11. Этюды по геометріи шаровъ.

Сфероколлинеація; реципрочныя преобразованія; мегасферы векторіальныхъ и обыкновенныхъ шаровъ. Мегасферы параллельныхъ векторовъ. Полярныя отношенія мегасферъ.

Е. С. Федорова.

(Доложено 28 мая 1907 года).

I. Система шаровъ векторіальныхъ.

Въ руководствѣ „Новая Геометрія какъ основа черченія“ мнѣ пришлось отмѣтить и устранить несовершенство въ самыхъ основахъ существующей нынѣ Геометріи круговъ и шаровъ. Пришлось указать, что нужно различать круги и шары обыкновенныя (вещественные и мнимые), и круги и шары векторіальные. Замѣчательно, что въ существующей нынѣ Геометріи шаровъ [1]) разработаны два отдѣла, изъ которыхъ одинъ—линейныхъ совокупностей—относится къ геометріи шаровъ обыкновенныхъ, а другой—совокупностей квадратичныхъ (спеціально цикловъ и сферъ шаровъ)—относится къ геометріи шаровъ векторіальныхъ.

Въ упомянутомъ руководствѣ вводится заново геометрія шаровъ (и круговъ) векторіальныхъ, но конечно въ такомъ элементарномъ изложеніи, какое только можетъ соотвѣтствовать цѣли самой книги, то есть даются только общія основы этихъ геометрій (также какъ и геометріи параллельныхъ векторовъ).

Отчасти пробѣлъ этотъ заполняется статьею „Точное изображеніе точекъ пространства на плоскости“. Но и въ этой статьѣ, въ виду ясно поставленной и ограниченной задачи, заполненіе пробѣла весьма неполное.

Въ результатѣ все-таки остается гораздо болѣе полное и систематическое изложеніе въ существующей литературѣ линейныхъ совокупностей шаровъ обыкновенныхъ и квадратичныхъ совокупностей шаровъ векторіальныхъ. Поэтому я теперь, стремясь хотя отчасти заполнить этотъ пробѣлъ, имѣю въ виду привести дополнительныя теоремы по линейнымъ совокупностямъ геометріи шаровъ векторіальныхъ и квадратичнымъ совокупностямъ шаровъ обыкновенныхъ.

Начну, конечно, съ первыхъ.

Подъ выраженіемъ „система *векторіальныхъ* шаровъ“ подразумѣвается всякая совокупность такихъ шаровъ, на концахъ параллельныхъ діаметровъ которыхъ подразумѣваются два противоположные полюса—положительный и отрицательный; и если мы условимся называть положительными шары съ однимъ опредѣленнымъ положеніемъ полюсовъ, то шары съ противоположнымъ положеніемъ полюсовъ мы должны считать отрицательными.

Въ частности, векторіальные круги можемъ отличать на плоскости какъ положительные или отрицательные по тому же признаку, или же просто по направленію окружности, которое мы можемъ отмѣчать стрѣлкою (согласное съ движеніемъ стрѣлки часовъ или обратное).

Введя это опредѣленіе, мы уже не имѣемъ двухъ центровъ подобія для двухъ шаровъ или круговъ (прямого и обратного), а только одинъ единственный и строго однозначно опредѣляемый *центръ подобія* вообще.

Линейная прима то есть совокупность, однозначно опредѣляемая двумя данными шарами или кругами, обусловливается расположеніемъ центровъ на прямой и постояннымъ отношеніемъ между радіусомъ даннаго шара или круга и разстояніемъ ихъ центра отъ центра подобія.

Такихъ примъ существуетъ два различныхъ разряда, смотря потому, будетъ ли это характеристичное

*) Наиболѣе полно и систематично изложенной въ сочиненіи Reye „Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme“, Leipzig 1879. Упомянутое положеніе дѣла вытекло съ одной стороны изъ необходимости для рѣшенія задачъ вывести свойства столь важныхъ совокупностей, какъ линейныя, а съ другой — изъ за поставленной исторіей геометріи задачи найти шары, касательныя къ четыремъ даннымъ.

отношеніе меньше или больше единицы. Въ примѣ переходнаго разряда, то есть въ томъ частномъ случаѣ, когда это отношеніе равно единицѣ, всѣ шары и круги примы проходятъ чрезъ центръ подобія, какъ единственную общую точку. Такая совокупность есть также и частный переходный случай между двумя разрядами шаровъ и круговъ обыкновенныхъ (не векторіальныхъ).

Линейная секунда векторіальныхъ шаровъ и круговъ однозначно опредѣляется тремя данными, или, что все равно—одною линейною примою и еще однимъ элементомъ, не принадлежащимъ этой примѣ. Этимъ элементомъ и каждымъ элементомъ примы однозначно опредѣляется, въ свою очередь, линейная прима; и вотъ совокупность такихъ линейныхъ примъ и составляетъ линейную секунду.

Характеристикой линейной секунды является: 1) плоскость центровъ всѣхъ шаровъ и круговъ, 2) присутствіе *оси подобія* на этой плоскости, и 3) постоянное отношеніе радіусовъ шаровъ и круговъ къ разстоянію ихъ центровъ отъ оси подобія.

Ось подобія есть прямая, представляющая геометрическое мѣсто *точечныхъ* шаровъ и круговъ, раздѣляющее положительные шары и круги секунды отъ отрицательныхъ. По отношенію къ каждой изъ этихъ половинныхъ системъ ось подобія есть ось прямого подобія, а по отношенію къ шарамъ разныхъ половинъ она есть ось обратнаго подобія, также какъ каждая ея точка играетъ ту же роль по отношенію къ линейнымъ примамъ круговъ и шаровъ, входящихъ въ составъ этой линейной секунды.

Линейная терція векторіальныхъ шаровъ однозначно опредѣляется четырьмя данными, или, что все равно—одною линейною секундою и еще однимъ элементомъ, не принадлежащимъ секундѣ. Этимъ элементомъ и каждою линейною примою, принадлежащею секундѣ опредѣляется, въ свою очередь, линейная секунда; и вотъ совокупность такихъ линейныхъ секундъ и составляетъ линейную терцію.

Характеристикой линейной терціи является: 1) *плоскость подобія* и 2) постоянное отношеніе радіусовъ шаровъ и круговъ къ разстоянію ихъ центровъ отъ этой плоскости.

Плоскость подобія есть геометрическое мѣсто *точечныхъ* шаровъ, раздѣляющее положительные шары отъ отрицательныхъ. Они же есть геометрическое мѣсто осей подобія всѣхъ линейныхъ секундъ и центровъ подобія всѣхъ линейныхъ примъ, входящихъ въ составъ данной линейной терціи.

Само собою разумѣется, что и между линейными терціями мы различаемъ два главные разряда, смотря потому, будетъ ли характеристичное отношеніе больше или меньше единицы. Промежуточною линейною терціею является терція всѣхъ шаровъ, касательныхъ къ плоскости подобія, также какъ промежуточная линейная секунда состоитъ изъ совокупности шаровъ, касательныхъ къ оси подобія и имѣющихъ центры на одной *центральной* плоскости секунды, а промежуточная линейная прима состоитъ изъ совокупности шаровъ, касательныхъ въ одной общей точкѣ и имѣющихъ центры на одной прямой, *централи* примы.

