IV. Его-же. Элементарный выводъ формулы для опредѣленія плотности граней и реберъ гипогексагонально-изотропнаго комплекса.

Хотя бы изъ предъидущей замѣтки можно видѣть, какое значеніе при первоначальномъ изученіи кристаллографіи имѣетъ выводъ спеціальныхъ простѣйшихъ формулъ для опредѣленія плотности изотропныхъ комплексовъ, кубическаго и гипогексагональнаго. Начинающіе лучше и легче всего знакомятся съ техникой опредѣленія плотностей по таблицамъ именно на примѣрахъ изотропныхъ комплексовъ, такъ какъ простыя формулы даютъ идеальный контроль сдѣланнымъ опредѣленіямъ и сразу же практически знакомятъ ихъ съ степенью точности или скорѣе неточности графическихъ операцій.

Кромѣ того, для изотр пныхъ комплексовъ, по существу, дѣла одна и та же формула служитъ какъ для опредѣленія плотности граней, такъ и для опредѣленія плотности реберъ, такъ какъ именно въ такихъ комплексахъ плотности граней и реберъ, взаимно-перпендикулярныхъ

и значитъ выражающихся одними и тѣми же индексами символа, равны. Поэтому при выводѣ достаточно ограничиться однимъ изъ этихъ образовъ, а выводъ плотностей реберъ отличается особенною простотою.

Для комплексовъ кубическаго типа формула выводится непосредственно, такъ какъ она основывается на элементарной теоремѣ о трехъ перпендикулярахъ и сложеніи трехъ векторовъ по тремъ взаимно-перпендикулярнымъ осямъ. Эти комплексы выражаются символомъ 54°44.

Если символъ даннаго ребра есть $[r_1\ r_2\ r_3]$, то ясно, что квадратъ длины равнодѣйствующаго вектора $V^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$, а это и есть величина, обратно пропорціональная квадрату плотности.

Для гипогексагональнаго типа изотропный комплексъ выражается символомъ 49°6 ($tang^2 = 1/3$). Четыре кристаллографическія оси выражаются послѣдовательно символами: $\bar{1}$) [1000], 2) [02$\bar{1}\bar{1}$], 3) [0121], 4) [0$\bar{1}\bar{1}$2].

Индексы символа какой-нибудь грани $(p_0\ p_1\ p_2\ p_3)$ этого комплекса есть величины, обратныя отрѣзкамъ, производимымъ этою гранью на четырехъ осяхъ, причемъ единицы длины всѣхъ четырехъ осей одинаковы. Символъ ребра $[r_0\ r_1\ r_2\ r_3]$ выражаетъ векторъ, равнодѣйствующій четыремъ слагающимъ векторамъ по тѣмъ же осямъ, но единица длины по главной оси не равна единицамъ длины по тремъ горизонтальнымъ осямъ, но выражается по отношенію къ нимъ числомъ $3/2$ [1]).

Въ обоихъ случаяхъ три послѣдніе индекса не независимы другъ отъ друга, но всегда $r_2 = r_1 + r_3$.

Зная это, мы легко опредѣлимъ длину всякаго вектора, заданнаго символомъ, а эта длина и есть величина, обратная плотности по направленію этого вектора, который въ данномъ случаѣ составляетъ возможное кристаллическое ребро.

Теперь видимъ, какъ просто выводится требующаяся формула, первоначально выведенная гораздо болѣе сложнымъ путемъ [1]).

Сначала разложимъ три горизонтальныя вектора r_1, r_2, r_3, на слагающіе по направленію оси [010$\bar{1}$] и перпендикулярными къ нему [0121].

Получаемъ соотвѣтственно изъ	r_1	r_2	r_3
по сси [010$\bar{1}$]	$r_1 \cos 30°$	0	$-r_3 \cos 30°$
по оси [0121]	$r_1 \sin 30°$	r_2	$r_3 \sin 30°$

Соотвѣтственныя суммы $\cos 30° (r_1 - r_3)$ и

$$r_2 + \sin 30° (r_1 + r_3)$$

Векторъ по главной оси $\frac{3}{2} r_0$.

Разложивъ такимъ образомъ на три слагающіе вектора по тремъ взаимно-перпендикулярнымъ осямъ, принявъ во вниманіе равенство $r_2 = r_1 + r_3$ то есть $r_3 = r_2 - r_1$ и примѣнивъ теорему о трехъ перпендикулярахъ, найдемъ.

$$V^2 = \frac{9}{4} r_0^2 + (2r_1 - r_2)^2 \cos^2 30° + r_2^2 (1 + \sin 30°)^2.$$

Принявъ во вниманіе, что $\cos^2 30° = 3/4$, а $\sin 30° = 1/2$, найдемъ

$$V^2 = 9/4\ r_0^2 + 3/4\ (4r_1^2 - 4r_1 r_2 + r_2^2) + 9/4\ r_2^2$$

$$\text{или } \frac{V^2}{3} = 3/4\ r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 - r_1 r_2,$$

что и требовалось вывести.

22 февраля 1914 г.

---

[1]) Ср. Построеніе реберъ по символамъ въ кристаллахъ гипогексагональнаго типа—эти Записки IV, 321.

[1]) Theorie der Kristallstructur II Theil. Zeitschr. f. Kristallogr. **36** 219.