V. Его-же. Полярныя отношенія мнимыхъ трехугольниковъ и четырехгранниковъ.

Извѣстныя свойства гномоническихъ проекцій тригоналоидныхъ кристаловъ [1]) натолкнули меня на присутствіе, показавшихся мнѣ парадоксальными, упомянутыхъ въ заглавіи отношеній.

Если данъ трехугольникъ, какой бы онъ ни былъ, если примемъ точки пересѣченія его реберъ съ экстрапрямою за полюсы прямыхъ, проходящихъ чрезъ центръ тяжести трехугольника и противолежащую вершину, то получимъ: съ одной стороны три поляры пересѣкутся въ одной точкѣ—центрѣ тяжести, съ другой—три полюса находятся на одной экстрапрямой, на которую поэтому и можемъ смотрѣть какъ на поляру центра тяжести.

Это соотношеніе сохраняется при произвольномъ коллинеарномъ преобразованіи, а потому можемъ установить общее отношеніе между полюсами и полярами по отношенію къ трехугольнику, а именно: чтобы найти полюсъ прямой, мы опредѣляемъ точки ея пересѣченія со сторонами трехугольника, на этихъ сторонахъ опредѣляемъ четвертыя гармоническія точки, которыя и соединяемъ прямыми съ противолежащими вершинами, и всѣ три поляры пересѣкаются въ полюсѣ данной прямой.

Неопредѣленность возникаетъ въ вопросѣ о томъ, какія четвертыя гармоническія точки нужно опредѣлить: точки перваго или второго рода; въ первомъ случаѣ каждую пару вершинъ трехугольника мы принимаемъ за пару вещественныхъ, во второмъ случаѣ—за пару мнимыхъ точекъ.

Мы въ этой замѣткѣ ограничимся вторымъ случаемъ какъ болѣе простымъ, а болѣе сложный первый случай требуетъ болѣе обстоятельнаго изложенія, что и появится въ слѣдующемъ выпускѣ этихъ Записокъ; краткое же изложеніе въ слѣдующей замѣткѣ.

Для разсматриваемаго случая теорія полюсовъ и поляръ развертывается въ обычномъ ея видѣ: двѣ точки есть полюсы двухъ поляръ и, въ свою очередь, опредѣляютъ прямую—поляру точки пересѣченія этихъ поляръ. Каждой

[1]) При правильномъ построеніи этихъ проекцій, если даны гномоническіе полюсы граней (100), (010) и (001), образующіе вершины трехугольника, то этимъ самымъ опредѣляется и полюсъ (111) какъ центръ тяжести трехугольника, образуемаго полюсами.

вершинѣ трехугольника полярна противолежащая сторона и т. д. и ни въ одномъ случаѣ нѣтъ точки, чрезъ которую проходила бы ея поляра, какъ это имѣетъ мѣсто для мнимыхъ конопримъ проективности.

Невольно напрашивается вопросъ: есть ли этотъ видъ коррелятивности новый, то есть раньше не предусмотрѣнный, или онъ составляетъ лишь иное выраженіе другого, уже извѣстнаго вида коррелятивности напр. опредѣляемаго мнимою конопримою?

Легко доказать, что дѣйствительно можно найти ту мнимую коноприму, для которой коррелятивность тождественна.

Возьмемъ спеціальный случай правильнаго трехугольника. Непосредственно ясно, что въ этомъ случаѣ точкамъ на прямой, проходящей чрезъ центръ (тяжести) трехугольника и перпендикулярной къ одной изъ его сторонъ, поляры есть прямыя, перпендикулярныя къ этой прямой, то есть параллельныя соотвѣтственной сторонѣ; и это имѣетъ мѣсто по отношенію къ тремъ такимъ примамъ точекъ. Для установленія же коррелятивности достаточно четырехъ такихъ данныхъ.

Но эти данныя какъ разъ тождественны съ тѣми, которыми опредѣляется мнимый кругъ коррелятивностн, а его мы такимъ образомъ и найдемъ.