Въ линейныхъ терціяхъ вся система векторіальныхъ шаровъ распредѣляется на секунды равныхъ шаровъ, центральныя плоскости которыхъ параллельны плоскости подобія, а радіусы шаровъ прямо пропорціональны разстоянію центральныхъ плоскостей отъ той же плоскости подобія.

Въ частности, въ терціяхъ перваго разряда мы можемъ взять на плоскости подобія произвольную прямую и провести чрезъ нее подъ равными къ ней углами двѣ такія плоскости, которыя будутъ огибающими всѣхъ шаровъ нѣкоторой линейной секунды, входящей въ составъ данной терціи, а избранная прямая будетъ осью подобія этой секунды. Ни одинъ шаръ терціи (кромѣ точечныхъ), не имѣетъ съ плоскостью подобія общихъ точекъ.

Въ терціяхъ второго разряда, какъ легко видѣть, всѣ шары терціи (кромѣ точечныхъ) пересѣкаютъ плоскость подобія, и притомъ пересѣкаютъ ее подъ равными углами, почему эта плоскость становится *изогональною*. Въ частности, они пересѣкаютъ подъ равнымъ угломъ всякую прямую въ этой плоскости, которая проходитъ чрезъ центръ малаго круга пересѣченія.

Если въ какой-либо терціи, перваго или второго разряда, проведенъ къ плоскости подобія перпендикуляръ, который примемъ за централь примы, то совокупность параллельныхъ плоскости подобія радіусовъ шаровъ этой примы опредѣлитъ поверхность *характеристичнаго* кругового конуса, уголъ растворенія котораго есть уголъ *характеристичный*, а тангенсъ этого угла равенъ характеристичному отношенію. Для терцій перваго разряда этотъ уголъ меньше, чѣмъ уголъ растворенія конуса, огибающаго шары той же примы.

Въ линейныхъ секундахъ вся система векторіальныхъ шаровъ, распредѣляется на примы равныхъ шаровъ, централи которыхъ параллельны оси подобія (и конечно находятся въ центральной плоскости секундъ), а ихъ радіусы прямо пропорціональны разстоянію ихъ центровъ отъ оси подобія.

Въ частности, въ секундахъ перваго разряда

мы можемъ взять въ центральной плоскости произвольную прямую и принять ее за централь примы. Это будетъ прима линейная, и ея центръ подобія есть точка (точечный шаръ примы) пересѣченія централи съ осью подобія секунды, такъ какъ радіусы ея шаровъ прямо пропорціональны разстоянію ихъ центровъ отъ этого центра примы; такъ какъ всѣ шары секунды касательны къ двумъ плоскостямъ, проходящимъ чрезъ ось подобія и образующимъ съ центральною плоскостью равные углы, то и всѣ шары примы касательны къ тѣмъ же двумъ плоскостямъ. Конечно, ни одинъ шаръ секунды (кромѣ точечныхъ) не имѣетъ съ осью подобія общихъ точекъ.

Въ секундахъ второго разряда всѣ ихъ шары пересѣкаютъ ось подобія и притомъ пересѣкаютъ подъ однимъ и тѣмъ же угломъ. Понятно, что подъ тѣмъ же угломъ эти шары пересѣкаютъ и плоскость, перпендикулярную къ центральной плоскости и проходящую чрезъ ось подобія; эта плоскость и есть изогональная плоскость секунды. На центральной плоскости мы можемъ взять произвольную прямую и принять ее за централь примы, и пересѣченіе ея съ осью подобія есть центръ подобія примы. Всѣ шары этой примы пересѣкаютъ плоскость, перпендикулярную къ централи и проходящую чрезъ центръ подобія подъ однимъ и тѣмъ же угломъ. Централь примы есть ея ось вращенія, а упомянутая перпендикулярная плоскость—плоскость симметріи примы (если не принимать во вниманіе полярности шаровъ).

Вообще въ линейныхъ примахъ централь есть ось вращенія, а плоскость, перпендикулярная къ централи и проходящая чрезъ центръ подобія, есть плоскость симметріи примы. Поэтому, въ частности, въ примахъ перваго разряда совокупность шаровъ огибается поверхностью кругового конуса, коего ось есть централь примы.

Какъ мы можемъ переходить отъ линейныхъ совокупностей низшихъ ступеней къ линейнымъ совокупностямъ высшихъ ступеней, послѣдовательно прибавляя къ совокупности низшей ступени одинъ векторіальный шаръ, не входящій въ составъ этой совокупности и выводя затѣмъ изъ него и шаровъ совокупности совокупность линейныхъ примъ, такъ мы можемъ отъ совокупностей высшей ступени переходить послѣдовательно къ совокупностямъ низшей ступени путемъ пересѣченія.

Если къ линейной терціи A прибавлена еще терція B, то имѣется и совокупность шаровъ, общихъ обѣимъ даннымъ, и эта совокупность есть линейная секунда, а ея ось подобія есть прямая пересѣченія плоскостей подобія совокупностей A и B. Прежде всего ясно, что эта прямая пересѣченія есть линейная прима точечныхъ шаровъ то есть однихъ и тѣхъ же шаровъ, принадлежащихъ какъ той, такъ и другой терціи.

Въ каждой изъ терцій имѣются шары всѣхъ постепенно увеличивающихся радіусовъ, прямо пропорціональныхъ разстоянію центровъ этихъ шаровъ отъ плоскости подобія. Слѣдовательно, всегда можемъ и въ той, и въ другой терціи выбрать по совокупности равныхъ шаровъ, центры которыхъ составятъ плоскости, параллельныя соотвѣтствующимъ плоскостямъ подобія. Двѣ такія плоскости пересѣкутся въ прямой, параллельной прямой пересѣченія плоскостей подобія; какъ послѣдняя есть прима точечныхъ шаровъ, такъ первая есть геометрическое мѣсто центровъ равныхъ шаровъ, одинаково принадлежащихъ какъ той, такъ и другой терціи; она и есть централь примы (равныхъ шаровъ), принадлежащей совокупности пересѣченія обѣихъ терцій.

Но достаточно кромѣ примы имѣть еще хоть одинъ шаръ, ей не принадлежащій, чтобы вывести линейную секунду; за таковую мы можемъ принять хотя бы приму точечныхъ шаровъ, которые этимъ самымъ получитъ значеніе оси подобія секунды, и еще одинъ шаръ послѣдней примы. По самому опредѣленію терцій вся полученная секунда шаровъ будетъ общею какъ для одной, такъ и для другой терціи; и никакихъ другихъ шаровъ, общихъ обѣимъ терціямъ быть не можетъ, такъ какъ всякій шаръ, не входящій въ составъ секунды пересѣченія, однозначно опредѣляетъ линейную терцію, а слѣдовательно, если бы былъ еще хоть одинъ общій шаръ въ обѣихъ терціяхъ, то сами терціи были бы тождественными, и всѣ ихъ шары общими.

Также легко доказать, что три линейныя терціи A, B и C пересѣкаются въ линейной примѣ. Центръ этой примы есть точка пересѣченія трехъ плоскостей подобія, а централь примы есть прямая пересѣченія двухъ центральныхъ плоскостей секундъ BC и CA, и конечно она же принадлежитъ и центральной плоскости секунды AB.

