокупность полюсовъ этихъ лучей на той же плоскости составитъ конприму, проходящую чрезъ вершины трехугольника въ ней. Совокупность прямыхъ, соединяющихъ точки этой конпримы съ противолежащею вершиною составитъ квадратичный конусъ, на поверхности котораго лежатъ всѣ четыре вершины четырехгранника. Соотвѣтственно его четыремъ плоскостямъ мы получимъ четыре такіе конуса съ проективными производящими и притомъ всѣ четыре проективныя производящія пересѣкаются въ одной точкѣ—полюсѣ одной изъ плоскостей данной линейной примы.

Отсюда заключаемъ, что всѣ четыре конуса пересѣкаются въ одной и той же кривой, и значитъ гексапримѣ точекъ, которая и будетъ искомою совокупностью полюсовъ.

Итакъ, совокупность полюсовъ линейной примы плоскостей есть гексаприма точекъ, проходящая чрезъ всѣ четыре вершины четырехгранника.

Мы можемъ смотрѣть на нее какъ на линейную приму новой системы точекъ съ параметромъ въ видѣ четырехъ постоянныхъ вершинъ четырехгранника. Такъ какъ гексаприма вполнѣ и однозначно опредѣляется шестью точками, а четыре изъ нихъ постоянны для всѣхъ линейныхъ примъ, то дѣйствительно для ея полнаго опредѣленія необходимо и достаточно двухъ какихъ-либо ея точекъ, а за таковыя мы можемъ принять два любые полюса двухъ плоскостей данной линейной примы

Но мы можемъ разсуждать и иначе.

Плоскости линейной примы на каждомъ изъ реберъ четырехгранника отмѣчаютъ перспективныя точки; каждой изъ этихъ точекъ полярна плоскость, проходящая чрезъ четвертую гармоническую точку на ребрѣ и противоположное ребро; слѣдовательно, мы имѣемъ коррелятивность между плоскостями линейныхъ примъ, имѣющихъ осью каждое изъ реберъ и точками на противоположныхъ ребрахъ четырехгранника, причемъ каждыя шесть проективныхъ плоскостей такихъ примъ должны пересѣкаться въ одной точкѣ—полюсѣ одной изъ плоскостей данной примы. Но достаточно трехъ такихъ проективныхъ примъ плоскостей, чтобы вполнѣ и однозначно опредѣлить гексаприму точекъ, представляющую совокупность полюсовъ плоскостей данной примы.

Каждую пару точекъ гексапримы мы можемъ

принять за опредѣляющую общее ребро примы плоскостей, и всѣ плоскости такихъ примъ, пересѣкающіяся въ одной и той же точкѣ гексапримы, проективны. Для опредѣленія проективности необходимы и достаточны три соотвѣтствія.

Каждую точку гексапримы мы можемъ принять за центръ линейной секунды лучей и плоскостей, и лучи этихъ секундъ, которыя проходятъ чрезъ одну и ту же точку гексапримы, есть лучи гомологичные. Для опредѣленія проективности необходимы и достаточны четыре соотвѣтствія.

Чрезъ любую точку мы можемъ провести линейную секунду лучей, а каждый изъ нихъ принять за ребро линейной примы плоскостей. Каждой такой примѣ будетъ полярна нѣкоторая гексаприма точекъ, проходящая чрезъ вершины четырехгранника. Полная совокупность всѣхъ такихъ примъ составитъ линейную секунду плоскостей, а полная совокупность ихъ полюсовъ составитъ нѣкоторую секунду точекъ то есть поверхность, въ которой можно провести секунду гексаримъ, проходящихъ чрезъ четыре постоянныя точки—вершины четырехгранника.

На систему, коррелятивную по отношенію къ четырехграннику мы можемъ смотрѣть какъ на новую геометрическую систему съ параметромъ, представленнымъ четырьмя постоянными точками. Линейныя примы этой системы, то есть гексаримы, опредѣляются двумя точками, а линейныя секунды тремя точками.

