12. Коллинеарныя системы въ положеніи перспективномъ, но не инволюціи.

Е. С. Федорова.

(Доложено 28 мая 1907 года).

Съ 3 фигурами.

Сущность задачи видна изъ заглавія.

Если имѣемъ коллинеацію двухъ системъ въ обычномъ смыслѣ слова, то мы должны признать обѣ системы равными, потому что обѣ находятся въ положеніи инволюціи, и какой угодно точкѣ a системы коллинеарна одна и та же точка a' коллинеарной системы, независимо отъ того, къ какой изъ данныхъ двухъ системъ принадлежитъ данная точка.

Но теперь замѣнимъ одну изъ системъ системою ей подобною, и примемъ за центръ подобія R совмѣщенные центры коллинеаціи обѣихъ системъ. Ясно, что при этомъ условіи системы уже не могутъ быть приведены въ положеніе инволюціи, и потому построеніе гомологичныхъ (коллинеарныхъ) точекъ усложняется, и во всякомъ случаѣ для каждой данной точки совокупности мы получимъ двѣ различныя гомологичныя точки, смотря по тому, къ какой изъ системъ относится данная точка [1]).

Все-таки сохранится совмѣщеніе всѣхъ гомологичныхъ лучей, проходящихъ чрезъ точку R, и сама послѣдняя точка, по условію, будетъ самоколлинеарна. Такъ какъ при преобразованіи подобія сохраняется параллельность гомологичныхъ прямыхъ и плоскости, то и въ этомъ случаѣ прямой будетъ гомологична прямая, параллельная гомологичной прямой въ обычной коллинеаціи; также и каждой плоскости. Отсюда слѣдуетъ, что для полученія направленія прямой, коллинеарной съ данною, мы можемъ сохранить обычное построеніе, то есть точку пересѣченія прямой съ плоскостью инволюціи соединить съ центромъ R: полученная прямая дастъ искомое направленіе.

Но плоскость перспективы уже потеряетъ свое свойство самоколлинеарности находящихся въ ней точекъ, потому что послѣднія вслѣдствіе преобразованія подобія перемѣнятъ свое положеніе, хотя и останутся на томъ же центральномъ лучѣ, а именно ихъ разстояніе отъ центра R измѣнится въ отношеніи подобія. Означимъ это отношеніе чрезъ k.

Тѣмъ не менѣе явится новая плоскость, параллельная прежней плоскости перспективы, обладающая ея свойствами, хотя конечно ея разстояніе отъ центра перспективы будетъ уже не вдвое большее, чѣмъ разстояніе плоскости инволюціи, а иное, а именно увеличится въ отношеніи $(k+1)$.

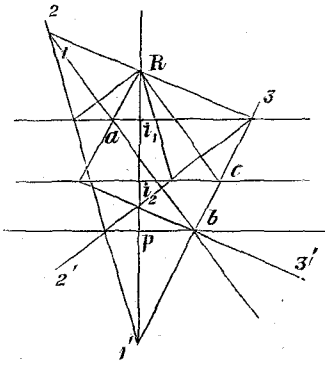
Въ самомъ дѣлѣ, если на какомъ-нибудь лучѣ разстояніе отъ R до точки первоначальной плоскости перспективы означимъ чрезъ l, и возьмемъ на лучѣ точку на разстояніи $\frac{l}{2}k$ отъ плоскости инволюціи, то вслѣдствіе коллинеарнаго преобразованія эта точка замѣнится точкою на разстояніи $\frac{l}{2k}$, а послѣ преобразованія подобія считая уже разстояніе отъ центра R подобія точкою на разстояніи $\left(\frac{l}{2}+\frac{l}{2k}\right)k = \frac{l}{2}(k+1)$, то есть окончательно совпадетъ съ первоначально данною точкою, а потому такія точки станутъ самоколлинеарными и значитъ будутъ находиться на плоскости перспективы.