Отсюда слѣдуетъ, что пересѣченіе произвольной секунды AB съ произвольною терціей C есть линейная прима. Двѣ произвольныя линейныя секунды AB и CD вообще въ одной примѣ не пересѣкаются, а только въ томъ случаѣ, если обѣ секунды AB и CD входятъ въ составъ одной и той же терціи. Это имѣетъ мѣсто въ геометріи точекъ, гдѣ двѣ произвольныя плоскости (линейныя секунды) во всякомъ случаѣ входятъ въ составъ одной и той же терціи то есть обыкновеннаго пространства трехъ измѣреній.

Вопросъ о пересѣченіи четырехъ произвольныхъ

линейныхъ терціи A, B, C, D сводится, по только что сказанному, къ вопросу о пересѣченіи линейной примы напр. BCD съ терціею A. Въ свою очередь, въ каждой терціи всякая прямая есть централь нѣкоторой примы, у которой центръ подобія есть точка пересѣченія этой централи съ плоскостью подобія терціи. Поэтому тотъ же вопросъ мы можемъ свести къ вопросу о томъ, имѣются ли общіе шары въ двухъ линейныхъ примахъ, имѣющихъ общую централь но разныя положенія центровъ подобія и разныя характеристичныя отношенія.

Этотъ же вопросъ разрѣшается весьма просто, если на плоскости, проходящей чрезъ централь для каждой примы будемъ отъ каждой точки централи на перпендикулярѣ откладывать соотвѣтственныя величины радіусовъ шаровъ примъ (въ одномъ направленіи для шаровъ положительныхъ и въ противоположномъ для отрицательныхъ). Ясно, что оба геометрическія мѣста этихъ точекъ представятъ прямыя, проходящія чрезъ соотвѣтственные центры подобія. Такія двѣ прямыя пересѣкутся въ одной единственной точкѣ, а это рѣшеніе соотвѣтствуетъ единичному общему шару.

Итакъ, четыре произвольныя терціи A, B, C, D пересѣкаются въ одномъ единичномъ шарѣ, который мы можемъ отмѣтить символомъ $ABCD$. Возможность обозначенія такимъ символомъ показываетъ, что нетолько прима BCD пересѣкается съ произвольною терціею A въ одномъ шарѣ, но что и двѣ произвольныя секунды AB и CD также пересѣкаются въ томъ же единичномъ шарѣ.

Всѣ эти теоремы, какъ объясняется въ началахъ Новой Геометріи, и не требуютъ спеціальныхъ доказательствъ, такъ какъ онѣ являются общими для всѣхъ линейныхъ совокупностей такихъ элементовъ, полная совокупность которыхъ есть кварта, и слѣдовательно, въ частности одинаково примѣнимы какъ для воображаемаго пространства четвертаго измѣренія, такъ и для линейныхъ совокупностей векторіальныхъ и обыкновенныхъ шаровъ, для параллельныхъ векторовъ и т. п.

Относительно линейныхъ совокупностей шаровъ обыкновенныхъ не считаю возможнымъ входить въ подробности, такъ какъ предметъ съ достаточною обстоятельностью излагается въ имѣющихся руководствахъ по Новой Геометріи [1]).

Вкратцѣ напомню только, что если данъ шаръ и точка, то, проведя изъ нея сѣкущую шара, получимъ два отрѣзка, характеризующіеся постоянствомъ ихъ произведенія для всѣхъ сѣкущихъ, и сходящихъ изъ данной точки, и эта постоянная называется степенью шара въ этой точкѣ.

Совокупность всѣхъ шаровъ, имѣющихъ одинаковую степень въ данной точкѣ, есть линейная терція шаровъ, а сама точка называется радикальномъ центромъ этой терціи. Такихъ терцій два разряда, смотря потому, находится ли радикальный центръ внѣ или внутри всѣхъ шаровъ терціи.

Совокупность всѣхъ шаровъ, имѣющихъ одинаковую степень во всѣхъ точкахъ нѣкоторой прямой, составляетъ линейную секунду шаровъ, а сама прямая, которая одновременно есть и ось вращенія секунды, называется радикальною осью секунды. Такихъ секундъ также имѣется два соотвѣтственныхъ разряда.

Совокупность всѣхъ шаровъ, имѣющихъ одинаковую степень во всѣхъ точкахъ нѣкоторой плоскости, составляетъ линейную приму шаровъ, а сама плоскость, которая одновременно есть плоскость симметріи примы, называется радикальною плоскостью примы. Такихъ примъ также имѣется два соотвѣтственныхъ разряда.

Въ терціяхъ перваго разряда (съ положительною степенью) радикальный центръ есть центръ нѣкотораго шара, прямоугольно пересѣкающаго всѣ шары терціи и называемаго ортогональнымъ. Точки его поверхности есть точечные шары терціи.

Въ терціяхъ второго разряда (съ отрицательною степенью) радикальный центръ есть центръ нѣкотораго шара, пересѣкаемаго всѣми шарами терціи въ большихъ кругахъ и называемаго мнимымъ ортогональнымъ шаромъ.

Въ секундахъ перваго разряда центръ секунды то есть точка пересѣченія центральной плоскости секунды съ ея радикальной оси есть центръ нѣкотораго круга, прямоугольно пересѣкающаго всѣ шары секунды и называемаго ортогональнымъ. Точки его окружности есть точечные шары секунды, а самъ онъ есть въ сущности сѣченіе ортогональнаго шара терціи центральною плоскостью секунды.

Въ секундахъ второго разряда центръ секунды есть центръ нѣкотораго круга, пересѣкаемаго всѣми шарами секунды въ діаметрально противоположныхъ точкахъ и называемаго мнимымъ ортогональнымъ кругомъ; самъ кругъ въ сущности есть сѣченіе мнимаго ортогональнаго шара терціи центральною плоскостью секунды.

Въ примахъ перваго разряда центръ примы есть также центръ круга, прямоугольно пересѣкающаго шары примы, а въ примахъ второго разряда центръ примы есть центръ круга двѣ діаметрально противо-

[1]) Въ частности, какъ упомянутомъ вначалѣ произведеніи Рейе, такъ и въ руководствѣ автора.

положныя точки котораго есть точки общія для всѣхъ круговъ примы.

Характеристичнымъ для линейныхъ совокупностей обыкновенныхъ шаровъ является то обстоятельство, что преобразованіе обратными радіусами даетъ линейныя преобразованныя совокупности, чего не можетъ быть съ линейными совокупностями векторіальныхъ шаровъ, такъ какъ въ ихъ составъ входятъ плоскости и прямыя точечныхъ шаровъ, которыя при этомъ преобразуются въ шары и круги.

Какъ въ линейныхъ терціяхъ векторіальныхъ шаровъ можно выдѣлить линейныя секунды равныхъ шаровъ, такъ въ линейныхъ терціяхъ обыкновенныхъ шаровъ можно выдѣлить квадратичныя секунды равныхъ шаровъ, имѣющія геометрическомъ мѣстомъ центровъ концентрическіе шары.

Ясно, что сферы равныхъ шаровъ пересѣкаются плоскостями равныхъ шаровъ въ циклахъ равныхъ шаровъ; при этомъ и центры шаровъ цикла есть точки пересѣченія шара центровъ сферы равныхъ шаровъ съ плоскостью центровъ шаровъ плоскости равныхъ шаровъ, проще центральнаго шара съ центральною плоскостью, если только вообще эти плоскость и шаръ пересѣкаются между собою.

