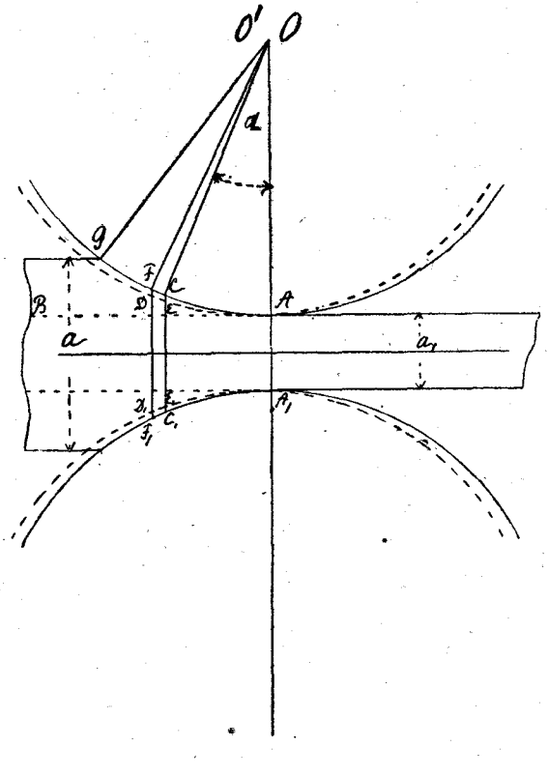
16. Сопротивленіе металла сжатію между двумя валками при прокаткѣ.

С. Н. Петрова

(доложено 3 марта)

Обозначимъ черезъ r радіусъ валка и черезъ φ уголъ, на который повернулся валокъ въ теченіе нѣкотораго промежутка времени. Процессъ прокатки мы можемъ представить такимъ образомъ, что прокатанный конецъ бруска металла остается неподвижнымъ, а валки катятся по поверхности бруска.



Пусть валокъ передвинулся по прямой AB (см. чертежъ) на разстояніе $rd\varphi$, соотвѣтствующее повороту валка на уголъ $d\varphi$. Выдѣлимъ часть валка, заключенную между двумя плоскостями, перпендикулярными къ оси валка, разстояніе между которыми равно 1. Объемъ металла, выдавленный при разсматриваемомъ перемѣщеніи поверхностью этой части валка, соотвѣтствующею углу $AOC=\alpha$ (см. чертежъ), равняется:

$$(r - r\cos\alpha)\ rd\varphi$$

Далѣе, для упрощенія вычисленій сдѣлаемъ два допущенія: 1) что такъ называемое „опереженіе“ металла равно 0, т. е. что скорость металла, выходящаго изъ валковъ, равна скорости точки на поверхности валка, и 2) что поперечное расширеніе металла равно 0. Мы можемъ сдѣлать эти допущенія, т. е. пренебречь опереженіемъ и расширеніемъ металла, вслѣдствіе незначительности величинъ послѣднихъ сравнительно съ удлиненіемъ металла при проходѣ его между валками.

Тогда вытѣсненной двумя валками объемъ перемѣстится влѣво на δx, занявъ положеніе EDD_1E_1 (см. чертежъ). Такъ какъ мы разсматриваемъ безконечно малое перемѣщеніе, то объемъ EDD_1E_1 можно выразить $\delta x\ CC_1$. Если обозначимъ толщину бруска послѣ выхода изъ валковъ черезъ a_1, то

$$CC_1 = a_1 + 2r\ (1 - \cos\alpha)$$

слѣдовательно получаемъ уравненіе:

$$1)\quad r\ (1 - \cos\alpha)\ rd\varphi = \left[\frac{a_1}{2} + r\,(1 - \cos\alpha)\right]\delta x$$

Но обозначивъ уголъ COF, соотвѣтствующій перемѣщенію вдоль поверхности валковъ металла,

вытѣсненнаго при поворотѣ валковъ на уголъ $d\varphi$, черезъ $\delta\alpha$, получимъ:

$$\delta x = r\cos\alpha\ \delta\alpha.$$

Подставляя это выраженіе въ уравненіе 1) и сокращая на r, находимъ:

2) $$r(1-\cos\alpha)\,d\varphi = \left[\frac{a_1}{2} + r(1-\cos\alpha)\right]\cos\alpha\ \delta\alpha,$$

откуда:

3) $$\delta\alpha = \frac{r(1-\cos\alpha)\,d\varphi}{\left[\frac{a_1}{2} + r(1-\cos\alpha)\right]\cos\alpha}$$

Выдѣлимъ теперь элементъ поверхности металла, ограниченный двумя прямыми, параллельными оси валка. Пусть радіусы, проведенные изъ одной точки оси валка черезъ каждую изъ этихъ прямыхъ составляютъ уголъ $d\alpha$, и пусть длина этого элемента поверхности равна 1.

Если мы обозначимъ давленіе на единицу поверхности металла, черезъ p, то давленіе на этотъ элементъ поверхности выразится:

$$p\,r\,d\alpha$$

Если обозначимъ коэффиціентъ тренія черезъ f, то работа силы тренія при перемѣщеніи этого элемента на разстояніе $r\delta\alpha$ выразится:

$$f\,p\,r\,d\alpha\,.\,r\,\delta\alpha.$$

Откуда вся работа силы тренія, приложенной къ поверхности, ширина которой равна 1, при перемѣщеніи валка на $rd\varphi$, будетъ составлять:

$$\int_0^\alpha f\,p\,r^2\,d\alpha\ \delta\alpha$$

или, если мы примемъ p за постоянное (беря среднее давленіе валка на металлъ):

4) $$f\,p\,r^2\int_0^\alpha d\alpha\ \delta\alpha$$

Принимая же во вниманіе 3), эта работа выразится:

5) $$f\,p\,r^2\int_0^\alpha \frac{r(1-\cos\alpha)\,d\varphi\ d\alpha}{\left[\frac{a_1}{2} + r(1-\cos\alpha)\right]\cos\alpha} =$$

$$f\,p\,r^2\,d\varphi\int_0^\alpha \frac{(1-\cos\alpha)\,d\alpha}{[m+(1-\cos\alpha)]\cos\alpha},$$

гдѣ $$m = \frac{a_1}{2r}$$

Чтобы найти

$$\int \frac{(1-\cos\alpha)\,d\alpha}{[m+(1-\cos\alpha)]\cos\alpha};$$

примѣнимъ подстановку

$$tg\frac{\alpha}{2} = y,$$

которая преобразуетъ этотъ интегралъ въ

$$4\int \frac{y^2dy}{[(2+m\ y^2+m]\ (1-y^2)} =$$

$$-\frac{2m}{1+m}\int\frac{dy}{(2+m)\ y^2+m} + \frac{2}{1+m}\int\frac{dy}{1-y^2} =$$

$$-\frac{2\sqrt{m}}{(1+m)\sqrt{2+m}} arc\,tg\sqrt{\frac{2+m}{m}}\,y +$$

$$\frac{1}{1+m}\log\frac{1+y}{1-y} + C.$$

Слѣдовательно,

6) $$\int_0^\alpha \frac{(1-\cos\alpha)\,d\alpha}{[m+(1-\cos\alpha)]\cos\alpha} =$$

$$-\frac{2\sqrt{m}}{(1+m)\sqrt{2+m}} arctg\left[\sqrt{\frac{2+m}{m}}\,tg\frac{\alpha}{2}\right] +$$

$$\frac{1}{1+m}\log\frac{1+tg\ \frac{\alpha}{2}}{1-tg\ \frac{\alpha}{2}}$$

Для сокращенія обозначимъ

$$\int_0^\alpha \frac{(1-\cos\alpha)\,d\alpha}{[m+(1-\cos\alpha)]\cos\alpha} = X$$

Далѣе, пусть собственное сопротивленіе металла сжатію, отнесенное къ единицѣ поверхности, равно q, и среднее давленіе, производимое валками на единицу поверхности, равно p. Тогда, принимая, что вся работа при сжатіи металла идетъ, во-первыхъ,

на преодолѣніе собственнаго сопротивленія металла сжатію и, во-вторыхъ, на преодолѣніе силы тренія при скольженіи металла вдоль поверхности валка, приходимъ къ уравненію:

7) $$p\,(r - \cos\alpha)\,r\,d\varphi = q\,(r - r\cos\alpha)\,rd\varphi + fpr^2\,\mathrm{X}d\varphi.$$

Откуда имѣемъ:

$$p\,(1 - \cos\alpha) = q\,(1 - \cos\alpha) + fp\mathrm{X}$$

и, слѣдовательно,

8) $$p = \frac{q\,(1 - \cos\alpha)}{1 - \cos\alpha - f\mathrm{X}} = \frac{q}{1 - \frac{f\,.\,\mathrm{X}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

Теперь перейдемъ къ преобразованію X въ видъ, удобный для вычисленій. Для этого замѣнимъ X приближенной формулой.

Сперва разсмотримъ при какомъ условіи $arctg\left[\sqrt{\frac{2+m}{m}}\,tg\frac{\alpha}{2}\right]$ разлагается въ сходящійся рядъ по степенямъ $\sqrt{\frac{2+m}{m}}\,tg\frac{\alpha}{2}$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условіе.

9) $$\sqrt{\frac{2+m}{m}}\,tg\frac{\alpha}{2} < 1.$$

Это условіе мы преобразуемъ, принимая во вниманіе, что (см. чертежъ).

$$\cos\alpha = 1 - \frac{a - a_1}{2r}$$

(α представляетъ здѣсь $\angle$ AOG).

Слѣдовательно

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{a - a_1}{4r}}$$

и

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{a - a_1}{4r - (a - a_1)}}$$

И такъ какъ $m = \frac{a_1}{2r}$, то условіе 9) преобразуется въ

$$\sqrt{\frac{a - a_1}{a_1}\cdot\frac{1}{1 - \frac{a}{4r + a_1}}} < 1$$

или

10) $$\frac{a - a_1}{a_1}\cdot\frac{1}{1 - \frac{a}{4r + a_1}} < 1$$

Принимая во вниманіе, что при обыкновенныхъ условіяхъ прокатки отношеніе $\frac{a}{4r + a_1}$ мало, а отношеніе $\frac{a - a_1}{a_1}$ значительно меньше 1, мы можемъ принять, что условіе 10) вообще бываетъ выполнено.

Такъ какъ уголъ $\frac{\alpha}{2}$ малъ, то можемъ принять:

11) $$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^3}{24}$$

Далѣе, если имѣетъ мѣсто условіе 10), то можемъ принять

$$arctg\left[\sqrt{\frac{2+m}{m}}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^3}{24}\right)\right] = \sqrt{\frac{2+m}{m}}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^3}{24}\right) - \frac{2+m}{3m}\sqrt{\frac{2+m}{m}}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^3}{24}\right)^3$$

Отбрасывая же члены, содержащіе α въ степени выше третьей, получаемъ:

12) $$arctg\left[\sqrt{\frac{2+m}{m}}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^3}{24}\right)\right] = \sqrt{\frac{2+m}{m}}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{12m}\right)$$

Также можемъ принять

$$\log\frac{1 + tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg\frac{\alpha}{2}} = 2\left(tg\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}tg^3\frac{\alpha}{2}\right) = 2\left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^3}{24} + \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^3}{24}\right)^3\right]$$

А отбросивъ члены, содержащіе α въ степени выше третьей, получимъ:

13) $$\log\frac{1 + tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg\frac{\alpha}{2}} = \alpha + \frac{\alpha^3}{6}$$

На основаніи 6), 13) и 14) находимъ слѣдующую приближенную формулу:

14) $$\mathrm{X} = \frac{\alpha^3}{6m}$$

Тогда формулѣ 8) можно придать видъ:

15) $$p = \frac{q}{1 - f\frac{\alpha^3}{12\,m\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

Далѣе, принимая во вниманіе, что уголъ α малъ, мы можемъ подставить вмѣсто α въ послѣднюю формулу $2\sin\frac{\alpha}{2}$. Тогда $\frac{\alpha^3}{12\,m\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ замѣнится выраженіемъ:

$$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{3\,m} = \frac{2\sqrt{r\,(a-a_1)}}{3\,a_1}$$

и формула 8) окончательно преобразуется въ

16) $$p = \frac{q}{1 - \frac{2\sqrt{r\,(a-a_1)}}{3\,a_1}f}$$

Примѣнимъ эту формулу къ опытамъ Кодрона надъ свинцовыми брусками, приведеннымъ въ его сочиненіи:

„Procédés de forgeage".—(1896 г. т. I, стр. 330).

