VII. Его же. Гексасекунда, пентаприма и пентасекунда плоскостей.

Содержаніе этой замѣтки составляетъ непосредственное слѣдствіе предыдущей.

Въ ней приведена теорема, дающая возможность по семи произвольнымъ точкамъ построить гептасекунду. Такъ какъ гептасекунда есть образъ позиціонный и коррелятивно переносится во всѣ геометрическія системы, то и построеніе гептасекунды плоскостей по семи даннымъ подразумѣвается само собою. Но если даны только шесть плоскостей, то экстраплоскость всегда находится, какъ седьмая, въ нашемъ распоряженіи и въ счетъ не входитъ какъ единственная въ своемъ родѣ.

Поверхность, опредѣляемая секундою плоскостей гексасекунды, какъ плоскостей къ ней касательныхъ, есть, очевидно, гиперболическій параболоидъ, такъ какъ именно для него экстраплоскость есть касательная.

Его отношеніе къ гептасекундѣ плоскостей аналогично отношенію параболы къ конопримѣ лучей общаго характера и какъ парабола лучей есть образъ непозиціонный то есть коррелятивно не переносится во всѣ геометрическія системы, такъ непозиціонный образъ составляетъ и выведенная гексасекунда плоскостей.

Гексапримы точекъ и плоскостей соединены въ пространствѣ также неразрывно, какъ конопримы точекъ и лучей на плоскости: совокупности касательныхъ къ первымъ составляютъ вторую. Въ гексапримѣ точекъ, какъ пространственной кривой, такими касательными плоскостями являются плоскости кривизны и онѣ же есть полярныя плоскости точекъ гексапримы, въ которыхъ онѣ касаются.

Но въ гексапримѣ плоскостей имѣется спеціальная разность, опредѣляемая пятью изъ нихъ, а именно та, въ составъ которой входитъ экстраплоскость; какъ шестая, она опредѣляетъ гексаприму вполнѣ и однозначно.

Полюсы этихъ плоскостей составляютъ ту гексаприму точекъ, въ ко орой одной изъ плоскостей кривизны есть экстраплотность и которая названа Зейдевицемъ пространственною параболою; отношеніе ея къ гексапримѣ общаго характера аналогично отношенію параболы къ конопримѣ общаго характера.

Такимъ образомъ мы пришли къ примѣ плоскостей, вполнѣ и однозначно опредѣляемой пятью то есть пентапримѣ плоскостей.

Параболическою гиперболою Зейдевицъ назвалъ гексаприму, имѣющую въ одной экстраточкѣ экстракасательную.

Въ гиперболическомъ параболоидѣ всякая гексаприма проходящая чрезъ ея экстраточку, есть параболическая гипербола. Если его ассимптотическія плоскости взаимноперпендикулярны, назовемъ этотъ параболоидъ ортогональнымъ. Любыя шесть его плоскостей опредѣляютъ его полярную гексаприму точекъ. Но если въ числѣ опредѣляющихъ плоскостей есть экстраплоскость, то прима плоскостей соотвѣтствуетъ пространственной параболѣ. Экстраточка этой параболы выражаетъ опредѣленное направленіе, а плоскости, перпендикулярныя къ этому направленію, пересѣкаютъ ортогональный параболоидъ въ тетраприматъ точекъ, и центры всѣхъ этихъ тетраприматъ въ совокупности составляютъ ось (двойную ось симметріи) поверхности.

Если въ какой-нибудь точкѣ пространственной параболы касательная горизонтальна (если примемъ направленіе оси за вертикальное), то она нетолько касательна къ этой кривой, но и къ той тетраприматъ, которая находится въ горизонтальной плоскости, а такихъ горизонтальныхъ касательныхъ вообще должно быть двѣ, такъ какъ конусъ составленный изъ прямыхъ, параллельныхъ этимъ касательнымъ, пересѣкается центральною горизонтальною плоскостью вообще въ двухъ производящихъ.

Имѣя же въ нѣкоторой горизонтальной плоскости три точки ея пересѣченія съ пространственною параболою, а въ одной точкѣ еще касательную къ тетраприматъ, мы легко воспроизведемъ эту тетраприму и найдемъ ея центръ, который долженъ находиться на оси поверхности, найдемъ и тѣ двѣ перпендикулярныя экстраточки, которыя являются общими для ассимптотъ всѣхъ тетраприматъ въ горизонтальныхъ плоскостяхъ, а потому можемъ воспроизвести полностью и всѣ тетраприматы, въ этихъ плоскостяхъ, такъ какъ для ихъ опредѣленія прибавляются двѣ новыя точки (экстраточки), да и центры всѣхъ тетраприматъ извѣстны.

Такимъ образомъ по пяти произвольно даннымъ плоскостямъ мы цѣликомъ воспроизводимъ ортогональный гиперболическій параболоидъ. Слѣдовательно, ортогональный гиперболическій параболоидъ есть пентасекунда плоскостей.

На діаграммѣ коносекундъ (ср. эти Записки IV 368) эта поверхность представлена точкою H (и одновременно цифрою 3').

О пентапримахъ и пентасекундахъ точекъ будетъ изложено въ слѣдующемъ выпускѣ въ статьѣ о главныхъ совокупностяхъ. 7 апрѣля 1914 г.