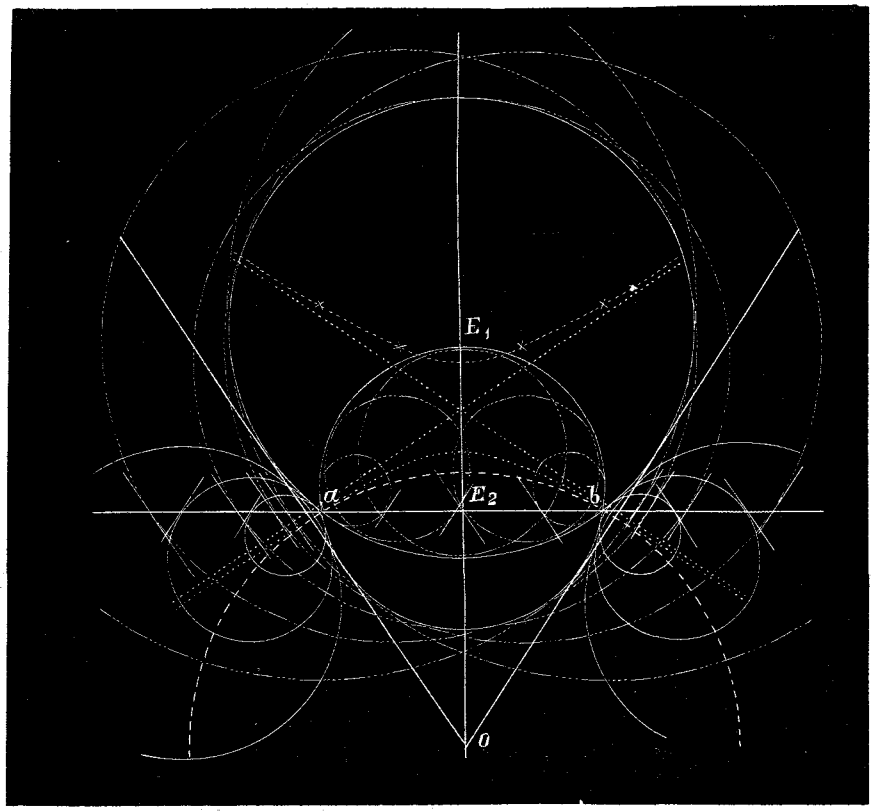
Принявъ во вниманіе, что въ линейной терціи векторіальныхъ шаровъ центральныя плоскости равныхъ шаровъ всѣ параллельны другъ другу и плоскости подобія, получимъ, что вся вообще эта линейная терція пересѣчется съ линейною терціей обыкновенныхъ шаровъ въ рядѣ цикловъ равныхъ шаровъ (отъ слоя къ слою радіусъ шаровъ конечно измѣняется), имѣющихъ параллельныя центральныя плоскости и общую ось вращенія, проходящую чрезъ радикальный центръ терціи обыкновенныхъ шаровъ и перпендикулярную къ плоскости подобія терціи векторіальныхъ шаровъ.

Вся эта совокупность вращенія составитъ квадратичную секунду, называемую сферою векторіальныхъ шаровъ. Съ этой точки зрѣнія сфера вектсріальныхъ шаровъ есть совокупность пересѣченія двухъ произвольныхъ линейныхъ терцій, изъ которыхъ одна есть терція векторіальныхъ, а другая — обыкновенныхъ шаровъ[1]).

Какъ примѣръ приведемъ сферу шаровъ, представляющую пересѣченіе линейной терціи, имѣющей

[1]) Эти свойства сферъ векторіальныхъ шаровъ были извѣстны уже раньше и, въ частности, выведены въ руководствѣ „Новая Геометрія какъ основа черченія“ (VI, 11).

Фиг. 1.



плоскость подобія ab (фиг. 1), съ линейною терціей обыкновенныхъ шаровъ, имѣющею O своимъ ортогональнымъ шаромъ, пересѣкающимся съ плоскостью подобія въ кругѣ діаметра ab. По опредѣленію, эта совокупность состоитъ изъ тѣхъ шаровъ линейной терціи которые прямоугольно пересѣкаютъ шаръ O (отмѣченный пунктиромъ) или же изъ тѣхъ шаровъ терціи, имѣющей O своимъ ортогональнымъ шаромъ, которые принадлежатъ линейной терціи векторіальныхъ шаровъ съ плоскостью подобія ab то есть пересѣкающихъ эту плоскость подъ однимъ и тѣмъ же угломъ.

Какъ извѣстно, такая совокупность огибаетъ два сопряженные шара E_1 и E_2. Въ этой совокупности или сферѣ шаровъ кругъ ab есть кругъ точечныхъ шаровъ; онъ раздѣляетъ поверхность (второго порядка) центровъ шаровъ, въ данномъ случаѣ гиперболоидъ (тонкій пунктиръ), на двѣ части: шары одной части положительны, а другой отрицательны.

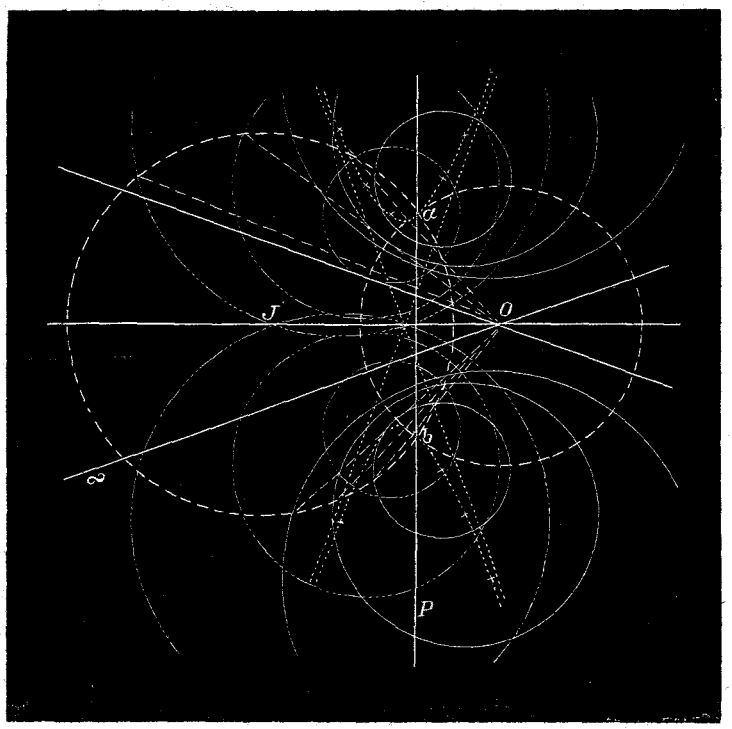
Такъ какъ линейная терція, которой принадлежитъ изображенная сфера, есть терція второго разряда, то всѣ ея шары, а слѣдовательно и шары сферы, пересѣкаютъ плоскость подобія подъ однимъ и тѣмъ же угломъ, что и показано на чертежѣ въ видѣ короткихъ отрѣзковъ параллельныхъ касательныхъ.

Положительные шары сферы, центры коихъ находятся ниже плоскости ab, изображены сплошными линіями, а отрицательные шары съ центрами выше этой плоскости—особымъ условнымъ пунктиромъ.

