13. Системы гармоническихъ отрѣзковъ и векторовъ.

Е. С. Федорова.

(Доложено 10 сентября 1907 г.)

Съ 9-ю фигурами.

I. Система гармоническихъ отрѣзковъ.

Однимъ изъ самыхъ существенныхъ результатовъ, какіе Новая Геометрія внесла въ область человѣческаго мышленія, слѣдуетъ считать доказательство возможности и установленія въ дѣйствительности ряда геометрическихъ системъ, собственно самостоятельныхъ геометрій, въ которыхъ въ существѣ дѣла находится одинъ и тотъ же логическій процессъ, приводящій къ послѣдовательному ряду теоремъ; хотя онѣ и формулируются для различныхъ системъ въ разныхъ терминахъ, но являются выраженіемъ одной и той же мысли. Въ этомъ смыслѣ каждая геометрія, отдѣльно взятая, является повтореніемъ всякой другой геометріи съ замѣною лишь элементовъ, принятыхъ для одной системы, элементами, составляющими основаніе другой, по крайней мѣрѣ, насколько дѣло идетъ о построеніяхъ и соотношеніяхъ позиціоннаго характера.

Впрочемъ, и этотъ послѣдній ограничивающій факторъ перейденъ, покамѣсть, въ разрядѣ такъ называемыхъ сферическихъ совокупностей. На рядѣ уже разсмотрѣнныхъ геометрій показано, что помимо квадратичныхъ совокупностей вообще въ каждой геометріи можно отличать совокупности сферическія (параболическія и др.), а именно: въ предѣлахъ секунды циклъ опредѣляется тремя элементами, въ предѣлахъ терціи сфера опредѣляется четырьмя элементами, въ предѣлахъ кварты мегасфера опредѣляется пятью элементами и т. д. Сѣченіе мегасферъ линейными терціями даетъ сферы; сѣченіе ихъ линейными секундами даетъ циклы т. д. Это все общія теоремы не позиціоннаго характера то есть не перефразируются одна изъ другой, лишь благодаря замѣнѣ въ формулировкѣ однихъ элементовъ другими (на основаніи установленія коррелятивности элементовъ разныхъ системъ), а выводятся для каждой геометріи отдѣльно и пока не имѣютъ общаго доказательства; также и теоремы о преобразованіяхъ коллинеарнаго и реципрочнаго типа.

Хотя отчетливое сознаніе множественности геометрій есть продуктъ самаго послѣдняго времени, когда это сознаніе дѣйствительно привело къ установленію ряда геометрическихъ системъ, но данныя для этого, равно какъ и проблески этого сознанія, появляются вмѣстѣ съ первыми существенными работами по Новой Геометріи, къ каковымъ слѣдуетъ отнести трудъ Poncelet „Théorie des polares reciproques“. Еще ближе и въ гораздо болѣе общей формѣ подошелъ къ этому сознанію Steiner [1]) въ установленіи однозначной зависимости между лучами примы (а слѣдовательно и точками на прямой) и кривыми второго порядка, проходящими чрезъ четыре постоянныя точки (отчасти даже однозначность между линейными секундами и кривыми второго порядка, проходящими чрезъ три постоянныя точки и т. д.).

Наконецъ Reye [2]) уже вполнѣ сознательно говоритъ про линейныя и квадратичныя совокупности шаровъ, хотя еще и не различаетъ шаровъ обыкновенныхъ и векторіальныхъ, почему его линейная совокупность относится къ одной, а квадратичная, какъ сферическая, къ другой системѣ. Насколько

---

[1]) Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projectivische Eigenschaften. Leipzig 1876. (bearbeitet von H. Schröter).

[2]) Въ Synthetische Geometrie der Kugeln. Leipzig 1879.

однако сознаніе множественности геометрій не оформилось до самаго послѣдняго времени, видно изъ всеобщаго до послѣднихъ дней признанія принципа дуализма, на каковой точкѣ зрѣнія стоялъ раньше и авторъ этой статьи.

Принципъ этотъ состоитъ въ томъ, что теоремы (основанныя на позиціонныхъ построеніяхъ), относящіяся къ соотношеніямъ точекъ, одинаково справедливы и для коррелятивныхъ соотношеній плоскостей (полярныхъ). Въ частности, въ геометріи на плоскости, это относится къ соотношеніямъ точекъ и прямыхъ (ихъ поляръ). Если бы этотъ принципъ былъ справедливъ, то отсюда конечно нисколько не слѣдовала бы множественныхъ самихъ геометрій, а только параллельность построеній въ двухъ системахъ различныхъ образовъ (точекъ и плоскостей). Теперь мы смотримъ на эту параллельность какъ на параллельность теоремъ двухъ геометрическихъ системъ, а таковыхъ можетъ существовать еще неопредѣленное число.

Пока установлены системы точекъ, плоскостей (въ частности прямыхъ на плоскости и системы лучей въ пространствѣ), шаровъ обыкновенныхъ и векторіальныхъ (въ частности круговъ на плоскости), наконецъ система параллельныхъ векторовъ [1]).

Наука ждетъ второго Штейнера, чтобы рѣшить вопросъ, дѣйствительно ли существуетъ неопредѣленное, точнѣе безконечное множество различныхъ геометрическихъ системъ, или всѣ возможныя системы сводятся къ ограниченному опредѣленному числу? Она ожидаетъ доказательства того, что дѣйствительно ли для всѣхъ геометрическихъ системъ существуетъ параллельность общихъ теоремъ, и не основанныхъ на позиціонныхъ построеніяхъ, напр. теоремъ о свойствахъ сферическихъ совокупностей и общихъ способахъ преобразованія.

Геометрія переживаетъ теперь періодъ аналогичный тому, который пережила химія до Менделѣева (тѣмъ болѣе до Рамзая). Аналогія бросается въ глаза.

Химическіе элементы открывались одни за другими, и каждое такое открытіе весьма расширяло область химіи; каждый элементъ создавалъ новую химію. Также каждый возможный элементъ геометрической системы создаетъ новую геометрію, и ихъ совокупность настолько же увеличиваетъ мощь объединяющей науки, какъ увеличеніе числа химическихъ элементовъ увеличиваетъ мощь химіи.

При такомъ исторически-научномъ положеніи дѣла открытіе новой геометрической системы во всякомъ случаѣ аналогично открытію новаго элемента и его соединеній въ химіи, и даетъ матеріалъ для ожидаемыхъ выводовъ самаго общаго характера.

Въ этой статьѣ я и имѣю въ виду констатировать, что открытыми геометрическими системами во всякомъ случаѣ не исчерпываются еще возможныя системы, такъ какъ здѣсь прежде всего устанавливаются еще двѣ геометріи третьей ступени, а именно геометріи гармоническихъ отрѣзковъ и векторовъ.

Приходится начать съ точной характеристики того элемента, который составляетъ основу первой геометрической системы.

Въ основу представленія кладется постоянный шаръ какъ шаръ преобразованія обратными радіусами, и затѣмъ въ пространствѣ берется произвольная точка, изъ которой преобразованіемъ выводится гомологичная ей точка. Пара полученныхъ точекъ и опредѣляетъ гармоническій отрѣзокъ какъ элементъ системы.

Ясно, что такихъ элементовъ въ системѣ столько же, сколько точекъ въ пространствѣ.

Если a есть произвольная данныя точки, и a' точка, ей гомологичная, то получается гармоническій отрѣзокъ aa', тождественный съ тѣмъ, который опредѣлился бы и данною точкою a'. Другими словами, за данныя мы всегда можемъ принимать не одну, а пару гармоническихъ сопряженныхъ точекъ по отношенію къ разъ навсегда данному шару O.

Какъ видимъ, шаръ O играетъ роль вещественнаго ортогональнаго шара линейной терціи шаровъ, а совокупность всѣхъ элементовъ системы есть совокупность всѣхъ паръ точекъ (концовъ діаметровъ шаровъ) этой терціи.

Чтобы доказать возможность такой геометрической системы, нужно доказать возможность составленія линейной примы по двумъ произвольно даннымъ гармоническимъ отрѣзкамъ или, будемъ говорить ради краткости, парамъ точекъ.

Ясно, что двѣ такія пары однозначно опредѣляютъ проходящій чрезъ нихъ кругъ, а точки послѣдняго въ совокупности и составляютъ линейную приму паръ. Это становится особенно наглядным, если произведемъ преобразованіе обратными радіусами, принявъ за центръ преобразованія точку на шарѣ O. Тогда этотъ шаръ преобразуется въ плоскость, а обѣ пары въ пары же точекъ симме-

[1]) Изъ сказаннаго выше видно, что Штейнеромъ въ сущности установлена система, элементы которой кривыя второго порядка, проходящія чрезъ эти постоянныя точки. Эта геометрія второй степени еще не получила систематичной разработки.