Такимъ образомъ мы получаемъ снова совпаденіе

---

[1]) Случай неравныхъ коллинеарныхъ системъ, требующихъ для приведенія въ положеніе инволюціи преобразованія подобія, предусмотрѣнъ, но не разобранъ въ руководствѣ „Новая Геометрія какъ основа черченія“ II 31.

въ системахъ какъ центра, такъ и плоскости коллинеаціи, которое мы и можемъ разсматривать какъ центръ и плоскость перспективы; но такъ какъ обѣ системы не находятся въ положеніи инволюціи, то плоскость инволюціи для каждой системы будетъ особая, что мы сейчасъ и выяснимъ.



Фиг. 1.

На фигурѣ 1 кромѣ центра R перспективы проведены три параллельныя прямыя, какъ слѣды трехъ параллельныхъ плоскостей, изъ коихъ одна, отмѣченная буквой p, есть слѣдъ плоскости перспективы, а двѣ другія, отмѣченныя буквами, i_1 и i_2, слѣды плоскостей инволюціи.

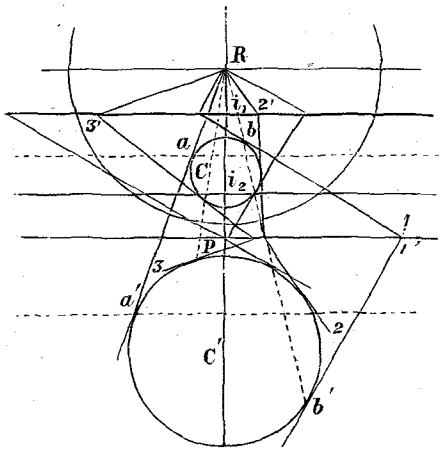
Проведемъ прямую 1 произвольнаго положенія (но въ плоскости чертежа). Гомологичная съ нею прямая, все равно, къ какой изъ двухъ системъ отнесена данная, пройдетъ чрезъ точку b пересѣченія этой прямой со слѣдомъ плоскости перспективы. Если прямая отнесена къ первой системѣ, которой принадлежитъ плоскость инволюціи i_1, то точку пересѣченія a соединимъ съ R, а изъ выше упомянутой точки b проведемъ параллельную прямую $1'$, которая и будетъ преобразованная изъ 1 искомая прямая.

Также изъ прямыхъ 2 и 3, отнесенныхъ къ той же первой системѣ, получимъ коллинеарныя прямыя $2'$ и $3'$. За прямую 3 избрана та же прямая, что и $1'$; другими словами, одну и ту же прямую мы приняли за прямую первой системы и получили коллинеарную прямую $3'$. Если теперь примемъ ту же прямую за принадлежащую второй системѣ, то должны соединить съ R точку ея пересѣченія съ i_2 и черезъ точку пересѣченія съ p провести параллельную прямую, которая и должна быть конечно прямою 1, потому что именно изъ этой прямой мы получили прямую $1'$, какъ принадлежащую второй системѣ.

Итакъ находимъ параллелограмъ $Rabc$, такъ какъ Ra параллельна bc ($1'$) и Rc параллельна ab (1) значитъ $Ra = bc$ и $Rc = ab$; отсюда же заключаемъ, что разстояніе плоскости инволюціи i_1 отъ центра R равно разстоянію плоскости инволюціи i_2 отъ плоскости p.

Этимъ опредѣлено построеніе всѣхъ существенныхъ элементовъ коллинеаціи, а вмѣстѣ съ тѣмъ и нахожденіе коллинеарныхъ точекъ, прямыхъ, плоскостей и всякихъ фигуръ вообще.

Извѣстно, что кругу и шару коллинеарны вообще кривыя и поверхности второго порядка. Но въ *обычной коллинеаціи* имѣются прима круговъ и шаровъ самоколлинеарныхъ; централью ихъ служитъ, какъ извѣстно (Новая Геометрія, главы II29,IV26), средняя ось перспективы.



Фиг. 2.

Пусть C (фиг. 2) одинъ изъ такихъ шаровъ; это означаетъ, что касательныя къ нему, проведенныя изъ точки R, пересѣкутся съ первоначальною плоскостью перспективы (отмѣченною пунктиромъ) въ точкахъ касанія.