Кромѣ пикла точечныхъ шаровъ положительные шары сферы отграничиваются отъ ея отрицательныхъ шаровъ еще цикломъ шаровъ безконечно большаго діаметра то есть плоскостей, огибающихъ круговой конусъ, имѣющій центромъ центръ O ортогональнаго шара. Центры этихъ шаровъ и есть безконечно-удаленныя точки двуполаго гиперболоида вращенія.

Понятно также, что изъ всѣхъ центровъ шаровъ сферы только точки круга ab одновременно находятся на плоскости подобія и на поверхности ортогональнаго шара; эти точки, слѣдовательно, есть точки пересѣченія гиперболоида плоскостью подобія или точки касанія его съ ортогональнымъ шаромъ.

Фиг. 2.



Какъ примѣръ сферы второго разряда, получаемой преобразованіемъ обратными радіусами линейной терціи второго разряда, проведена сфера на фиг. 2. Для ея опредѣленія достаточно имѣть ортогональный шаръ O, преобразованный изъ центральной плоскости секунды и *изогональный* шаръ J, преобразованный изъ изогональной плоскости. Какъ эти обѣ плоскости перпендикулярны другъ къ другу,

такъ должны быть перпендикулярны другъ къ другу и эти оба шара. Слѣдовательно, эти шары необходимо пересѣкаются между собою, а именно въ циклѣ точечныхъ шаровъ, діаметръ коего есть отрѣзокъ *ab*. Ясно, что плоскость этого круга и есть плоскость подобія той линейной терціи, которой принадлежитъ данная сфера, и значитъ эта плоскость (что то же—циклъ точечныхъ шаровъ) раздѣляетъ центры шаровъ положительныхъ отъ отрицательныхъ[1]), а центральный гиперболоидъ (однополый) касателенъ къ ортогональному шару по кругу точечныхъ шаровъ. Плоскости, представляющія шары безконечно-большого діаметра, огибаютъ круговой конусъ, имѣющій осью прямую *JO* и перпендикулярны къ соотвѣтственнымъ производящимъ ассимптотическаго конуса гиперболоида.

Такъ какъ въ этомъ случаѣ въ сферѣ имѣются точечные шары, то линейная терція, которой принадлежитъ сфера, есть терція второго разряда, и значитъ всѣ шары сферы и въ этомъ случаѣ пересѣкаютъ плоскость подобія (и изогональную) подъ однимъ и тѣмъ же угломъ.

Какъ въ преобразуемой линейной терціи, какъ терціи второго разряда, не имѣется конусовъ, огибающихъ входящія въ ея составъ линейныя примы, такъ въ сферѣ второго разряда не имѣется огибающей шары сферы циклиды. Какъ и въ линейныхъ секундахъ преобразуемой терціи не имѣется огибающихъ совокупность двухъ плоскостей, такъ въ преобразованной сферѣ не имѣется двухъ огибающихъ сферу шаровъ.

Что такая совокупность дѣйствительно однозначно опредѣляется четырьмя данными векторіальными шарами, видно изъ того, что для такихъ четырехъ шаровъ мы съ одной стороны однозначно опредѣляемъ терцію и ея плоскость подобія, а съ другой однозначно же опредѣляемъ и радикальный центръ и степень этихъ шаровъ въ этомъ центрѣ, а слѣдовательно и полную терцію обыкновенныхъ шаровъ. Произвольная прямая, пересѣкающая шары этой совокупности, есть одновременно централь опредѣленныхъ примъ шаровъ, принадлежащихъ той и другой терціи, а потому на каждой такой прямой вполнѣ опредѣляются оба общіе шара обѣихъ терцій то есть шары пересѣченія этой совокупности обѣими примами за разъ. На фигуры 1 и 2, представляющія плоскіе разрѣзы сферы, мы можемъ смотрѣть какъ на циклы круговъ, опредѣляемые тремя произвольными изъ нихъ.

[1]) Показаннымъ особымъ пунктиромъ.

Способы построенія такихъ совокупностей, равно какъ и ихъ плоскихъ сѣченій—цикловъ векторіальныхъ шаровъ—достаточно подробно излагаются въ упомянутыхъ курсахъ Новой Геометріи по крайней мѣрѣ по отношенію къ выведеннымъ изъ терцій перваго разряда.

Характеристичными для этихъ совокупностей являются огибающія поверхности, а именно два сопряженные шара для первой и такъ называемая циклида Дюпена для второй [1]).

Какъ первая совокупность однозначно опредѣляется четырьмя данными, такъ вторая совокупность однозначно опредѣляется тремя данными векторіальными шарами. Спеціально циклида можетъ быть выведена и какъ огибающая совокупности всѣхъ шаровъ, касательныхъ къ тремъ даннымъ.

Поэтому понятно, что обратными радіусами какъ сфера векторіальныхъ шаровъ преобразуется также въ сферу шаровъ, такъ циклида преобразуется въ циклиду же.

Но при этомъ преобразованіи линейная терція обыкновенныхъ шаровъ преобразуется въ линейную же терцію, а линейная терція векторіальныхъ шаровъ преобразуется не въ линейную, а въ нѣкоторую другую совокупность. Поэтому эта преобразованная совокупность представляетъ особый интересъ; въ самомъ дѣлѣ, теперь мы видимъ, что сфера векторіальныхъ шаровъ можетъ опредѣляться не только какъ пересѣченіе двухъ линейныхъ терцій двоякаго рода, но и какъ пересѣченіе этой новой совокупности векторіальныхъ шаровъ съ линейною терціею шаровъ обыкновенныхъ.

Впрочемъ, объ этой совокупности уже упоминается въ руководствѣ автора, и она характеризуется какъ мегасфера векторіальныхъ шаровъ.

Линейная терція векторіальныхъ шаровъ есть совокупность, которую мы можемъ разложить на слои равныхъ шаровъ (ихъ линейныя секунды) съ параллельными центральными плоскостями; а такъ какъ всякая центральная плоскость прямоугольно пересѣкаетъ всѣ шары секунды слоя, то ясно, что послѣ преобразованія обратными радіусами всѣ эти плоскости преобразуются въ линейную приму обыкновенныхъ шаровъ, касающихся другъ друга въ одной общей точкѣ—центрѣ преобразованія. Одинъ изъ этихъ шаровъ будетъ сферою точечныхъ шаровъ, и это есть преобразованная плоскость подобія. Каждый изъ остальныхъ шаровъ этой примы прямоугольно пересѣкаетъ нѣкоторую сферу шаровъ, вос-

[1]) Эти свойства сферъ векторіальныхъ шаровъ были извѣстны уже раньше и, въ частности, выведены въ руководствѣ „Новая Геометрія какъ основа черченія“.

производящуюся изъ равныхъ шаровъ одного слоя; каждая изъ этихъ совокупностей, въ свою очередь, огибается двумя шарами примы, а всѣ остальные ея шары, которые только пересѣкаютъ шары такой совокупности, пересѣкаютъ всѣ ея шары подъ однимъ и тѣмъ же угломъ.

Для преобразованныхъ терцій второго разряда будемъ имѣть, кромѣ того, что всѣ вообще шары мегасферы пересѣкаютъ сферу точечныхъ шаровъ подъ однимъ и тѣмъ же угломъ, и при томъ необходимо пересѣкаютъ, и какъ нѣтъ такихъ шаровъ, которые пересѣкали бы этотъ *изогональный* шаръ мегасферы подъ какимъ-нибудь инымъ угломъ, кромѣ *опредѣленнаго даннаго, такъ тѣмъ болѣе нѣтъ* шаровъ, которые бы вовсе не пересѣкали изогональный шаръ.