тричныхъ по отношенію къ этой плоскости [1]). Возможность проведенія круга чрезъ двѣ такія пары очевидна, а обратное преобразованіе изъ этого круга воспроизводитъ другой кругъ, прямоугольно пересѣкающій шаръ O (и значитъ принадлежащій линейной терціи шаровъ) и проходящій чрезъ обѣ пары точекъ. Это кругъ самогомологичный.

Итакъ, такая геометрическая система дѣйствительно существуетъ.

Чтобы получить линейныя секунды системы, нужно задаться тремя произвольными парами. Совершенно аналогично тому, какъ это сдѣлано для круга примы, мы можетъ доказать, что три пары однозначно опредѣляютъ проходящій чрезъ нихъ шаръ, также прямоугольно пересѣкающій шаръ O то есть также самогомологичный.

Въ построеніи линейныхъ совокупностей дальше идти некуда. Теперь изучимъ ихъ отношенія.

Двѣ линейныя секунды всегда пересѣкаются въ линейной примѣ. Въ данномъ случаѣ два шара всегда пересѣкаются въ кругѣ.

Какъ извѣстно (Новая Геометрія VI 3), не всегда пересѣченіе шаровъ вещественно; но тогда они пересѣкаются въ мнимомъ кругѣ, который есть не что иное, какъ пересѣченіе вещественнаго ортогональнаго шара двухъ данныхъ шаровъ радикальною плоскостью опредѣляемой ими примы. Смыслъ этого выраженія тотъ, что всѣ шары примы ортогонально пересѣкаютъ одинъ и тотъ же вещественный шаръ, а мнимый кругъ отмѣчаетъ радіусъ этого шара и положеніе радикальной плоскости.

Такимъ образомъ въ составѣ линейныхъ примъ мы должны считать и мнимые круги. Конечно, это отнюдь не выражаетъ, что и эти круги лучами изъ центра шара O пересѣкаются въ гармонической парѣ точекъ. Напротивъ того, въ мнимомъ кругѣ o особую роль играетъ центръ, который есть центръ лучей, пересѣкающихъ шаръ въ гармоническихъ парахъ точекъ, принимая мнимый кругъ за мнимый кругъ преобразованія.

Въ самомъ дѣлѣ, ортогональный шаръ O и тотъ, коего центральное сѣченіе есть мнимый кругъ, но разсматриваемый какъ вещественный, принадлежитъ ортогональной (перпендикулярной) примѣ; значитъ шаръ O пересѣкаетъ другой ортогональный (съ діаметральнымъ сѣченіемъ o) въ его большомъ кругѣ; другими словами, этотъ второй шаръ есть мнимый ортогональный шаръ, то есть лучи, исходящіе изъ его центра, пересѣкаютъ шаръ O въ гармоническихъ парахъ точекъ второго вида (Н. Г. II 11, IV 19).

Линейная секунда съ линейною примою всегда пересѣкаются въ элементѣ. Въ разсматриваемомъ случаѣ шаръ съ кругомъ пересѣкаются въ парѣ точекъ.

И въ данномъ случаѣ пересѣченіе не всегда вещественно, но всегда образуетъ опредѣленный отрѣзокъ. Какъ извѣстно шаръ, не входящій въ составъ линейной примы шаровъ, пересѣкаетъ ее въ линейной примѣ круговъ (Новая Геометрія IV 22). Эта прима имѣетъ общую ось пересѣченія, а именно ось секунды, опредѣляемой данною примою и даннымъ шаромъ. Какъ оси секунды, этой оси принадлежитъ опредѣленный отрѣзокъ, представляющій діаметръ ортогональнаго шара секунды. Итакъ, въ случаѣ, если пересѣченіе шара и круга не вещественно, все-таки имѣется мнимый отрѣзокъ, представляющій на оси секунды діаметръ вещественнаго шара, ортогональнаго какъ по отношенію къ данному шару, такъ и по отношенію къ данному кругу.

Для того, чтобы какая-нибудь логическая операція имѣла вполнѣ реальный смыслъ, важно не то, будетъ ли называться полученный ею геометрическій образъ вещественнымъ или мнимымъ, а важно то, имѣетъ ли то, что кроется подъ этимъ названіемъ, строго опредѣленное конструктивное значеніе или нѣтъ. Ясно, что въ данномъ случаѣ мы имѣемъ ясный положительный отвѣтъ въ отношеніи къ такъ называемымъ мнимому кругу и мнимому отрѣзку.

Но такъ какъ таковыя встрѣчаются въ конструктивныхъ операціяхъ, то теперь возникаютъ вопросы о построеніи линейныхъ примъ и секундъ, когда въ составъ опредѣляющихъ данныхъ входятъ мнимые образы.

Во всякомъ случаѣ въ этой геометріи приходится имѣть дѣло какъ съ вещественными, такъ и съ мнимыми парами точекъ. Чтобы шире понять значеніе послѣднихъ, разсмотримъ соотношеніе паръ точекъ съ разныхъ точекъ зрѣнія.

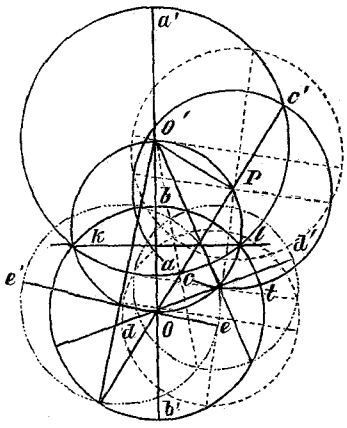
Какъ пара сопряженныхъ гармоническихъ точекъ aa', по отношенію къ діаметру шара A, она же можетъ быть принята за пару постоянныхъ точекъ инволюціи, въ которой пара концовъ bb' діаметра есть перемѣнная пара. Съ этой точки зрѣнія особое значеніе пріобрѣтаетъ средняя точка или центръ O' пары (фиг. 1), который, въ свою очередь, можетъ быть принятъ за центръ ортогональнаго шара, опредѣляющаго терцію паръ точекъ bb'. Возьмемъ дру-

[1]) Радіусъ преобразуется въ кругъ, прямоугольно пересѣкающій плоскость съ четырьмя гармоническими точками, образующими гармоническій четырехъугольникъ (Новая Геометрія III 14), а шаръ, имѣющій діаметромъ обѣ точки пары въ шаръ же, пересѣкающій прямоугольно и плоскость, и кругъ, полученный изъ радіуса въ гомологичной парѣ точекъ.

гую пару cc' той же прямы, что и aa', опредѣляемой кругомъ, имѣющимъ центръ O'; пусть P центръ этой второй пары. Въ такомъ случаѣ прямая PO' перпендикулярна къ прямой PO (какъ хорда и радіусъ, проходящій чрезъ ея средину). Отсюда слѣдуетъ, что геометрическое мѣсто точекъ P есть кругъ, имѣющій діаметромъ OO'. Выводъ этотъ мы можемъ, конечно, распространить и на линейную секунду отрѣзковъ то есть шаръ: геометрическое мѣсто центровъ вещественныхъ отрѣзковъ линейной секунды есть поверхность шара, имѣющаго діаметромъ центры шара O и шара O' секунды.

Однако не всѣ точки поверхности этого шара есть центры вещественныхъ отрѣзковъ системы, а только точки, лежащія внѣ шара O, такъ что поверхность эта ограничена кругомъ точечныхъ отрѣзковъ, имѣющимъ діаметръ kl.

Съ другой стороны, каждый центръ вещественнаго отрѣзка однозначно опредѣляетъ положеніе и величину его, такъ что отрѣзокъ можетъ быть еще проще заданъ не парою, а его центромъ. Напр. если отрѣзокъ cc' заданъ центромъ P, то соединимъ P и O прямою и изъ P какъ центра проводимъ кругъ, прямоугольно пересѣкающій шаръ O. Этотъ кругъ конечно пересѣчетъ шаръ O въ такой точкѣ t, что Pt будетъ касательною къ шару O.



Фиг. 1.

Отсюда видимъ, что на каждый отрѣзокъ cc' можемъ смотрѣть какъ на діаметръ нѣкотораго шара, прямоугольно пересѣкающаго шаръ O, а слѣдовательно на секунду отрѣзковъ какъ на секунду шаровъ, входящую въ составъ линейной терціи, имѣющей вещественнымъ ортогональнымъ шаръ O.