Давленіе валка на единицу поверхности металла можно вычислить на основаніи выведенной въ моей статьѣ: „Выводъ нѣкоторыхъ формулъ, относящихся къ обработкѣ металла прокаткою" (Записки Горнаго Института, 1914 г., вып. 1) формулы

A) $$p = \frac{N}{b\left[\sqrt{\left(a-a_1\right)\left(r - \frac{a-a_1}{4}\right)} + f\frac{a-a_1}{2}\right]},$$

въ которой b означаетъ ширину бруска, a и a_1—толщину бруска до и послѣ прохода между валками, r — радіусъ валка, f — коэффиціентъ тренія между валкомъ и прокатываемымъ металломъ и N — все давленіе валка на металлъ.

Вслѣдствіе незначительности $a-a_1$ сравнительно съ r эту формулу можемъ замѣнить болѣепростой:

B) $$p = \frac{N}{b\sqrt{(a-a_1)\,r}},$$

совпадающей съ выведенною Кодрономъ, въ упомянутомъ выше его сочиненіи (т. I, стр. 313).

Приводимъ нѣкоторыя данныя изъ таблицъ Кодрона.

№№ по порядку пропусковъ между валками.	№ 2.	Размѣры, которые принималъ послѣдовательно испытуемый брусокъ. (Данныя Кодрона). Длина мм.	Ширина мм.	Толщ. мм.	p въ килогр. на 1 кв. мм. (Вычислено мною по форм. B).
0	Брусокъ свинца, прокатанный между валками въ 100 мм. діаметромъ при постоянномъ давленіи въ 480 килогр.	1000	20	20	
1		1125	20,6	17,2	2,00
2		1290	21,1	14,7	2,05
3		1482	21,6	12,5	2,13
4		1690	22	10,7	2,32
5		1970	22,5	9,0	2,34
6		2420	22,9	7,4	2,36
7		2860	23,4	5,9	2,39
8		3650	23,8	4,6	2,52
9		4880	24,1	3,4	2,58

Разсматривая значенія p, мы видимъ, что сначала p сравнительно быстро возрастаетъ.

Это возрастаніе замедляется, начиная съ четвертаго пропуска между валками, когда p равно 2, 32. Быстрое возростаніе p вначалѣ я объясняю возрастаніемъ q вслѣдствіе обработки (сжатія) металла. По этому я примѣню формулу 16), начиная лишь съ 4-го пропуска, когда есть основаніе предположить, что q при дальнѣйшихъ пропускахъ остается уже постояннымъ или, по крайней мѣрѣ, мало измѣняется.

Если мы примемъ, что q имѣетъ одно и то же значеніе для двухъ пропусковъ, то на основаніи 16) получимъ:

C) $$p_1 = \frac{q}{1 - k_1 f}$$

и

D) $$p_2 = \frac{q}{1 - k_2 f},$$

гдѣ $$k = \frac{2\sqrt{r\,(a-a_1)}}{3a_1}$$

Отсюда находимъ:

E) $$f = \frac{p_2 - p_1}{k_2 p_2 - k_1 p_1}$$

и изъ C) тогда опредѣлимъ q.

Примѣняя эти формулы къ 4-му и 9-му пропуску между валками, найдемъ:

$$f = 0{,}102$$

и

$$q = 2{,}18.$$

Теперь вычислимъ по формулѣ 16) значенія p для различныхъ пропусковъ между валками. Эти значенія я привожу для сравненія рядомъ съ вышеприведенными значеніями, вычисленными по формулѣ B).

	По форм. 16.	По форм. B.
4-й пропускъ	2,32	2,32
5-й „	2,34	2,34
6-й „	2,38	2,36
7-й „	2,42	2,39
8-й „	2,48	2,52
9-й „	2,58	2,58