Такая мегасфера отличается отъ линейной терціи перваго разряда обыкновенныхъ шаровъ только тѣмъ, что въ послѣдней всѣ шары пересѣкаютъ шаръ точечныхъ шаровъ подъ прямымъ угломъ, и слѣдовательно изогональный шаръ становится спеціально ортогональнымъ шаромъ терціи.

Поэтому можемъ сказать, что линейная терція (перваго разряда) обыкновенныхъ шаровъ есть мегасфера векторіальныхъ шаровъ, представляя тотъ частный случай, когда данный характерный для мегасферы уголъ пересѣченія есть прямой.

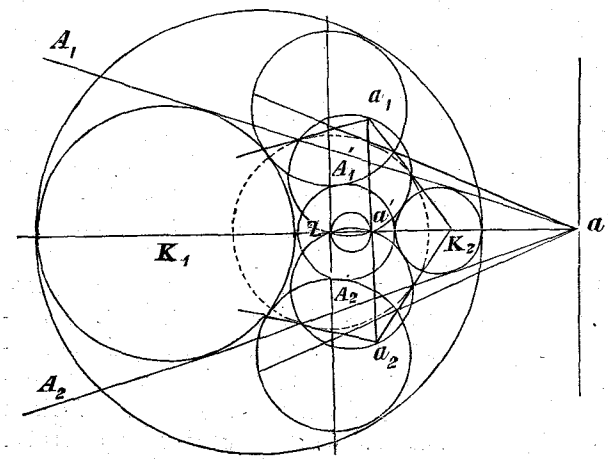
Въ этомъ послѣднемъ случаѣ мегасфера образуется изъ той *особой* линейной терціи векторіальныхъ шаровъ, въ которой всѣ центральныя плоскости совпадутъ въ одну. Ясно, что эта линейная терція получается, если центры всѣхъ четырехъ опредѣляющихъ ее векторіальныхъ шаровъ находятся въ одной плоскости. Такая линейная терція не отличается и отъ соотвѣтственной линейной терціи обыкновенныхъ шаровъ.

Если въ линейной терціи проведемъ произвольную прямую, то таковая является централью нѣкоторой линейной примы; точка пересѣченія централи съ плоскостью подобія есть центръ подобія. Всѣ вообще прямыя, проходящія чрезъ послѣднюю точку, именно потому, что она есть центръ подобія, пересѣкаютъ всѣ шары примы подъ одинаковымъ угломъ, если вообще прямая пересѣкаетъ эти шары; въ частности, для терцій второго разряда, такое пересѣченіе въ двухъ точкахъ каждаго шара примы непремѣнно имѣетъ мѣсто, потому что центръ подобія находится внутри всѣхъ шаровъ примы.

Отсюда слѣдуетъ, что послѣ преобразованія этой системы лучей получится секунда круговъ, проходящихъ чрезъ двѣ постоянныя точки: преобразованный центръ подобія и центръ преобразованія; круги эти, проходя чрезъ постоянную точку (точечный шаръ) пересѣкаютъ тѣ шары мегасферы, которые вывелись изъ соотвѣтственныхъ линейныхъ примъ, подъ равными углами. Въ мегасферахъ, полученныхъ изъ терцій перваго разряда, одна изъ примъ круговъ этой секунды есть преобразованная поверхность огибающаго кругового конуса то есть циклида съ двумя *пупочными точками* [1]) (соотвѣтствующими центру конуса и центру шара преобразованія).

Для примѣра преобразуемъ приму шаровъ, огибаемую конусомъ, имѣющимъ центръ a (фиг. 3) и производящія A_1 и A_2; пусть шаръ Z (отмѣченный *пунктиромъ*) *есть шаръ преобразованія обратными* радіусами.

Фиг. 3.



Каждая производящая A_1 преобразуется въ кругъ, проходящій чрезъ полюсъ a_1 прямой A_1 по отношенію къ шару преобразованія, и чрезъ центръ Z этого шара. Получится непрерывная совокупность (циклида) круговъ съ двумя пупочными точками Z и a', изъ коихъ послѣдняя гомологична центру a конуса. Въ частности, если центръ Z находится на оси примы, циклида будетъ циклидою вращенія.

Ясно, что всѣ шары преобразуемой примы, какъ шары, огибаемые конусомъ, преобразуются въ шары, огибаемые циклидою. Изъ нихъ два шара K_1 и K_2 общіе для преобразуемой и преобразованной совокупности: это шары, прямоугольно пересѣкающіе шаръ преобразованія. Въ преобразованной совокуп-

[1]) Н. Г. VI 3.

ности (циклѣ) имѣется два точечные шара Z и a', раздѣляющіе положительные шары (въ обѣ противоположныя стороны отъ этихъ точекъ кнаружи) отъ отрицательныхъ, центръ коихъ находятся между точечными шарами. (Если составимъ совокупность всѣхъ шаровъ, огибаемыхъ двумя шарами, большіе круги которыхъ есть A_1' и A_2', получимъ сферу шаровъ, въ составъ которой входитъ упомянутый циклъ; Z есть ортогональный шаръ сферы, а плоскость, проходящая чрезъ a и перпендикулярная къ оси вращенія, есть плоскость подобія).

Такъ какъ всѣ шары линейной примы входятъ въ составъ той *особой* линейной секунды, которая обнимаетъ совокупность всѣхъ шаровъ, имѣющихъ центры на одной прямой и которая есть также и линейная секунда шаровъ обыкновенныхъ, то ясно, что преобразованная прима можетъ быть разсматриваема какъ совокупность пересѣченія линейной секунды перваго разряда обыкновенныхъ шаровъ съ мегасферой, преобразованной изъ линейной терціи. Это преобразованная прима есть циклъ векторіальныхъ шаровъ.

Итакъ, мегасфера векторіальныхъ шаровъ въ пересѣченіи съ линейною терціею обыкновенныхъ шаровъ даетъ сферу, а въ пересѣченіи съ линейною секундою обыкновенныхъ шаровъ даетъ циклъ векторіальныхъ шаровъ.

Въ этомъ случаѣ представляется своеобразнымъ, что сферы и циклы векторіальныхъ шаровъ выводятся изъ пересѣченія съ линейными терціею и секундою шаровъ обыкновенныхъ то есть элементовъ совсѣмъ другой системы или Геометріи. Если такое рѣшеніе можетъ быть и самымъ простымъ, то во всякомъ случаѣ должно существовать и другое рѣшеніе, независимое отъ совокупности шаровъ обыкновенныхъ.

И дѣйствительно, если всякая сфера векторіальныхъ шаровъ можетъ быть однозначно выведена изъ четырехъ данныхъ, и притомъ кромѣ радикальнаго центра находимъ для нихъ и соотвѣтственную плоскость подобія, то ясно, что сфера шаровъ принадлежитъ нетолько мегасферѣ и нѣкоторой линейной терціи обыкновенныхъ шаровъ, но также и нѣкоторой линейной терціи шаровъ векторіальныхъ, опредѣляемой однозначно плоскостью подобія и однимъ шаромъ.