Этотъ кругъ не будетъ ни описаннымъ, ни вписаннымъ въ трехугольникѣ [1]). Чтобы его опредѣлить, нужно на данныхъ прямыхъ (въ которыхъ инволюція паръ точекъ вполнѣ опредѣлена, потому что кромѣ двухъ паръ полюсовъ на нихъ и перпендикулярныхъ поляръ, мы имѣемъ еще коррелятивность между центромъ трехугольника и экстраточкою на прямой) найти такую точку, чтобы сопряженная съ нею отстояла отъ центра на равномъ разстояніи, и тогда эта пара мнимыхъ двойныхъ точекъ и есть пара концовъ діаметра мнимаго круга.

Отсюда непосредственно легко заключить о томъ, какъ получить мнимую коноприму коррелятивности, замѣняющую данный мнимый трехугольникъ коррелятивности.

Мы подвергнемъ трехугольникъ такимъ сдвигамъ и растяженіямъ, чтобы преобразовать его въ правильный; находимъ тотъ мнимый кругъ, который его замѣняетъ въ качествѣ конопримы коррелятивности, а затѣмъ производимъ обратныя сдвиги и растяженія, чтобы правильный трехугольникъ преобразовать въ данный. Кругъ, такъ преобразованный, даетъ, какъ извѣстно эллипсъ, и онъ то и будетъ искомымъ мнимымъ эллипсомъ коррелятивности.

Но графическія операціи по отношенію къ трехугольнику, конечно, проще и точнѣе, чѣмъ по отношенію къ эллипсу, и потому на практикѣ едва ли цѣлесообразно замѣнять трехугольникъ эллипсомъ. Но если данъ эллипсъ проективности, то конечно для построенія полюсовъ и поляръ предпочтительнѣе замѣнить его трехугольникомъ.

Это мы можемъ сдѣлать слѣдующимъ образомъ.

Для преобразованія даннаго эллипса въ кругъ достаточно принять одну изъ его осей за ось растяженія, а другую ось подвергнуть прямому растяженію. Получивъ кругъ, мы вмѣстѣ съ тѣмъ легко найдемъ одинъ изъ правильныхъ трехугольниковъ, его замѣняющихъ. Если возьмемъ такой, коего вершина находится на растягиваемой оси, то послѣ обратнаго растяженія онъ даетъ равнобедренный трехугольникъ, замѣняющій данный эллипсъ; при этомъ достаточно опредѣлить положеніе этой вершины трехугольника такъ какъ противолежащая сторона опредѣляется уже сохраненіемъ центра тяжести во всѣхъ этихъ операціяхъ.

Но изъ этого мы усматриваемъ, что данный эллипсъ коррелятивности можетъ быть замѣненъ не однимъ, а цѣлою примою трехугольниковъ, это станетъ совершенно очевидно, если послѣ растяженія мы получимъ кругъ, который можетъ быть замѣненъ любымъ изъ примы равныхъ правильныхъ трехугольниковъ.

Чтобы понять значеніе этихъ выводовъ для кристаллографіи, а именно для приложеній въ гномоническихъ проекціяхъ тригоналоидныхъ комплексовъ, достаточно указать на то, что если данъ полюсъ грани $(p_1p_2p_3)$, то поляра его, по отношенію къ трехугольнику, есть гномоническая проекція пояса $[p_1p_2p_3]$. Чтобы построить эту поляру, мы проведемъ пояса напр. $\left|\begin{smallmatrix} p_1p_2p_3 \\ 100 \end{smallmatrix}\right| = [0p_3\overline{p_2}]$ и $\left|\begin{smallmatrix} p_1p_2p_3 \\ 010 \end{smallmatrix}\right| = [\overline{p_3}0p_1]$ и найдемъ полюсы этихъ двухъ прямыхъ по отношенію къ трехугольнику и эти полюсы есть полюсы граней въ поясахъ [100] и [010]. Теперь мы видимъ, что эти полюсы на соотвѣтственныхъ прямыхъ сопряжены съ полюсами пересѣченія проведенныхъ двухъ поясовъ съ этими поясами, и поэтому легко находятся по элементарнымъ правиламъ новой геометріи. Найдя эти два полюса въ приведенныхъ простѣйшихъ поясахъ, мы соединяемъ ихъ прямою, которая и выразитъ гномоническую проекцію пояса $[p_1p_2p_3]$.