Линейныя примы этой системы, которыя, такимъ образомъ, въ сущности, вполнѣ и однозначно опредѣляются шестью точками, изучены съ особенною детальностью. Линейныя секунды получаются, если отъ трехъ точекъ перейдемъ къ ихъ полярнымъ плоскостямъ, опредѣлимъ по нимъ линейную секунду и найдемъ полярную совокупность полюсовъ плоскостей этой секунды.

Мы получимъ поверхность, на которой представлена линейная секунда гексаримъ, проходящихъ чрезъ четыре постоянныя точки.

Нетрудно видѣть, что поверхность эта III порядка то есть любою прямою пересѣкается въ трехъ точкахъ.

Въ самомъ дѣлѣ, найдя полярныя плоскости точекъ этой прямой, мы получимъ гексаприму плоскостей, принадлежащую взятой линейной секундѣ. Чрезъ каждую точку пространства, въ томъ числѣ и чрезъ центръ линейной секунды проходитъ три плоскости этой примы; полюсы этихъ трехъ плоскостей и есть три точки пересѣченія поверхности прямою.

Мы легко составимъ представленіе объ этой поверхности по ея представителю высшей симметріи, когда за четырехгранникъ примемъ правильный тетраэдръ, а за центръ преобразуемой линейной секунды возьмемъ центръ тетраэдра (центръ тяжести).

Очевидно, что искомая поверхность должна обладать всѣми элементами симметріи тетраэдра.

Линейныя примы плоскостей, имѣющія осями двойныя оси симметріи, полярно преобразуются въ экстрапрямыя, въ которыхъ экстраплоскость пересѣкается гранями куба, въ который вписанъ тетраэдръ. Плоскости, параллельныя гранямъ тетраэдра (конечно, перпендикулярнымъ къ тройнымъ осямъ симметріи), имѣютъ своими полюсами точки на соотвѣтственныхъ тройныхъ осяхъ симметріи, находящіяся внѣ тетраэдра (на разстояніи отъ граней вдвое меньшемъ чѣмъ соотвѣтственное разстояніе центра тетраэдра). На этой поверхности находятся всѣ шесть реберъ тетраэдра, такъ какъ полюсы всѣхъ вообще плоскостей, проходящихъ чрезъ вершины тетраэдра, есть неопредѣленныя точки, находящіяся въ этихъ плоскостяхъ, а слѣдовательно полюсы плоскостей, проходящихъ чрезъ ребра тетраэдра есть неопредѣленныя точки этихъ реберъ [1]).

Такимъ образомъ, искомая поверхность обладаетъ четырьмя точками самопересѣченія (двойными)—вершинами тетраэдра и на ней находятся девять упомянутыхъ прямыхъ. На каждую трехугольную грань тетраэдра опирается выпуклая (и конечно симметричная часть поверхности), а кромѣ того изъ каждой вершины тетраэдра выдѣляется часть поверхности, несущая на себѣ три ребра тетраэдра, пересѣкающіяся въ этой вершинѣ и уходящая въ безконечность, гдѣ ея экстраточки представлены правильнымъ трехугольникомъ, вершины коего, взятыя попарно, соотвѣтствуютъ прямому углу.

Если на поверхности III порядка находятся прямыя, то сѣченія ея плоскостями, чрезъ нихъ проходящими, дадутъ, кромѣ нихъ, конопримы. Въ данномъ случаѣ плоскости симметріи пересѣкаютъ поверхность въ параболахъ (то есть конопримахъ, имѣющихъ одну единственную экстраточку). Всѣ остальныя сѣченія чрезъ ребра тетраэдра есть гиперболы. Сѣченія, параллельныя гранямъ куба, въ который вписанъ тетраэдръ, есть гиперболы равностороннія: ихъ обѣ экстраточки соотвѣтствуютъ прямому углу.