Но эта секунда шаровъ есть не что иное какъ сфера шаровъ, имѣющая шаръ діаметра OO' своимъ центральнымъ шаромъ.

Итакъ, линейная секунда отрѣзковъ есть секунда тѣхъ діаметровъ сферы шаровъ, которые представляютъ лучи ортогональнаго шара сферы.

Впрочемъ нужно замѣтить, что здѣсь рѣчь идетъ не о сферѣ шаровъ общаго характера, но объ *особой* сферѣ. Въ самомъ дѣлѣ, если O ортогональный, а OO' діаметръ центральнаго шара сферы, то такъ какъ точки O и O' одинаково отстоятъ отъ центра послѣдняго, то значитъ O' есть центръ второго ортогональнаго шара сферы; между тѣмъ O' самъ есть шаръ этой сферы, и оба центра ортогональныхъ шаровъ есть концы діаметра центральнаго шара. Таковы свойства особой сферы шаровъ, непредусмотрѣнной въ прежнихъ работахъ автора.

Для этой особой сферы, если назовемъ діаметры шаровъ, проходящихъ чрезъ центръ ортогональнаго шара центральными, находимъ, что концы центральныхъ діаметровъ шаровъ сферы находятся на поверхности второго ортогональнаго шара то есть наибольшаго шара самой сферы. Этотъ шаръ особой сферы и есть шаръ, ограничивающій отрѣзки линейной секунды.

До сихъ поръ мы явно имѣли въ виду только вещественные отрѣзки, но только-что изложенное соотношеніе между системою отрѣзковъ и шаровъ заставляетъ неявно видѣть въ отрѣзкахъ вообще центральные діаметры шаровъ особой сферы, а такъ какъ эта система шаровъ состоитъ изъ двухъ частей: вещественныхъ и мнимыхъ, раздѣляемыхъ шарами точечными, то ясно, что центральные діаметры мнимыхъ шаровъ и есть мнимые отрѣзки системы.

Въ самомъ дѣлѣ, при этомъ опредѣленіи мы получили бы, что геометрическое мѣсто центровъ отрѣзковъ линейной секунды есть (центральный) шаръ (особой сферы), имѣющій діаметромъ отрѣзокъ, ограниченный центрами шара O (перваго ортогональнаго) и наибольшаго вещественнаго отрѣзка (второго ортогональнаго шара) O'.

При этомъ опредѣленіи самъ ортогональный шаръ былъ бы наибольшимъ мнимымъ шаромъ особой сферы, и значитъ его діаметръ былъ бы наибольшимъ мнимымъ отрѣзкомъ секунды.

Если не принять этихъ понятій, то пришлось бы заключить, что геометрическое мѣсто центровъ отрѣзковъ секунды есть поверхность шара, но не полная, а безъ нѣкоторой части, ограниченной кругомъ діаметра kl. Такое опредѣленіе математически недопустимо, и указало бы лишь на неполноту выводовъ. При новомъ же расширеніи понятій эта не-

полнота совершенно устраняется, а сами мнимые отрѣзки получаютъ вполнѣ реальное значеніе.

Мало того, именно благодаря этому расширенію понятія, всѣ вопросы, касающіеся построенія линейныхъ совокупностей, получаютъ неожиданно простое и общее рѣшеніе, такъ какъ оно сводится къ построенію сферическихъ совокупностей шаровъ, теперь хорошо изученное въ геометріи шаровъ.

Прима, опредѣляемая двумя парами точекъ, есть совокупность концовъ центральныхъ діаметровъ цикла шаровъ, опредѣляемаго тѣми двумя шарами, для которыхъ данныя двѣ пары есть также концы центральныхъ діаметровъ и шаромъ O какъ мнимымъ шаромъ цикла.

Секунда, опредѣляемая тремя парами точекъ, есть совокупность концовъ центральныхъ діаметровъ сферы шаровъ, опредѣляемой тѣми тремя шарами, для которыхъ данныя три пары есть также концы центральныхъ діаметровъ и шаромъ O какъ мнимымъ шаромъ сферы.

Отсюда слѣдуетъ, что все равно, даны ли намъ, для опредѣленія линейной примы, двѣ вещественныя пары напр. aa' и cc' или двѣ мнимыя пары напр. dd' и ee', или наконецъ одна вещественная и одна мнимая пара напр. cc' и dd', во всѣхъ случаяхъ однозначно выведемъ тотъ же циклъ шаровъ, въ составъ котораго необходимо входитъ мнимый шаръ O, а слѣдовательно и въ составъ искомой совокупности необходимо войдетъ мнимая пара bb'.

То же относится и къ случаю, когда секунда опредѣляется тремя парами, все равно, сколько изъ нихъ вещественныхъ и сколько мнимыхъ; могутъ быть взяты и всѣ три вещественныя, или всѣ три мнимыя; полученная секунда всегда будетъ одна и та же, если пары взяты изъ ея состава. Разница проявляется лишь въ построеніи радикальной плоскости примы двухъ шаровъ, соотвѣтствующихъ даннымъ парамъ.

Если оба шара вещественны, то радикальная плоскость примы есть или плоскость круга пересѣченія, или діаметральная плоскость шара, прямоугольно пересѣкающаго оба данныя. Если оба шара мнимые, то радикальная плоскость есть діаметральная плоскость мнимаго ортогональнаго шара примы то есть шара, проходящаго чрезъ большіе круги обоихъ шаровъ. Но въ этомъ случаѣ плоскость пересѣченія обоихъ шаровъ, какъ прямоугольно пересѣкающихъ шаръ O', проходитъ чрезъ центръ этого шара. Наконецъ, если изъ двухъ шаровъ одинъ мнимый, а другой вещественный, то радикальная плоскость ихъ примы есть діаметральная плоскость шара, пересѣкающаго вещественный шаръ прямоугольно, а мнимый шаръ по большому кругу. И обратно, если проведемъ шаръ, прямоугольно пересѣкающій мнимый шаръ, а вещественный шаръ, пересѣкающій по большому кругу, то плоскость большого круга такого шара пройдетъ чрезъ центръ шара O'. Это непосредственно вытекаетъ изъ относительности вещественныхъ и мнимыхъ шаровъ и возможности ихъ взаимнаго обмѣна. Вмѣсто ортогональнаго вещественнаго шара O мы за таковый можемъ принять O', и тогда онъ войдетъ въ качествѣ мнимаго шара въ составъ сферы, а шаръ O станетъ вещественнымъ ея шаромъ (и въ то же время мнимымъ ортогональнымъ).

Всѣ эти построенія показаны на фиг. 1.

Какъ видимъ, изъ геометріи шаровъ сюда непосредственно примѣняются не всякія вообще, а только особыя сферы шаровъ. Центры наибольшаго вещественнаго и наибольшаго мнимаго шаровъ есть концы діаметра центральнаго шара; отсюда слѣдуетъ, что такія сферы необходимо заключаютъ въ себѣ циклъ точечныхъ шаровъ, въ которыхъ пересѣкаются оба упомянутые шара съ центральнымъ. Этотъ циклъ теперь есть совокупность точечныхъ отрѣзковъ. Итакъ, въ составъ особой сферы необходимо входятъ шары мнимые, а въ составъ линейной секунды отрѣзковъ также необходимо входятъ въ составъ мнимые отрѣзки, представляющіе центральные діаметры мнимыхъ шаровъ сферы.

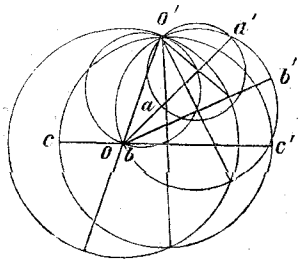
Это слѣдуетъ изъ самой сущности линейной секунды, для который основной и постоянный для всей системы ортогональный шаръ O есть шаръ мнимый.

Но необходимо ли въ линейной секундѣ имѣются отрѣзки вещественные? во всякомъ случаѣ à priori эта необходимость ничѣмъ не вызывается. Общія же соображенія легко открываютъ, что такой необходимости нѣтъ, и вполнѣ допустимы секунды, состоящія только изъ мнимыхъ отрѣзковъ, какъ существуютъ сферы, состоящія только изъ мнимыхъ шаровъ.

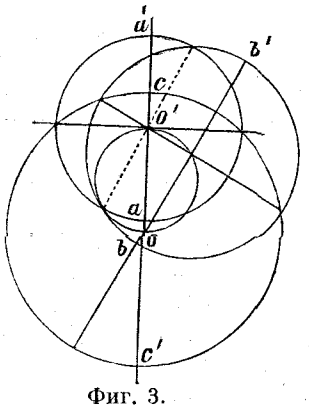
Въ самомъ дѣлѣ, всѣ вещественные отрѣзки секунды своими концами ограничиваютъ шаръ, прямоугольно пересѣкающій шаръ O; это единственное ограничивающее для него условіе. Мы можемъ произвольно взять такой шаръ и принять его за выраженіе линейной секунды отрѣзковъ. Такому шару мы можемъ придать произвольную величину радіуса, а въ частности сдѣлать его равнымъ нулю.

