## VI. Его же. Теорема Паскаля и ея ближайшіе аналоги на плоскости и въ пространствѣ.

Теорема Паскаля лежитъ въ основѣ ученія о конопримахъ, выражая ихъ коренное свойство вполнѣ и однозначно опредѣляться пятью элементами.

Въ современномъ обобщенномъ видѣ она можетъ быть выражена такъ: если шесть элементовъ ABCDEF одной линейной секунды принадлежатъ одной конопримѣ, то, найдя элементы пересѣченія линейныхъ примъ AB съ DE, BC съ EF и CD съ FA, получимъ, что всѣ три принадлежатъ одной линейной примѣ.

Это выраженіе наглядно свидѣтельствуетъ о глубокой органической связи каждаго шестого элемента съ пятью остальными, опредѣляющими коноприму.

Болѣе простымъ аналогомъ этой теоремы могутъ служить извѣстныя теоремы, выражающія коренныя свойства сфероприм и сферосекундъ.

1. Если четыре элемента одной линейной секунды принадлежатъ одной сферопримѣ, то, принявъ одинъ изъ нихъ за центръ сферопримы реципрочнаго преобразованія и произведя его, найдемъ, что всѣ три преобразованные элемента принадлежатъ одной линейной примѣ.

2. Если пять элементовъ одной линейной терціи принадлежатъ одной сферосекундѣ, то, принявъ одинъ изъ нихъ за центръ сферосекунды реципрочнаго преобразованія и произведя его, найдемъ, что всѣ четыре преобразованные элемента принадлежатъ одной линейной секундѣ.

Понятно, что эти двѣ теоремы имѣютъ примѣненіе не ко всѣмъ, а только къ нѣкоторымъ геометрическимъ системамъ [1]), и слѣдовательно не имѣютъ общности теоремы Паскаля.

Но сейчасъ мною выведены двѣ теоремы, изъ коихъ одна выражаетъ то же, что теорема Паскаля, но ея формулировка покоится на совершенно иномъ построеніи, а другая относится къ уже болѣе сложному геометрическому образу—гептасекундѣ.

Словопроизводство показываетъ, что образъ представляетъ секунду элементовъ, вполнѣ и однозначно опредѣляющуюся семью изъ нихъ.

Но чтобы понять смыслъ этихъ теоремъ, необходимо познакомиться съ замѣчательнымъ свойствомъ вещественныхъ трехугольниковъ и четырехгранниковъ устанавливать полярныя отношенія, а именно:

1. Точкамъ сторонъ трехугольниковъ, какъ полюсамъ, полярны прямыя, проходящія чрезъ четвертую гармоническую точку на той же сторонѣ и чрезъ противолежащую вершину трехугольника. Полюсъ произвольной прямой есть общая точка пересѣченія поляръ точекъ, въ которыхъ данная прямая пересѣкаетъ стороны трехугольника.

2. Точкамъ реберъ четырехгранника, какъ полюсамъ, полярны плоскости, проходящія чрезъ поляры этихъ точекъ на обѣихъ его плоскостяхъ, пересѣкающихся въ данномъ ребрѣ. Полюсъ произвольной плоскости есть общая точка пересѣченія полярныхъ плоскостей тѣхъ точекъ, въ коихъ ребра четырехгранника пересѣкаются данною плоскостью.

Точкѣ на одной изъ плоскостей четырехгранника полярна плоскость, проходящая чрезъ поляру этой точки на взятой плоскости и чрезъ противолежащую вершину четырехгранника.

Далѣе мною доказаны еще теоремы:

1) Линейныя примы по отношенію къ трехугольнику полярно преобразуются въ конопримы.

2) Линейныя примы по отношенію къ четырехграннику полярно преобразуются въ гексаримы.

3) Линейныя секунды по отношенію къ четырехграннику полярно преобразуются въ гептасекунды.

Отсюда уже вытекаютъ слѣдующіе аналоги теоремы Паскаля:

1) Если въ линейной секундѣ даны шесть элементовъ одной конопримы то, принявъ три произвольные за элементы трехугольника и преобразовавъ три остальные въ полярныя совокупности, найдемъ, что всѣ три принадлежатъ одной линейной примѣ

2) Если въ линейной терціи даны семь элементовъ одной гексапримы то, принявъ четыре произвольные за элементы четырехгранника и преобразуя три остальныхъ въ полярныя совокупности, найдемъ, что всѣ три принадлежатъ одной линейной примѣ.

---

[1]) Въ томъ числѣ, конечно къ системѣ точекъ и ей родственнымъ, но не къ системѣ плоскостей и т. п.

3) Если въ линейной терціи даны восемь элементовъ одной гептасекунды то, принявъ четыре произвольные за элементы четырехгранника и преобразуя четыре остальныхъ въ полярныя совокупности, найдемъ, что всѣ четыре принадлежатъ одной линейной секундѣ.

Наконецъ, спеціально для гептасекунды выведена еще слѣдующая теорема, которую также легко выразить въ самой общей формѣ, пригодной для всѣхъ геометрическихъ системъ, но ради наглядности здѣсь выраженной для простѣйшаго случая.

Гептасекунда точекъ есть не что иное, какъ однополый гиперболоидъ. Если дано для ея опредѣленія семь точекъ, то принимаемъ любыя три изъ нихъ за центры гомологичныхъ линейныхъ секундъ лучей и плоскостей; сама гомологичность устанавливается четырьмя остальными точками.

Три гомологичныя плоскости этихъ трехъ секундъ пересѣкаются въ точкахъ гептасекунды.

Полное изложеніе предмета появится въ слѣдующемъ выпускѣ этихъ Записокъ.

4 апрѣля 1914 г.