По этимъ даннымъ представленіе о поверхности пріобрѣтаетъ нѣкоторую наглядность.

Теперь легко доказать, что кривая поверхность, выводящаяся изъ произвольнаго четырехгранника и произвольно взятой линейной секунды плоскостей

[1]) Это вытекаетъ изъ общаго правила нахожденія плоскостей, полярныхъ по отношенію къ даннымъ точкамъ.

можетъ быть выведена изъ этой особой поверхности путемъ коллинеарнаго преобразованія.

Въ самомъ дѣлѣ, если данъ произвольный четырехгранникъ и произвольная точка, какъ центръ линейной секунды плоскостей, то мы сначала найдемъ полярную плоскость этой точки, а затѣмъ подвергнемъ систему такому коллинеарному преобразованію, чтобы найденная плоскость преобразовалась въ экстраплоскость. Тогда преобразованная точка станетъ центромъ тяжести преобразованнаго четырехгранника.

Сдѣлавъ это, мы подвергнемъ еще систему сдвигамъ и растяженіямъ (гомогеннымъ деформаціямъ), чтобы четырехгранникъ преобразовать въ правильный тетраэдръ. При этихъ преобразованіяхъ экстраплоскость сохраняется неизмѣнною, также какъ и центръ тяжести послѣ преобразованія останется центромъ тяжести преобразованнаго четырехгранника. Такимъ образомъ получимъ возможность построить особую поверхность III порядка, а обратныя гомогенныя деформаціи и коллинеарное преобразованіе дадутъ именно ту искомую поверхность F^3, точки которой есть полюсы плоскости линейной секунды [1]).

Хотя описанныя операціи и аналогичны тѣмъ, которыя мы совершили на плоскости, опредѣляя совокупность полюсовъ лучей линейной примы по отношенію къ данному трехугольнику, но результатъ получился не аналогичный: найденная кривая поверхность III порядка никоимъ образомъ не есть гептасекунда точекъ, такъ какъ роль четырехъ вершинъ четырехгранника совершенно иная, чѣмъ трехъ остальныхъ точекъ.

Изъ изложеннаго видимъ, что эта поверхность F^3 вполнѣ опредѣляется четырехгранникомъ, всѣ шесть реберъ котораго находятся на ней, и еще какими-нибудь тремя точками.

Если бы мы приняли эти три точки S, S_1 и S_2 за центры гомологичныхъ секундъ лучей, гомологичность коихъ опредѣляется четырьмя вершинами четырехгранника, (то есть, что въ нихъ пересѣкаются гомологичные лучи), то, какъ извѣстно, мы получили бы, какъ совокупность точекъ пересѣченія трехъ гомологичныхъ плоскостей, кривую III порядка, и притомъ такую, что всѣ упомянутыя четыре вершины были бы ея двойными точками (что мы и отмѣтили выше).

Итакъ, совокупность полюсовъ плоскостей какой-либо линейной секунды по отношенію къ четырехграннику есть спеціальная поверхность III порядка, а именно заключающая четыре двойныя точки.

Какъ извѣстно, мы можемъ слѣдующимъ образомъ установить проективность между точками поверхности F^3 и точками нѣкоторой плоскости η: сначала установимъ коррелятивность между этими точками и гомологичными плоскостями въ центрахъ S, S_1 и S_2; эти же три плоскости пересѣкаются въ гомологичныхъ точкахъ поверхности F^3.

Въ частности, если гомологичныя плоскости пересѣкаются не въ точкѣ, а въ прямой, то точкѣ плоскости η гомологична прямая на поверхности F^3. Такая прямая (въ данномъ случаѣ, каждое ребро четырехгранника) называется главнымъ лучомъ поверхности; на плоскости η ей проективна главная точка. Такихъ точекъ и лучей въ данномъ случаѣ шесть, а больше этого быть и не можетъ [1]).