Вслѣдствіе самоколлинеарности этого шара послѣ преобразованія онъ останется неизмѣннымъ, причемъ точки его, вообще, попарно преобразуются другъ въ друга, и только точки касанія преобразуются сами въ себя (именно какъ точки плоскости перспективы).

Воспроизведя еще преобразованіе подобія, получимъ другой, подобный ему шаръ, причемъ, по условію, центромъ (прямого) подобія будетъ точка R, а отношеніе подобія данное отношеніе k. Этотъ шаръ C' будетъ, конечно, вписанъ въ томъ же конусѣ (съ центромъ R), что и шаръ C, а гомологичныя точки обоихъ шаровъ есть точки обратныя (Н. Г. глава II п. 25). Но таковыя точки получаются преобразованіемъ шара обратными радіусами. Поэтому нетрудно найти шаръ, имѣющій

центръ R, принадлежащій той же, съ шарами C и C', линейной примѣ, который служитъ шаромъ этого преобразованія; оно и является равнодѣйствующимъ двухъ только-что упомянутыхъ преобразованій.

Итакъ въ коллинеаціи подобныхъ системъ существуетъ особый шаръ, имѣющій центромъ тотъ же центръ R перспективы, который служитъ шаромъ преобразованія обратными радіусами цѣлой примы шаровъ, и въ этой примѣ каждые два гомолочичные шара преобразуются другъ въ друга и операціей коллинеаціи. Въ частности, плоскость перспективы преобразуется сама въ себя, и потому представляетъ двойной шаръ этой инволюціи. Она и есть радикальная плоскость примы, потому что она находится посреди первоначальной плоскости перспективы и той, которая изъ нея выводится преобразованіемъ подобія (обѣ эти плоскости показаны пунктиромъ), и значитъ проходитъ чрезъ средину отрѣзка aa между точками касанія на общей касательной.

Само собою понятно, что если оба шара преобразуются другъ въ друга коллинеаціей, то это же имѣетъ мѣсто и по отношенію къ касательнымъ къ нимъ плоскостямъ напр. 1, 2, 3, которыя преобразуются въ 1′, 2′, 3′ (совпадаетъ съ 3 какъ общая касательная).

Переходя къ разсмотрѣнію вопроса, въ какихъ случаяхъ имѣетъ мѣсто эта коллинеація, отмѣтимъ, что напр. она имѣетъ мѣсто тогда, когда въ пространствѣ даны четыре произвольныя точки и еще шаръ R преобразованія обратными радіусами.

Въ этомъ случаѣ по четыремъ точкамъ построимъ шаръ, а преобразованіемъ получимъ гомологичный ему другой шаръ, и всѣ гомологичныя точки этихъ шаровъ есть точки обратныя. Такимъ образомъ установится гомологичность между двумя пространствами; въ самомъ дѣлѣ, произвольной точкѣ одного пространства коррелятивна по отношенію къ принадлежащему ему шару полярная плоскость, которая пересѣчетъ шаръ (если дана точка внѣ шара въ кругѣ; этому кругу гомологиченъ опредѣленный кругъ, и вмѣстѣ съ нимъ плоскость, другого шара, а полюсъ плоскости этого круга и есть искомая гомологичная точка другого пространства. Такъ какъ въ этой гомологичности прямымъ проективны прямыя и плоскостямъ плоскости, то она такимъ образомъ представляетъ особый видъ коллинеарности двухъ системъ, не могущихъ быть приведенными въ положеніе инволюціи, но приводящихся въ своеобразное перспективное положеніе.

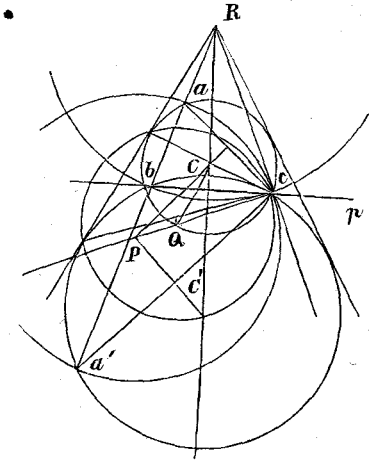
Этотъ случай встрѣчается при разсмотрѣніи основныхъ вопросовъ геометріи шаровъ, что и послужило поводомъ къ составленію настоящей замѣтки.