Эта особая сфера и вмѣстѣ съ тѣмъ секунда отрѣзковъ изображена на фиг. 2. Въ ней только

одинъ вещественный шаръ и отрѣзокъ, а именно точка O'. Всѣ же остальные шары мнимые и проходятъ чрезъ точку O', имѣя центрами точки на центральномъ шарѣ, діаметръ коего есть OO'. Эти центры есть вмѣстѣ съ тѣмъ центры мнимыхъ отрѣзковъ aa', bb', cc'...



Фиг. 2.



Фиг. 3.

На эту секунду мы можемъ смотрѣть какъ на переходную къ такимъ сферамъ и секундамъ, въ которыхъ всѣ шары и отрѣзки мнимые.

Примѣромъ такихъ совокупностей, состоящихъ исключительно изъ мнимыхъ элементовъ, можетъ служить изображенная на фиг. 3.

Въ этомъ спеціальномъ случаѣ точка O перестаетъ быть радикальнымъ центромъ шаровъ совокупности — выраженіе, которое мы могли бы, согласно изложенному, перенести и на совокупность отрѣзковъ, и остается только O' какъ единственный радикальный центръ совокупности и одновременно центръ ея мнимаго ортогональнаго шара.

Конечно, и въ этомъ случаѣ совокупность однозначно опредѣляется двумя элементами напр. aa' и bb', къ которымъ необходимо присоединяется и третій элементъ cc', какъ діаметръ шара O. И здѣсь, какъ во всѣхъ остальныхъ случаяхъ, для отысканія линейной секунды мы по тремъ элементамъ, какъ діаметрамъ шаровъ, присоединяя къ нимъ постоянный шаръ O, отыскиваемъ радикальный центръ и соотвѣтственный ортогональный шаръ.

Ясно, что разсматриваемый теперь случай отличается лишь тѣмъ, что найденный радикальный центръ есть точка, находящаяся внутри всѣхъ четырехъ опредѣляющихъ шаровъ; соотвѣтственно этому она и является центромъ мнимаго, а не вещественнаго ортогональнаго шара. Если же бы она получилась внѣ опредѣляющихъ шаровъ, мы имѣли бы вещественный ортогональный шаръ, и вмѣстѣ съ тѣмъ секунду вещественныхъ отрѣзковъ вмѣстѣ съ отрѣзками мнимыми.

То обстоятельство, что въ линейныхъ совокупностяхъ необходимо имѣются части съ мнимыми элементами, тогда какъ вещественные могутъ и вовсе отсутствовать, можетъ побудить взглянуть съ другой точки зрѣнія на самыя основы излагаемой геометріи; можно именно принять мнимые элементы за вещественные и обратно.

Для этого пришлось бы измѣнить опредѣленіе гармоническихъ паръ, и принять за вещественную пару такую, что на ея центральномъ лучѣ концы діаметра шара O были бы гармоническими точками второго вида (Новая Геометрія II 11). Тогда тѣ пары, которыя по первоначальному опредѣленію считались вещественными, стали бы парами мнимыми и могли бы вовсе отсутствовать въ нѣкоторыхъ линейныхъ совокупностяхъ.

Но при этомъ новомъ опредѣленіи потерялась бы наглядность въ опредѣленіи линейныхъ совокупностей и возможность формулировать таковыя какъ круги и шары. Во всякомъ случаѣ, какъ видимъ, та и другая точка зрѣнія есть вещь условная и одинаковы допустимы съ чисто геометрической точки зрѣнія.

Послѣ всего изложеннаго ясно, что теорема пересѣченія линейныхъ совокупностей получаетъ общее значеніе, то есть, что двѣ линейныя секунды необходимо пересѣкаются въ линейной примѣ, линейная секунда и прима необходимо пересѣкаются въ элементѣ, а двѣ линейныя примы могутъ и не пересѣкаться, а если пересѣкаются, то только при положеніи въ одной линейной секундѣ.

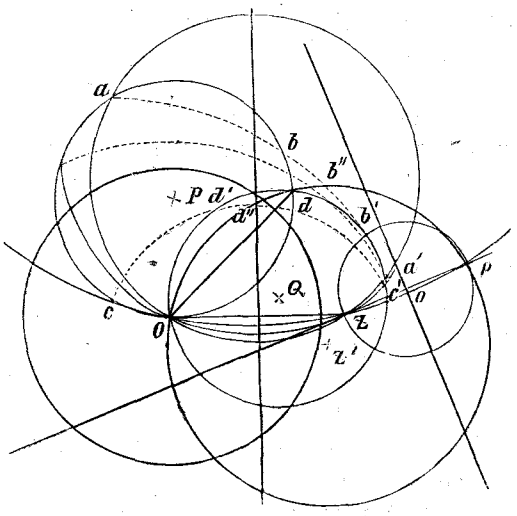
Мы видимъ, что гармоническіе отрѣзки удобнѣе всего опредѣлять ихъ средними точками. Если эта точка находится внѣ шара O, отрѣзокъ вещественъ, если внутри, онъ мнимъ.

Въ линейной секундѣ геометрическое мѣсто этихъ среднихъ точекъ есть шаръ, проходящій чрезъ центръ шара O. Если даны двѣ произвольныя линейныя секунды, то шары ихъ среднихъ точекъ необходимо пересѣкаются въ кругѣ, какъ шары, проходящіе чрезъ постоянную точку — центръ O, и лишь въ исключительномъ случаѣ эти шары касаются то есть кругъ пересѣченія сводится къ точечному.

Кругъ сѣченія этихъ шаровъ необходимо проходитъ чрезъ центръ шара O, и потому часть его точекъ есть необходимо точки мнимыхъ отрѣзковъ; и только въ томъ случаѣ, если этотъ кругъ пересѣкаетъ шаръ O мы имѣемъ два точечные отрѣзка и вещественную часть примы отрѣзковъ, средины которыхъ ограничиваются этими двумя точками.

Этимъ изученіе соотношеній линейныхъ совокупностей исчерпывается.

Что касается коллинеарнаго преобразованія этой геометріи, то оно опредѣляется произвольною точкою Z', какъ центромъ шара преобразованія, проходящаго чрезъ центръ O ортогональнаго шара (фиг. 4) и точкою Z какъ центромъ коллинеаціи.



Фиг. 4.

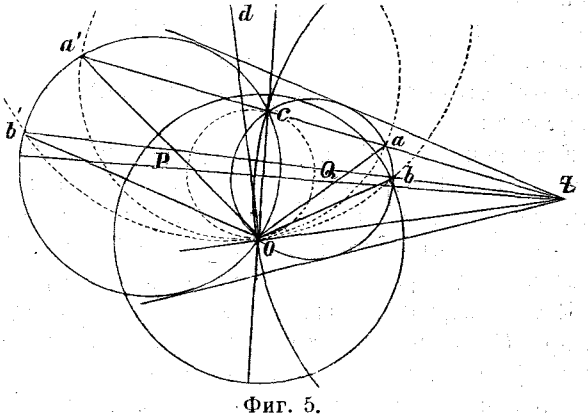
Замѣтимъ, что, принимая за основаніе построеній среднія точки отрѣзковъ, мы найдемъ, что всѣ онѣ, выводятся изъ построеній геометріи точекъ преобразованіемъ обратными радіусами.

На шаръ Z' мы можемъ смотрѣть какъ на преобразованную плоскость перспективы, на Z какъ преобразованный центръ перспективы. Если въ плоскости OZZ' проведемъ кругъ OZp, то это будетъ преобразованная средняя ось, а точка p — среднею точкою перспективы. Преобразованные лучи перспективы теперь представлены кругами (секундою), проходящими чрезъ точки O и Z. Точки Z и p можемъ принять за точечные шары примы самоколлинеарныхъ шаровъ, а потому, если дана точка a, то мы получимъ гомологичную точку a', если проведемъ два круга: одинъ чрезъ нее и пару точекъ O и Z, а другой чрезъ нее же, но принадлежащій примѣ шаровъ Zp то есть прямоугольно пересѣкающій ортогональный шаръ o этой примы. Эти два круга пересѣкутся въ двухъ гомологичныхъ точкахъ a и a', причемъ aa' и $b''Z$ (гдѣ b'' точка пересѣченія съ кругомъ Z') двѣ пары гармоническихъ сопряженныхъ точекъ на кругѣ $aOZa'$ (Новая Геометрія III 14).