Итакъ, въ сферѣ векторіальныхъ шаровъ пересѣкаются нетолько мегасфера съ линейною терціей обыкновенныхъ, но и съ нѣкоторою линейною терціею шаровъ векторіальныхъ.

По основнымъ свойствамъ мегасферы, каждая, входящая въ ея составъ, сфера шаровъ, пересѣкается однимъ изъ шаровъ ея ортогональной примы прямоугольно. Если примемъ ортогональный шаръ данной сферы шаровъ за шаръ преобразованія обратными радіусами, всѣ шары совокупности преобразуются сами въ себя, а слѣдовательно сама въ себя преобразуется и соотвѣтственная сфера шаровъ. Но при этомъ всѣ ортогональные шары мегасферы, какъ шары примы, преобразуются въ другіе шары той же примы (потому что линейная прима обыкновенныхъ шаровъ при этомъ преобразуется сама въ себя); такъ какъ плоскость подобія принадлежитъ той же примѣ и въ тоже время есть плоскость точечныхъ шаровъ искомой линейной терціи, которая при этомъ преобразованіи станетъ мегасферою (тою самою мегасферою, которой принадлежитъ и данная сфера шаровъ), то значитъ гомологичный ей шаръ, проходящій чрезъ центръ ортогональнаго шара, и есть сфера точечныхъ шаровъ мегасферы.

Отсюда видимъ, что мы можемъ нетолько опредѣлить сферу векторіальныхъ шаровъ, независимо отъ системы обыкновенныхъ шаровъ, какъ пересѣченіе мегасферы и линейной терціи (первая изъ которыхъ однозначно опредѣляется четырьмя данными векторіальными шарами, а вторая еще шаромъ преобразованія), но и построить какъ ту, такъ и другую совокупность.

По даннымъ четыремъ шарамъ опредѣляемъ ортогональный шаръ (его центръ и есть радикальный) и плоскость подобія. Послѣдняя и одинъ изъ шаровъ однозначно опредѣляютъ линейную терцію, а ортогональный шаръ и плоскость подобія, разсматриваемая какъ радикальная плоскость, опредѣляютъ приму обыкновенныхъ ортогональныхъ шаровъ мегасферы (не входящихъ въ составъ системы, а только служащихъ для построенія). Шаръ примы, гомологичный плоскости подобія по отношенію къ ортогональнику шару какъ шару преобразованія, есть точечный шаръ мегасферы. Какъ видимъ, въ этомъ частномъ случаѣ мегасфера опредѣлилась четырьмя шарами, подобно тому какъ можемъ напр. опредѣлить кругъ двумя точками, принявъ ихъ за концы діаметра.

Если проведемъ какой-нибудь кругъ, пересѣкающій сферу точечныхъ шаровъ, чрезъ центръ шара преобразованія, то шаръ, который одновременно пересѣчетъ прямоугольно и этотъ кругъ, и ортогональный шаръ, будетъ принадлежать сферѣ шаровъ. Также, если проведемъ произвольную прямую и примемъ ее за централь нѣкоторой примы шаровъ, пересѣкающей сферу шаровъ и имѣющей центромъ

подобія точку пересѣченія этой прямой съ плоскостью подобія, то тѣ два шара примы, которые прямоугольно пересѣкутъ ортогональный шаръ, принадлежатъ сферѣ шаровъ.

Изъ всего предъидущаго усматриваемъ, что вообще линейныя терціи обыкновенныхъ шаровъ, если на послѣдніе смотрѣть какъ на шары векторіальные, представляютъ особый частный случай мегасферъ, характеризующихся присутствіемъ точечнаго изогональнаго шара, который, въ свою очередь, входитъ въ составъ примы ортогональныхъ шаровъ мегасферы. Каждый шаръ этой примы есть ортогональный для нѣкоторой опредѣленной сферы шаровъ, входящей въ составъ мегасферы, какъ изогональный шаръ мегасферы есть шаръ ортогональный по отношенію къ самому себѣ; для всѣхъ же вообще шаровъ мегасферы та же постоянная сфера точечныхъ шаровъ есть шаръ изогональный; и такъ какъ свойство изогональности этого шара передается при преобразованіи обратными радіусами, то и такая мегасфера при этомъ также преобразуется въ мегасферу съ изогональнымъ же шаромъ.

Также линейную терцію второго разряда обыкновенныхъ шаровъ мы можемъ разсматривать какъ частный случай мегасферы шаровъ векторіальныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, взявъ какой-нибудь шаръ терціи (пересѣкающій мнимый ортогональный шаръ въ большомъ кругѣ), вращеніями около радикальнаго центра (то есть центра мнимаго шара), получимъ квадратичную секунду шаровъ, огибаемыхъ двумя концентрическими шарами и слѣдовательно во всякомъ случаѣ представляющую сферу векторіальныхъ шаровъ; и всѣ шары этой совокупности пересѣкаютъ мнимый ортогональный шаръ терціи подъ однимъ и тѣмъ же угломъ. Такимъ образомъ и эта секунда есть секунда пересѣченія этой линейной терціи обыкновенныхъ шаровъ съ нѣкоторою мегасферою, для которой мнимый шаръ терціи есть изогональный шаръ. Но все-таки и для нея имѣется ортогональный шаръ, концентрическій съ обѣими огибающими. Однако въ этомъ случаѣ въ составѣ линейной терціи, разсматриваемой какъ мегасфера, сферы точечныхъ шаровъ не имѣется.

Отъ разсмотрѣнныхъ частныхъ случаевъ мегасферы векторіальныхъ шаровъ, мы можемъ перейти къ общему, если примемъ за ея опредѣленіе такую терцію, которая разлагается на сферы шаровъ, и всѣ пары огибающихъ шаровъ (также какъ и ортогональные шары) этихъ совокупностей, входятъ въ составъ одной линейной примы шаровъ обыкновенныхъ.

Если принять во вниманіе, что какъ на такую приму сферъ шаровъ мы можемъ смотрѣть и на линейную терцію и что преобразованіе обратными радіусами сохраняетъ свойства совокупностей, входящія въ опредѣленіе, то точнѣе опредѣлить мегасферу какъ совокупность, преобразованную (произвольно) обратными радіусами изъ линейной терціи.

Если означимъ радіусъ шара преобразованія чрезъ R, радіусъ какого-либо преобразуемаго шара чрезъ r, а преобразованнаго чрезъ r'; разстояніе центра шара r отъ центра R чрезъ d, а центра шара r' отъ центра R чрезъ x, найдемъ:
$(d-r)\,(x+r')=(d+r)\,(x-r')=R^2$; также $d:x=r:r'$

Отсюда выводимъ $r'=\frac{R^2 r}{d^2-r^2}$ . . . . . $A)$

и $x=d\frac{r'}{r}=\frac{R^2 d}{d^2-r^2}$ . . . . . $B)$

Эти формулы являются недостаточными для преобразованія плоскости какъ шара безконечно-большого радіуса, такъ какъ въ этомъ случаѣ $r=\infty$ и $d=\infty$.

Если означимъ разстояніе плоскости отъ центра R чрезъ p, то найдемъ $2r'p=R^2$ то есть $r'=\frac{R^2}{2p}$ и $x=r'$ . . . . . $C)$

Этими формулами дается теоретическая возможность вывода (преобразованія) мегасферы изъ линейной терціи векторіальныхъ шаровъ.