Въ разсматриваемомъ спеціальномъ случаѣ эти главные лучи по три пересѣкаются въ четырехъ вершинахъ четырехгранника, и значитъ на плоскости η изъ шести главныя точки по три находятся на прямой; главныя точки, слѣдовательно, составляютъ шесть вершинъ полнаго четырехсторонника, а его стороны проективны вершинамъ тетраэдра.

Въ общемъ случаѣ на поверхности F^3 имѣется 27 прямыхъ, а именно: 1) 6 главныхъ лучей, 2) 6 прямыхъ, проективныхъ конопримамъ, опредѣляемымъ каждыми пятью главными точками и 3) 15 прямыхъ, проективныхъ прямымъ, соединяющимъ попарно главныя точки.

Въ данномъ случаѣ группа 2) сливается съ группою 1), а изъ группы 3) остаются только три прямыя, соединяющія пары противоположныхъ вершинъ полнаго четырехсторонника. Слѣдовательно, въ кривой поверхности III порядка съ четырьмя двойными точками, кромѣ

[1]) Я здѣсь упускаю выводъ той секунды плоскостей III порядка, которая выводится изъ четырехгранника же какъ совокупность плоскостей полярныхъ точкамъ одной плоскости, такъ какъ всѣ операціи этого вывода коррелятивны операціямъ, описаннымъ для системы точекъ. Замѣчу лишь, что полной совокупности экстраточекъ по отношенію къ правильному тетраэдру полярна секунда плоскостей III порядка, имѣющая симметрію тетраэдра, въ составъ которой входятъ плоскости тетраэдра и параллельныя имъ плоскости, отсѣкающія его ребра на одну четверть (считая отъ вершины), также какъ всѣ шесть линейныхъ примъ плоскостей имѣющихъ своими осями ребра тетраэдра.

По этимъ даннымъ составляется прадставленіе объ огибаніи поверхности.

[1]) Reye Geometrie der Lage III 78.

шести главныхъ лучей имѣется еще только три прямыя.

Какъ мы видѣли выше, эти добавочныя три прямыя находятся въ одной плоскости то есть образуютъ трехугольникъ. Каждая сторона этого трехугольника пересѣкается двумя главными лучами, а именно противолежащими ребрами четырехгранника. Если изъ вершинъ этого трехугольника проведемъ по четыре луча чрезъ вершины четырехгранника, то получимъ гексаэдръ, то есть шестигранникъ съ четырехугольными гранями, которыя по три пересѣкаются въ его вершинахъ; опредѣляющій четырехгранникъ вписанъ въ этотъ гексаэдръ, то есть четыре его вершины составляютъ половинное число вершинъ гексаэдра; ребра его составляютъ по одной діагонали граней гексаэдра.

На поверхности находится пять трехугольниковъ, изъ коихъ четыре составляютъ четырехгранникъ, а пятый находится въ особой плоскости; его стороны пересѣкаются противолежащими ребрами въ двухъ точкахъ, гармонически раздѣляющихъ пару вершинъ трехугольника.

Такъ какъ девятью прямыми поверхность F^3 опредѣляется вполнѣ, то значитъ она опредѣляется вполнѣ и пятью точками, изъ коихъ четыре есть вершины четырехгранника, а пятая есть полюсъ особой плоскости.

Если примемъ четырехгранникъ за полярный, а пятую точку за полюсъ особой плоскости, то этимъ вполнѣ опредѣляется не только поверхность III порядка съ четырьмя двойными точками, но и нѣкоторая полярная система, а именно въ данномъ случаѣ та, для которой четырехгранникъ есть мнимый, то есть система, опредѣляемая мнимою коносекундою.

Напримѣръ, если четырехгранникъ есть правильный тетраэдръ, а данная пятая точка есть его центръ, а, слѣдовательно, особая есть экстраплоскость, то полярная система опредѣляется мнимымъ шаромъ, о чемъ рѣчь была въ статьѣ о полярныхъ отношеніяхъ мнимыхъ четырехгранниковъ. (Ср. V. 73)