По тремъ даннымъ точкамъ a, b, c легко построимъ гомологичные круги P и Q, а по четыремъ — гомологичные шары. Ясно, что оба принадлежатъ одной и той же примѣ съ шаромъ Z'; если пересѣкаются, то въ одномъ общемъ кругѣ Od.

Круги изъ лучей показаны на фигурѣ сплошными, а круги самоколлинарные—пунктиромъ.

Въ особомъ спеціальномъ случаѣ (фиг. 5), когда совпадаютъ точки Z и Z', нахожденіе гомологичныхъ точекъ упрощается. Соединяемъ прямою точки O и Z, и изъ O возставляемъ къ ней перпендикуляръ; послѣдній представляетъ изъ себя централь примы круговъ, имѣющихъ общую точку касанія O. Ясно, что круги эти прямоугольно пересѣкаютъ шаръ Z; и обратныя ихъ точки (Новая Геометрія II 25) на лучахъ изъ Z есть точки гомологичныя, почему онѣ и получаются пересѣченіемъ круга примы и соотвѣтственнаго луча изъ Z.



Фиг. 5.

Изъ этого построенія видимъ, что хотя отрѣзки въ коллинеаціи и однозначны, но гомологичные могутъ быть и разнородны. Напр. точечному отрѣзку b гомологиченъ вещественный отрѣзокъ со среднею точкою b'. Отсюда видимъ, что слѣдующіе за b' отрѣзки въ направленіе $a'..\ b'..$ имѣютъ гомологичными уже мнимые отрѣзки.

Чтобы закончить основанія излагаемой геометріи, достаточно еще раскрыть ея сферическія совокупности.

Въ этомъ же нѣтъ никакого затрудненія, такъ какъ, если даны четыре произвольные отрѣзка и ихъ средины k, l, m, n, то достаточно по послѣднимъ четыремъ точкамъ построить шаръ и мы получаемъ центральную совокупность, въ данномъ случаѣ шаръ, сферы отрѣзковъ; по каждой же точкѣ центральнаго шара непосредственно находятся и обѣ конечныя точки отрѣзка то есть точка поверхности, ограничивающей сферу.

Отсюда непосредственно вытекаетъ и способъ реципрочнаго преобразованія этой геометріи, состоя-

щій въ преобразованіи обратными радіусами среднихъ точекъ линейныхъ совокупностей, причемъ за шаръ преобразованія можно принять произвольный шаръ пространства. Ясно, что въ числѣ преобразованныхъ совокупностей, какъ особый частный случай, получаются и линейныя, что соотвѣтствуетъ въ геометріи точекъ шарамъ безконечно-большого радіуса.

$$W^4 - 4d\cos\alpha\, W^3 + 2\,(R^2 + 2d^2 - 2r^2)\, W^2 - 4d\,R^2\cos\alpha\, W + R^4 = 0 \quad 2).$$

Понятно, что поверхности, ограничивающія сферу отрѣзковъ, есть довольно сложныя поверхности; онѣ вообще состоятъ изъ вещественныхъ и мнимыхъ отрѣзковъ, хотя могутъ состоять и только изъ тѣхъ или другихъ.

Если центральный шаръ сферы весь находится внѣ шара O, то сфера сплошь состоитъ изъ вещественныхъ, если же онъ находится внутри шара O, то сфера сплошь состоитъ изъ мнимыхъ отрѣзковъ. Точкамъ пересѣченія центральнаго шара съ шаромъ O, соотвѣтствуютъ онѣ сами, какъ точечные отрѣзки поверхности.

Если центральный шаръ находится внѣ шара O, а шаръ O внѣ перваго, то вещественная поверхность сферы состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ полостей—одной внѣ, а другой внутри шара O, причемъ отрѣзки по два раза перекрываютъ другъ друга.

Если центральный шаръ находится внѣ шара O, а шаръ O внутри перваго, то вещественная поверхность сферы также состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ полостей или поверхностей, но отрѣзки не перекрываютъ другъ друга и только соединяютъ соотвѣтственныя точки. Въ частности, если центральный шаръ находится въ такомъ относительномъ положеніи и притомъ концентриченъ съ шаромъ O, то и обѣ изолированныя полости есть также два концентрическіе шара—одинъ внѣ, а другой внутри шара O.

Нетрудно вывести и уравненія этихъ поверхностей. Ради простоты, мы ограничимся здѣсь выводомъ ихъ плоскихъ сѣченій чрезъ центръ шара O.

Каждой средней точкѣ отрѣзка однозначно соотвѣтствуетъ пара конечныхъ точекъ на томъ же радіуса шара O. Означимъ разстояніе средней точки отъ центра этого шара чрезъ v, а длину отрѣзка чрезъ 2δ; тогда разстояніе конечныхъ точекъ отрѣзка отъ центра шара будутъ $W = v \pm \delta$; означимъ еще радіусъ шара O чрезъ R, радіусъ центральнаго шара сферы чрезъ r, а разстояніе его центра отъ центра O чрезъ d.

Имѣемъ $v^2 = R^2 + \delta^2$, и $\delta^2 = (W - v)^2 = W^2 - 2Wv + v^2$, и значитъ $v^2 = R^2 + W^2 - 2Wv + v^2$ то есть $v = \frac{R^2 + W^2}{2W}$ 1)

Если примемъ радіусъ, проходящій чрезъ центръ центральнаго шара сферы, за ось x-овъ и будемъ считать углы α отъ этого радіуса въ обѣ стороны (положительные и отрицательные), то получимъ $x + d = v\cos\alpha$; $y = v\sin\alpha$; $x^2 + y^2 = r^2$, и значитъ $(v\cos\alpha - d)^2 + v^2\sin^2\alpha = r^2$ то есть $v^2 + d^2 - 2vd\cos\alpha = r^2$.

Подставляя сюда значеніе v изъ 1), получимъ окончательно

Это и есть уравненіе центральнаго сѣченія поверхности, ограничивающей сферу отрѣзковъ.

Въ частности, если возьмемъ $d = 0$ то есть примемъ центральный шаръ сферы концентричнымъ съ шаромъ O, въ этомъ уравненіи уничтожатся члены, содержащіе множитель $\cos\alpha$ и одновременно члены, содержащіе перемѣнную W въ нечетной степени. Это и есть упомянутый выше случай сферы, ограниченной двумя шарами, концентричными съ шаромъ O.

Въ особомъ частномъ случаѣ $R = r$, находимъ

$$(W^2 - R^2)^2 = 0$$

то есть $W = \pm R$; это сфера точечныхъ отрѣзковъ.

Какъ для коллинеарнаго преобразованія въ этой геометріи служитъ шаръ, проходящій чрезъ центръ O, такъ для реципрочнаго преобразованія можетъ служить всякій произвольный шаръ пространства, потому что посредствомъ него всякій другой произвольный шаръ однозначно преобразуется въ шаръ же. Умѣя строить сферическія совокупности, мы, пользуясь коллинеарнымъ преобразованіемъ, легко построимъ совокупности квадратичныя вообще и т. д.

Между сферою отрѣзковъ и сферою обыкновенныхъ шаровъ существуетъ весьма тѣсная связь.

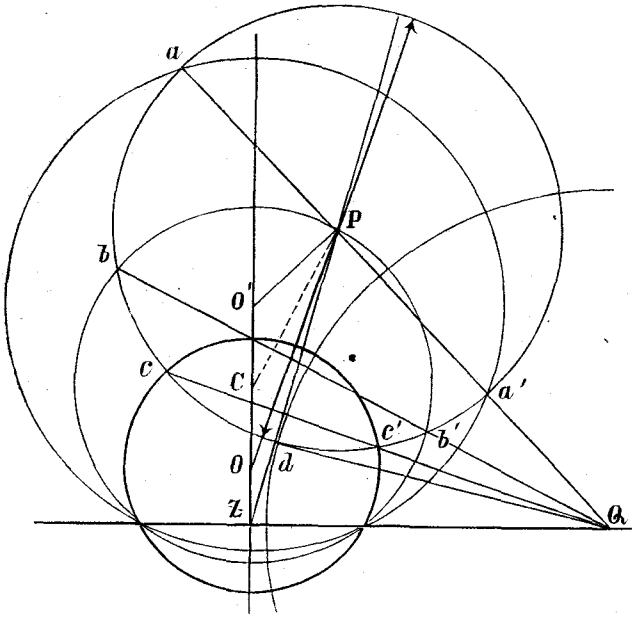
Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что всѣ отрѣзки сферы мы приняли за діаметры шаровъ. Тогда получимъ совокупность шаровъ, имѣющую центральный шаръ, а также, по условію построенія, шаръ O своимъ ортогональнымъ шаромъ. Такъ какъ безконечно-малую часть всякой кривой мы можемъ принять за прямую то есть линейную приму, то значитъ два весьма близкіе шара сферы мы можемъ считать за опредѣляющіе линейную приму, касательную къ сферической совокупности. Но мы видѣли, что въ линейной совокупности отрѣзковъ поверхность, ограничивающая концы отрѣзковъ (вещественныхъ) есть кругъ или сфера. Поэтому то же мы можемъ принять въ предѣлѣ и для разсматриваемой теперь совокупности шаровъ, взятой въ безконечно малой части около одного изъ шаровъ совокупности. Отсюда слѣдуетъ, что и въ этой поверхности концы діаметровъ шаровъ, проведен-

ныхъ изъ центра шара O, есть точки, принадлежащія огибающей поверхности сферы, хотя въ этихъ точкахъ поверхность и не перпендикулярна къ діаметрамъ.