Въ виду этого приложенія и разсмотримъ подробное соотношеніе между коллинеаціей и шаромъ R преобразованія.

Если коллинеація обусловлена постояннымъ отношеніемъ подобія, то ясно, что шаровъ C имѣется цѣлая прима (имѣющая плоскость инволюціи i_1 радикальною плоскостью), а шаровъ C' подобная ей прима; обѣ примы не совпадаютъ, а потому шаръ R служитъ шаромъ преобразованія лишь для одной пары шаровъ; съ перемѣною пары перемѣняется и шаръ R, и, въ частности, плоскости i_1, при постоянной радикальной плоскости p, получаемъ приму параллельныхъ плоскостей, а тогда и шаръ C', и шаръ R станутъ безконечно-удаленными плоскостями.

Но для приложеній важнѣе случай съ постояннымъ шаромъ R и перемѣннымъ отношеніемъ подобія, а слѣдовательно и перемѣннымъ положеніемъ плоскостей перспективы и инволюціи. Для этого случая должна быть установлена однозначная зависимость между шарами R, C и плоскостью перспективы p, что и получается непосредственно, такъ какъ p есть радикальная плоскость примы RC.

Если же данными являются радикальная плоскость p и шаръ R, то искомымъ шаромъ C является шаръ пересѣченія примы, имѣющей центръ R и среднюю точку p своими точечными шарами и другой примы, а именно RC. Хотя рѣшеніе этой задачи и представляетъ затрудненія, но оно во всякомъ случаѣ однозначно.



Фиг. 3

При меньшемъ послѣдующемъ растяженіи системы шары C и C' не разойдутся настолько, чтобы не имѣть общихъ точекъ то есть пересѣкутся въ нѣкоторомъ кругѣ bc (фиг. 3).

Проведемъ изъ центра R плоскость, касательную къ кругу въ точкѣ c и возставимъ къ ней перпендикуляръ cP.

Разсматривая шаръ R какъ ортогональный шаръ терціи, найдемъ, что каждая центральная плоскость есть шаръ этой терціи безконечно-большого діаметра то есть радикальная плоскость нѣкоторой примы шаровъ, входящей въ составъ терціи. Въ составѣ этой же терціи находится и точка c ортогональнаго шара какъ точечный шаръ терціи.

Составивъ приму изъ этого точечнаго шара и проведенной касательной плоскости какъ радикальной, найдемъ приму шаровъ, имѣющихъ общую точку касанія c.

Пусть P одинъ изъ этихъ шаровъ. Если проведемъ чрезъ одну изъ точекъ a пересѣченія этого шара съ шаромъ C лучъ изъ центра R, то гомологичная точка a' на томъ же лучѣ будетъ находиться также на кругѣ пересѣченія шаровъ P и C'; на первомъ, потому что шаръ принадлежитъ терціи, имѣющій ортогональный шаръ R; на второмъ по условіямъ построенія. Это относится, слѣдовательно, ко всѣмъ точкамъ упомянутыхъ двухъ круговъ пересѣченія.

Такъ какъ $Ra.\ Ra' = Rc^2$ или $Ra : Rc = Rc : Ra'$, то значитъ трехугольники acR и $ca'R$ подобны, а потому равны соотвѣтственные углы напр. acR и $ca'R$, что, впрочемъ, непосредственно вытекаетъ и изъ построенія, такъ какъ Rc есть касательная къ шару P.

Отсюда видимъ, что, имѣя три точки R,a и c, легко найдемъ и точку a'.

На фигурѣ проведенъ еще другой шаръ Q той же примы, проходящій чрезъ двѣ гомологичныя точки касанія шаровъ C и C'.