Отъ этой теоріи, въ силу глубокой аналогіи, мы безъ труда перейдемъ къ построенію полюсовъ и полярныхъ плоскостей по отношенію къ мнимому четырехграннику. Мы легко докажемъ такимъ образомъ, что эта полярная система тождественна съ системою, для которой поверхность коррелятивности есть мнимый эллипсоидъ, не проходящій чрезъ вершины четырехгранника.

Чтобы найти этотъ эллипсоидъ, мы посредствомъ сдвиговъ и растяженій преобразуемъ четырехгранникъ въ правильный тетраэдръ и опредѣляемъ тотъ мнимый шаръ, который замѣняетъ этотъ тетраэдръ. Обратные сдвиги и растяженія преобразуютъ этотъ шаръ въ искомый эллипсоидъ.

Обратно, если полярная система задана мнимымъ эллипсоидомъ, то легко найти четырехгранники, замѣняющіе этотъ эллипсоидъ. Такихъ сфеноидовъ уже будетъ цѣлая секунда соотвѣтственно секундѣ правильныхъ тетраэдровъ, замѣняющихъ шаръ.

Здѣсь мы имѣемъ какъ бы на одну ступень повышенную кристаллографію. Если вершинамъ четырехгранника мы придадимъ соотвѣтственно вѣса p_1, p_2 p_3, p_4, то символъ $(p_1p_2p_3p_4)$ выразитъ центръ тяжести этихъ четырехъ вѣсовъ. Если для точки $(p_1p_2p_3p_4)$ по отношенію къ четырехграннику мы найдемъ полярную плоскость, то она выразится символомъ $[p_1p_2p_3p_4]$ то есть если въ этой плоскости находится точка $(q_1q_2q_3q_4)$, то сумма $p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 + p_4q_4 = 0$.

Какъ предыдущая теорія прилагается къ научной кристаллографіи, такъ эта расширенная теорія получаетъ примѣненіе къ научной (конечно не къ эмпирической) петрографіи, а именно химическому тетраэдру.

[1]) Для кристалловъ кубической сингоніи въ тригоналоидной установкѣ этотъ кругъ есть кругъ стереографической сѣтки, пересѣкаемый сторонами трехугольника послѣдовательно (и точно) черезъ 90° и 30°.

Наконецъ мы можемъ примѣнить первую часть теоріи ко всѣмъ системамъ II ступени, въ томъ числѣ и къ обѣимъ сферическимъ системамъ точекъ. Къ той изъ нихъ которая характеризуется особымъ параметромъ въ видѣ постоянной (для всѣхъ линейныхъ примъ) точки, всѣ вообще теоремы и построенія переносятся непосредственно, какъ къ системѣ (полу-) родственной. Но такъ какъ всѣ выведенныя теоремы и построенія есть позиціонныя, то для переноса не нужно и родственности.

Въ виду того, что въ обѣихъ сферическихъ системахъ тремъ точкамъ соотвѣтствуютъ (перспективны) три луча линейной секунды исходящіе изъ ея центра, то переносимую теорему мы можемъ выразить такъ:

Въ линейной секундѣ лучей (плоскостей) три мнимыхъ луча составятъ мнимый трехугольникъ, который устанавливаетъ коррелятивность между лучами и плоскостями этой секунды. Эта коррелятивность тождественна съ тою, которая устанавливается нѣкоторымъ опредѣленнымъ мнимымъ квадратичнымъ конусомъ; та же коррелятивность можетъ быть выражена цѣлою примою такихъ трехугольниковъ системы (то есть образовъ, состоящихъ изъ трехъ лучей).

Если же даны три произвольные луча, то изъ нихъ во всякомъ случаѣ однозначно выводится конусъ, который впрочемъ этихъ лучей въ себѣ не содержитъ. Въ частности, если эти три луча образуютъ правильный трехугольникъ системы (имѣется тройная ось симметріи), то замѣняющій его квадратичный есть конусъ вращенія.

1 апрѣля 1914 г.