Итакъ, поверхности, изъ коихъ одна ограничиваетъ сферу отрѣзковъ, а другая огибаетъ сферу обыкновенныхъ шаровъ, для которыхъ отрѣзки есть діаметры, есть поверхности тождественныя. Или иначе: въ предѣлѣ три безконечно-близкіе шара сферы (коихъ діаметральныя плоскости не совпадаютъ) пересѣкаются въ концахъ отрѣзка сферы.

Пусть O (фиг. 6) ортогональный шаръ, C центральный и O' сопряженный ортогональный шаръ сферы шаровъ (и отрѣзковъ). Эти три шара принадлежатъ линейной примѣ коей прямая OCO' есть централь, Z центръ, а плоскость ZQ, перпендикулярная къ централи и проходящая чрезъ центръ Z, есть радикальная плоскость.

Пусть P одинъ изъ шаровъ сферы, α пары точекъ a съ a', b съ b', c съ c' есть точки пересѣченія его съ шарами примы, находящіяся въ плоскости чертежа.



Фиг. 6.

По свойству сопряженнаго ортогональнаго шара O' имѣемъ, что aa' есть діаметръ шара P то есть проходитъ чрезъ его центръ, и пусть пересѣченіе его съ радикальною плоскостью есть точка Q. Тогда всѣ три упомянутые шара примы имѣютъ въ точкѣ Q равную степень; слѣдовательно, прямая bO должно пройти и чрезъ точку b', а прямая cO чрезъ точку c'.

Отсюда вытекаетъ слѣдующій простой способъ построенія шаровъ и отрѣзковъ сферы по даннымъ ортогональному шару O и центральному шару C.

Сначала на прямой OC откладываемъ $CO' = OC$ и принимаемъ точку O' за центръ сопряженнаго ортогональнаго шара, принадлежащаго той же примѣ, для которой ZQ радикальная плоскость. Беремъ на центральномъ шарѣ произвольную точку P и, соединивъ ее съ центромъ O', проводимъ чрезъ нея плоскость перпендикулярную къ прямой $O'P$. Эта плоскость пересѣчетъ шаръ O' въ кругѣ, который и будетъ большимъ кругомъ искомаго шара, а его діаметръ изъ O искомымъ отрѣзкомъ.

Такъ какъ пары точекъ aa', bb', cc' на лучахъ изъ Q обусловливаютъ равную степень въ точкѣ Q, то значитъ, проведя изъ Q шаръ, прямоугольно пересѣкающій шаръ P, получимъ гармоническіе отрѣзки, и шаръ Q окажется прямоугольно пересѣкающимъ нетолько шаръ P, но и всѣ шары упомянутой примы.

Въ частности, всѣ три шара O, P и Q прямоугольно пересѣкаютъ другъ друга.

Всѣмъ изложеннымъ строго устанавливаются основы этой геометріи третьей ступени или третьяго измѣренія.

II. Система гармоническихъ векторовъ.

Въ этой системѣ также предполагается даннымъ шаръ O, опредѣляющій по каждой данной точкѣ a, какъ начальной точкѣ вектора, его конечную точку a'. Существеннымъ отличіемъ этой системы отъ предыдущей является то, что обѣ конечныя точки вектора не равнозначны, хотя, если за начальную точку вектора будетъ дана точка a', то конечною точкою вектора все-таки явится та же гармоническая точка a (по отношенію къ діаметру шара O); но въ этомъ случаѣ мы имѣемъ уже не одинъ, а два различные вектора, совмѣщенные въ своихъ концахъ.

Такъ какъ въ этой системѣ главное значеніе принадлежитъ начальнымъ точкамъ векторовъ, а положеніе конечныхъ точекъ является лишь слѣдствіемъ положенія начальныхъ точекъ, то ясно, что и опредѣленіе совокупностей обусловливается данными начальными точками.

Отсюда само собой слѣдуетъ составленіе линейныхъ совокупностей. Если даны два вектора съ начальными точками a и b, то линейная прима векторовъ есть совокупность, имѣющая начальными точками прямую ab. Если даны три произвольные вектора въ пространствѣ съ начальными точками a, b и$с$,

то линейная секунда есть совокупность, имѣющая начальными точками плоскость *abc*.

Ясно, что въ линейной примѣ конечныя точки векторовъ составляютъ кругъ, воспроизводимый изъ прямой начальныхъ точекъ преобразованіемъ обратными радіусами, считая за шаръ преобразованія шаръ *O*. Также конечныя точки линейной секунды составляютъ шаръ, воспроизводимый изъ плоскости начальныхъ точекъ тѣмъ же преобразованіемъ.

Если прямая или плоскость начальныхъ точекъ пересѣкаютъ шаръ *O*, то точки пересѣченія составляютъ совокупность точечныхъ векторовъ линейныхъ совокупностей. Если такого пересѣченія нѣтъ, то въ совокупности не имѣется и точечныхъ векторовъ.

Какъ въ предъидущей системѣ среднія точки отрѣзковъ однозначно опредѣляютъ конечныя точки отрѣзковъ, такъ въ этой конечныя точки однозначно опредѣляются начальными. Но въ предъидущей точечный отрѣзокъ на радіусѣ отдѣлялъ вещественные отъ мнимыхъ; здѣсь же точечный векторъ, тоже точка на шарѣ *O*, отдѣляетъ положительные векторы отъ отрицательныхъ, и все различіе тѣхъ и другихъ сводится къ противоположнымъ направленіямъ, а потому имѣетъ совершенно условный характеръ.

Мы можемъ условиться называть положительными тѣ векторы, начальныя точки которыхъ находятся внутри шара *O*; и тогда направленіе положительныхъ векторовъ есть направленіе центробѣжное. И наоборотъ, начальныя точки отрицательныхъ векторовъ, при этомъ условіи, находятся внѣ шара *O*, а ихъ направленіе центростремительное.

Сказаннымъ исчерпывается все, что слѣдуетъ сказать объ опредѣленіи линейныхъ совокупностей. Но изъ одинаковости основнаго опредѣленія этихъ совокупностей и таковыхъ же въ геометріи точекъ слѣдуетъ одинаковость и всѣхъ остальныхъ построеній, такъ что все различіе этихъ двухъ геометрій сводится къ тому, что въ геометріи точекъ операція оканчивается построеніемъ требуемой совокупности точекъ, тогда какъ въ геометріи, о которой сейчасъ идетъ рѣчь, кромѣ построенныхъ точекъ, какъ начальныхъ точекъ векторовъ, слѣдуетъ присоединить гармоническія (по отношенію къ шару *O*) точки, какъ конечныя точки векторовъ.

Такимъ образомъ найдемъ, что для коллинеарнаго преобразованія можно взять произвольную плоскость какъ плоскость перспективы и произвольную точку въ пространствѣ (не находящуюся въ плоскости перспективы), какъ центръ перспективы.

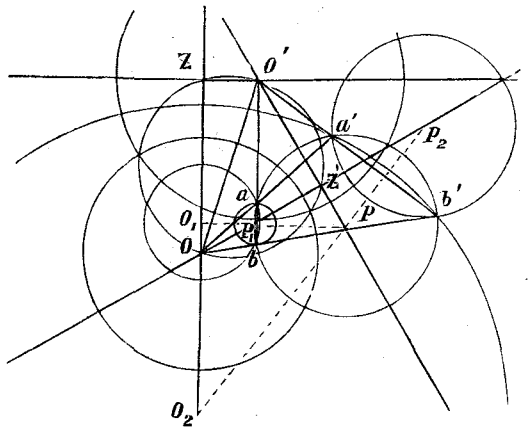
Такимъ же образомъ найдемъ, что по тремъ даннымъ векторамъ въ одной плоскости нужно лишь провести кругъ чрезъ три ихъ начальныя точки, чтобы получить начальныя же точки цикла векторовъ.

Также, чтобы получить по четыремъ произвольнымъ даннымъ сферу векторовъ, достаточно провести шаръ чрезъ четыре ихъ начальныя точки.

Такъ какъ циклъ векторовъ есть совокупность, ограниченная въ плоскости двумя кругами, то значитъ ея периферія та же, что и для цикловъ векторіальныхъ круговъ перваго разряда. Также ясно, что поверхность сферы векторовъ, какъ поверхность, ограниченная двумя шарами, тождественна съ поверхностью сферы векторіальныхъ шаровъ перваго разряда.

Но и въ этомъ мы усматриваемъ существенное различіе обѣихъ геометрій, такъ какъ въ геометріи векторіальныхъ шаровъ существуютъ и сферы второго разряда, не ограниченныя двумя шарами, чего нѣтъ въ разсматриваемой теперь геометріи: какія бы четыре точки въ пространствѣ ни были даны, всегда чрезъ нихъ можно провести вещественный шаръ, а затѣмъ построить и шаръ гармоническихъ точекъ (по отношенію къ шару *O*), и значитъ здѣсь во всѣхъ случаяхъ сфера ограничена двумя шарами.

Въ виду одинаковости поверхностей, огибающихъ сферы векторіальныхъ шаровъ и ограничивающихъ сферы гармоническихъ векторовъ можно воспользоваться тѣми геометрическими соотношеніями, которыя выводятся въ геометріи этихъ шаровъ и присоединить сюда новыя, относящіяся къ векторамъ.



Фиг. 7.

Пусть *a* и *b* начальныя, *a′* и *b′* конечныя точки двухъ данныхъ векторовъ (фиг. 7), а *O* есть центръ ортогональнаго шара. Четырехугольникъ *ab b′a′* впи-

санъ въ кругѣ P, перпендикулярно пересѣкающемъ шаръ O (тѣмъ самымъ, который ограничиваетъ приму линейныхъ отрѣзковъ.

Пусть два шара O_1, проходящій чрезъ точки a и b, и O_2, проходящій чрезъ точки a' и b' есть шары, огибающіе нѣкоторую сферу векторіальныхъ шаровъ).

Тогда эти шары вмѣстѣ съ шаромъ O принадлежатъ одной линейной примѣ, коей централь O_1O_2 есть въ то же время ось вращенія сферы шаровъ (и векторовъ), а перпендикулярная къ ней плоскость ZO' есть радикальная плоскость той же примы и вмѣстѣ съ тѣмъ плоскость подобія сферы. Если проведемъ до взаимнаго пересѣченія прямыя ab и $a'b'$, точка O' играетъ по отношенію къ четырехугольнику ту же роль, что и точка O: обѣ есть вершины этого полнаго четырехугольника. Поэтому, если бы приняли за отрѣзки ab и $a'b'$, могли бы изъ точки O', какъ центра, провести ортогональный шаръ, радіусъ котораго былъ бы равенъ степени круга $abb'a'$ въ точкѣ O'. Какъ точка, въ коей степень шаровъ O_1, O и O_2 одинакова, она принадлежитъ радикальной плоскости примы этихъ шаровъ.

Итакъ начальныя и конечныя точки двухъ произвольныхъ векторовъ сферы опредѣляютъ прямыя, пересѣкающіяся въ точкахъ радикальной плоскости сферы векторовъ какъ плоскости подобія сферы векторіальныхъ шаровъ.

Отсюда видимъ, что если ограничимся разсмотрѣніемъ построеній въ плоскости чертежа, центръ Z примы ограничивающихъ круговъ долженъ находиться на окружности круга, имѣющаго діаметръ OO'. Этимъ опредѣляется совокупность всѣхъ возможныхъ цикловъ векторовъ, въ составъ коихъ входятъ два данные.

Отсюда нетрудно вывести соотвѣтственныя теоремы и для шаровъ, ограничивающихъ сферы.

Если примемъ шаръ O за шаръ преобразованія обратными радіусами, конечныя точки векторовъ замѣстятъ другъ друга, а вмѣстѣ съ тѣмъ и точки круга, проходящаго чрезъ вписанный гармоническій четырехугольникъ, то есть и этотъ кругъ, также какъ и шаръ O', окажутся самогомологичными то есть пересѣкаютъ прямоугольно шаръ O. Поэтому всѣ три круга O, O' и P пересѣкаютъ другъ друга прямоугольно, а потому любой изъ нихъ можно принять за ортогональный кругъ линейной секунды, къ которой принадлежатъ оба остальные.

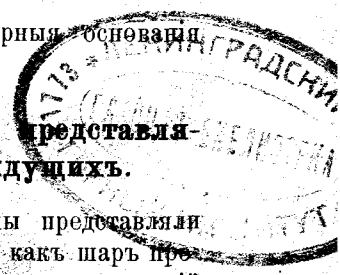
Нетрудно сдѣлать соотвѣтственный выводъ и для шаровъ.

Въ разсматриваемомъ случаѣ шаръ O есть ортогональный шаръ сферы шаровъ и векторовъ, а такъ какъ два безконечно-близкіе шара сферы пересѣкаются въ кругѣ, плоскость котораго проходитъ чрезъ центръ ортогональнаго шара, то ясно, что вообще въ предѣлѣ три безконечно-близкіе шара сферы (если ихъ діаметральныя плоскости не совпадаютъ) пересѣкаются въ концахъ вектора.

На фигурѣ 7, кромѣ круговъ O_1 и O_2, ограничивающихъ циклъ векторовъ, проходящій чрезъ два данные, проведены еще круги P_1, P_2, удовлетворяющіе тому же условію. Какъ только-что объяснено, таковыхъ паръ круговъ можно провести безконечное множество, но при этомъ всегда центры примъ находятся на окружности круга, имѣющаго діаметромъ OO'.

Наконецъ, реципрочнымъ преобразованіемъ является преобразованіе обратными радіусами начальныхъ точекъ векторовъ, причемъ за шаръ преобразованія можетъ быть взятъ произвольный шаръ въ пространствѣ.

Этимъ исчерпываются элементарныя основанія этой геометріи трехъ измѣреній.



III. Геометрическія системы, представляющія расширеніе предъидущихъ.

Въ предъидущихъ системахъ мы предоставляли себѣ даннымъ постоянный шаръ O, какъ шаръ преобразованія обратными радіусами, воспроизводящій изъ каждой данной точки a нѣкоторую другую, гомологичную ей, точку a'; и именно пару такихъ точекъ, какъ отрѣзокъ или какъ векторъ, мы принимали за элементъ системы.

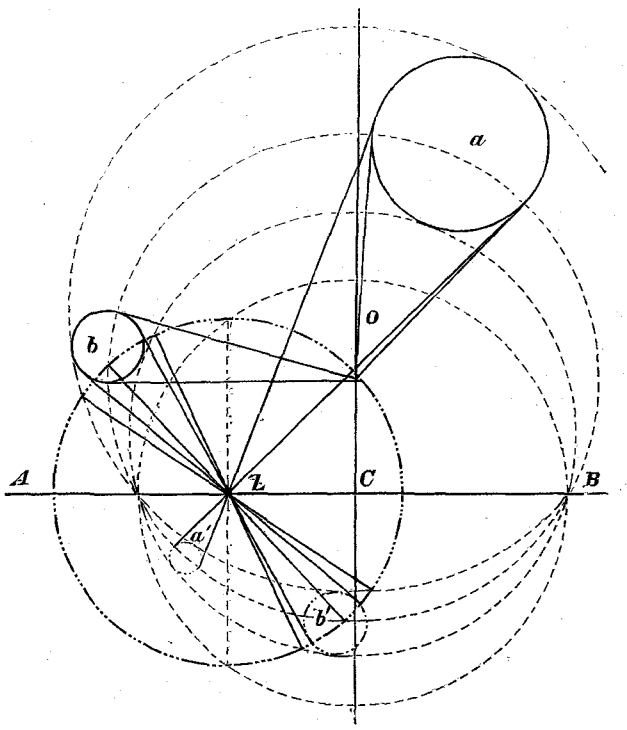
Но ясно, что мы можемъ расширить основное допущеніе, взявъ произвольный шаръ, векторіальный или обыкновенный, или же взявъ нѣкоторый произвольный векторъ, и затѣмъ, получивъ гомологичный шаръ, также векторіальный или обыкновенный, или гомологичный векторъ, принять пару такихъ гомологичныхъ элементовъ за элементъ системы. Если мы докажемъ, что изъ пары такихъ элементовъ мы можемъ однозначно воспроизвести линейную приму, то существованіе соотвѣтственныхъ системъ будетъ строго установлено.

Но если дана пара такихъ элементовъ, то по существу допущенія это равнозначно съ тѣмъ, что дано по четыре элемента, изъ коихъ уже три однозначно опредѣляютъ циклъ элементовъ. Остается доказать, что и четвертый элементъ войдетъ въ составъ цикла, и тогда этимъ будетъ доказано, что этотъ циклъ и составляетъ искомую линейную приму новой геометрической системы.

Это же доказательство дается тѣмъ, что если имѣемъ какой нибудь циклъ, то вмѣстѣ съ тѣмъ имѣется и прима шаровъ, по отношенію къ которымъ шары (и векторы) сопряжены попарно, и ихъ связь выражается именно въ томъ, что эти шары служатъ (вещественными или мнимыми) шарами преобразованія.

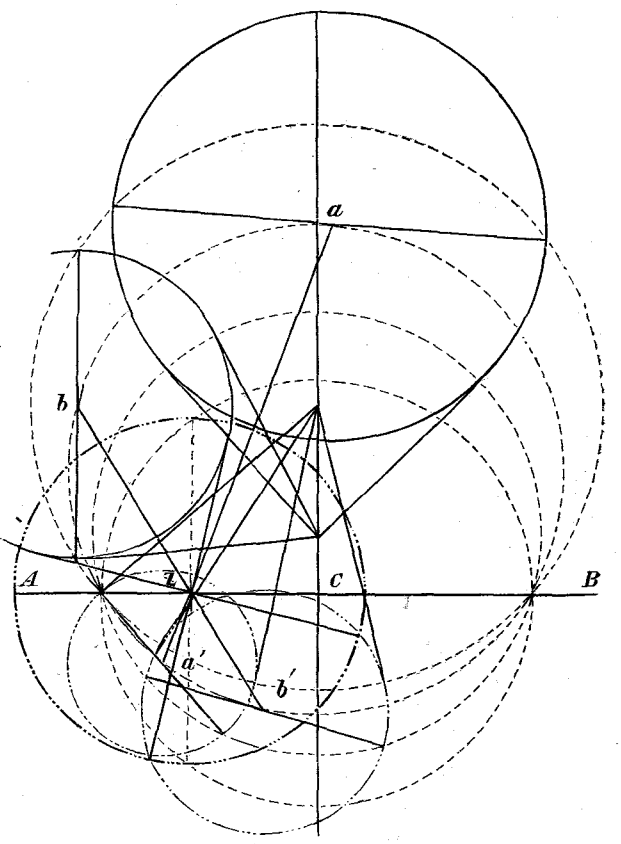
Въ видѣ примѣра указаній на эти, уже намъ извѣстныя, соотношенія, приведемъ два цикла, въ которыхъ взяты именно мнимые шары такого преобразованія.

На фиг. 8 приведенъ циклъ векторіальныхъ шаровъ, характеризующійся ортогональнымъ шаромъ и двумя огибающими циклъ шарами, которые принадлежатъ вмѣстѣ съ первымъ къ одной и той же примѣ съ радикальною плоскостью AB. Въ пересѣченіи съ центральною плоскостью симметріи цикла, принятою за плоскость чертежа, имѣемъ ортогональный кругъ O, два огибающіе круга и радикальную ось AB ихъ примы, которая одновременно есть ось подобія шаровъ цикла, взятыхъ попарно. Какой-



Фиг. 8.

нибудь мнимый кругъ съ центромъ Z на этой оси, ортогональный по отношенію къ кругамъ примы, и есть мнимый кругъ преобразованія обратными радіусами. Напр. преобразованіе круга a обратными радіусами даетъ кругъ a', а преобразованіе круга b даетъ кругъ b'. Слѣдовательно, и обратно, если данъ постоянный шаръ, все равно, вещественный или мнимый, и два произвольные векторіальные шара a и b, то оба гомологичные имъ шара a' и b' входятъ въ составъ одного цикла, и послѣдній опредѣляется однозначно то есть составляетъ линейную приму новой системы.



Фиг. 9.

Почти дословно мы можемъ повторить тотъ же выводъ и по отношенію къ двумъ даннымъ обыкновеннымъ шарамъ a и b, если данный ортогональный шаръ примемъ за центральный, а оба огибающіе шара за сопряженные ортогональные шары. Снова получаемъ циклъ какъ линейную приму новой геометрической системы. Ясно, что то же мы можемъ сдѣлать и для пары параллельныхъ векторовъ при данномъ постоянномъ шарѣ какъ шаръ преобразованія (фиг. 9).

Этимъ и устанавливаются окончательно три новыя системы.

Однако, имѣя, при тѣхъ же основныхъ заданіяхъ, пару шаровъ a, b (или параллельныхъ векторовъ) и получивъ имъ гомологичные a', b', мы можемъ

не считать ихъ равноправными, а принимать одинъ элементъ пары за начальный, опредѣляющій, а другой за конечный, выводной, аналогично системѣ гармоническихъ векторовъ.

Тогда линейная прима непосредственно составляется изъ начальныхъ элементовъ, а конечныя служатъ только дополняющими, и мы опять получимъ систему векторіальныхъ отрѣзковъ линейныхъ примъ для каждаго изъ элементовъ. Такимъ образомъ и система гармоническихъ векторовъ расширится и дополнится тремя новыми системами.

Пока, ограничиваясь этими общими указаніями, мы все-таки намѣчаемъ возможность пути для вывода неопредѣленнаго числа новыхъ геометрическихъ системъ.

Мы видѣли (стр. 142), что по отношенію къ мегасферѣ можно установить реципрочность отдѣльныхъ элементовъ (напр. обыкновенныхъ и векторіальныхъ шаровъ, параллельныхъ векторовъ...); такъ какъ полная совокупность таковыхъ элементовъ есть кварта, то и паръ тѣхъ же элементовъ тоже кварта, а потому этимъ путемъ выведутся новыя системы 4-ой ступени.

Теперь, когда намѣченъ путь для вывода неопредѣленнаго числа геометрическихъ системъ, представляется цѣлесообразнымъ обратиться къ опредѣленію существенной характеристики Новой Геометріи и ея задачъ.

Какъ вытекаетъ изъ всего, что сдѣлано въ ея области, главною особенностью ея задачъ является неопредѣленная множественность въ приложеніи ея теоремъ, въ противоположность той индивидуальности условій въ постановкѣ задачъ, съ которыми имѣютъ дѣло геометрія древнихъ и аналитическая. Задачи метрическаго характера, по этой причинѣ, вовсе не входятъ въ область этой дисциплины; но было бы неточно сказать, что въ ея составъ входятъ только задачи, рѣшаемыя позиціонными построеніями (по каковой причинѣ Новую Геометрію чаще называютъ геометріей положенія или проективною).

Большое число теоремъ, заключающихся хотя бы въ трехъ предлежащихъ статьяхъ автора, могутъ формулироваться не въ какихъ либо опредѣленныхъ образахъ, но въ геометрическихъ элементахъ вообще. Напр. теперь мы знаемъ, что существуютъ преобразованія коллинеарныя и реципрочныя, что послѣднія возсоздаютъ изъ линейныхъ совокупностей сферическія, и обратно, но при извѣстныхъ, строго опредѣленныхъ, условіяхъ, такъ какъ вообще тѣ же преобразованія и изъ сферическихъ совокупностей возсоздаютъ сферическія же, что въ системахъ 4-ой ступени кромѣ цикла и сферы въ составъ послѣднихъ входятъ и мегасферы и т. д. и т. д.; и все это одинаково справедливо для неопредѣленнаго числа системъ, элементы коихъ могутъ быть весьма разнообразны.

Ближе всего особенность перехода отъ прежней геометріи къ Новой можно отмѣтить по аналогіи съ переходомъ отъ арифметики съ ея индивидуальными числами къ алгебрѣ съ ея отвлеченными знаками и символами.

Но мы, конечно, не должны упускать изъ виду, что эта аналогія отмѣчаетъ лишь одну сторону дѣла, такъ какъ и въ Новой Геометріи мы должны отличать часть аналитическую, имѣющую дѣло съ непрерывными совокупностями, отъ части арифметической изучающей совокупности отдѣльныхъ элементовъ (раціональныя), не связанныхъ непрерывностью напр. комплексы кристаллографическіе.