Практически же выводъ мегасферы весьма упрощается, какъ будетъ видно изъ дальнѣйшаго. Замѣтимъ только, что если p относится къ разстоянію отъ плоскости подобія, то r выразитъ радіусъ сферы точечныхъ шаровъ мегасферы.

По одной изъ основныхъ теоремъ Новой Геометріи какъ линейная кварта, такъ и входящая въ ея составъ мегасфера, должны опредѣляться пятью элементами. Въ разсмотрѣнныхъ же до сихъ поръ случаяхъ мегасферъ требовалось для опредѣленія только четыре шара. И дѣйствительно, всякими четырьмя данными шарами можетъ однозначно опредѣлиться сфера шаровъ, а таковая является общею для безконечной совокупности (примы) мегасферъ; для того, чтобы однозначно опредѣлить одну изъ нихъ, необходимъ еще одинъ шаръ, входящій въ ея составъ.

Вмѣсто четырехъ шаровъ для опредѣленія сферы шаровъ мы можемъ дать двѣ данныя, опредѣляющія сопряженную приму шаровъ напр. два точечные шара этой примы и затѣмъ еще два какихъ-нибудь шара напр. ортогональный шаръ, входящій въ со-

ставъ примы и одинъ изъ шаровъ самой совокупности. Или могли бы опредѣлить сферу шаровъ двумя огибающими шарами; это значило бы, что кромѣ одного даннаго шара и радіуса другого шара, нужно еще двѣ данныхъ, чтобы установить въ опредѣленномъ положеніи этотъ второй шаръ по отношенію къ первому.

Имѣя эти данныя, мы, по вышесказанному, однозначно опредѣлимъ сферу шаровъ, хотя мегасфера еще не опредѣлена. Но если данъ еще шаръ мегасферы, а это вообще можетъ быть произвольный шаръ произвольнаго положенія, мы легко выведемъ другую сферу шаровъ, входящую въ составъ мегасферы. Для этого стоитъ только провести въ сопряженной примѣ два шара, касательные къ данному; они и будутъ огибающими шарами искомой совокупности.

Какъ всякая сфера въ частномъ случаѣ становится линейною совокупностью, такъ и мегасфера векторіальныхъ шаровъ въ частномъ случаѣ должна быть представлена линейною терціею.

Легко доказать, что это будетъ тотъ частный случай, когда радикальная плоскость примы сопряженныхъ шаровъ есть сфера точечныхъ шаровъ совокупности.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ произвольную линейную приму обыкновенныхъ шаровъ и примемъ ее за сопряженную приму ортогональныхъ шаровъ мегасферы и притомъ ея радикальную плоскость за плоскость точечныхъ шаровъ.

Ясно, что послѣдняя есть плоскость подобія всякой сферы шаровъ, входящей въ составъ мегасферы то есть линейной терціи: какіе бы четыре шара этой терціи мы ни взяли для вывода сферы, всегда получимъ одну и ту же плоскость точечныхъ шаровъ какъ плоскость подобія.

Можемъ поступить и обратно: принять плоскость подобія линейной терціи за радикальную плоскость сопряженной примы шаровъ и опредѣлить эту приму какимъ-нибудь однимъ произвольнымъ шаромъ, не принадлежащимъ терціи. Этотъ шаръ можетъ 1) не имѣть общихъ точекъ съ плоскостью, 2) касаться къ ней и 3) пересѣкать ее въ кругѣ.

Въ первомъ случаѣ получимъ приму перваго разряда, въ третьемъ случаѣ—приму второго разряда, а во второмъ случаѣ промежуточную.

Произведя затѣмъ преобразованіе обратными радіусами, мы во всѣхъ трехъ случаяхъ получимъ одну и ту же мегасферу, но въ разныхъ случаяхъ составленную изъ разныхъ сферъ.

Пусть дано 5 шаровъ K_1, $K_2 \ldots K_5$, принадлежащихъ линейной терціи. Мы можемъ выбрать произвольные четыре изъ нихъ и по нимъ однозначно составить сферу шаровъ напр. $K_1\ K_2\ K_3\ K_4$. Имѣя такую сферу, мы вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣляемъ, также однозначно, два огибающіе шара примы, принадлежащіе той же сопряженной примѣ, что и плоскость подобія.

Имѣя плоскость подобія и еще хоть одинъ шаръ напр. K_1 линейной терціи, мы уже однозначно опредѣляемъ эту терцію то есть характеристичное для нея отношеніе, и сейчасъ убѣдимся, что шаръ K_5 принадлежитъ ей же.

Ясно, что если вмѣсто упомянутой возьмемъ какую-нибудь другую комбинацію четырехъ шаровъ напр. $K_2\ K_3\ K_4\ K_5$, построимъ изъ нихъ сферу, огибающіе шары которой будутъ принадлежать совсѣмъ другой примѣ, то и для нея получимъ ту же радикальную плоскость—плоскость подобія, и опять легко убѣдимся, что шаръ K_1 принадлежитъ той же терціи. Такимъ образомъ раздѣленіе линейной терціи на примы сопряженныхъ шаровъ, можетъ быть безконечно разнообразно, но всегда послѣ преобразованія получимъ одну и ту же мегасферу, независимо отъ этихъ раздѣленій.

Это означаетъ, что всякіе четыре шара данной мегасферы K_1, K_2, K_3, K_4, однозначно опредѣляющіе нѣкоторую линейную терцію въ то же время однозначно опредѣляютъ и сферу, принадлежащую той же мегасферѣ то есть, что вообще всякая данная мегасфера пересѣкается произвольною линейною терціею, если вообще пересѣкается, въ одной опредѣленной сферѣ 1).

Итакъ, существенное отличіе мегасферы шаровъ отъ линейной терціи въ томъ, что въ послѣдней точечные шары образуютъ плоскость (подобія), а въ первой шаръ. Поэтому, если мегасферу преобразуемъ обратными радіусами, принявъ за центръ преобразованія точку на *сферѣ точечныхъ шаровъ* мегасферы, то получимъ линейную терцію аналогично тому, какъ подобнымъ же преобразованіемъ съ центромъ на шарѣ послѣдній станетъ плоскостью.

Всякое плоское сѣченіе мегасферы шаровъ есть мегациклъ круговъ.

Въ самомъ дѣлѣ, всѣ шары мегасферы, въ томъ числѣ и шары сопряженной примы, пересѣкутся плоскостью въ кругахъ; каждая линейная прима шаровъ пересѣкается въ линейной примѣ круговъ,

1) Ясно, что эта теорема есть расширеніе на четыре измѣренія теоремы о пересѣченіи шара плоскостями въ кругахъ; и какъ шаръ произвольною примою (линейною) плоскостей пересѣкается въ примѣ круговъ, такъ мегасфера произвольною примою линейныхъ терцій пересѣкается въ примѣ сферъ шаровъ.

и притомъ шары перпендикулярные пересѣкаются въ перпендикулярныхъ кругахъ. Поэтому и мегациклъ круговъ раздѣлится на циклы круговъ, ортогональные круги которыхъ составятъ одну линейную приму.

Какъ мегасфера преобразуется обратными радіусами въ мегасферу, такъ мегациклъ преобразуется въ мегациклъ (на плоскости).

Всѣ круги мегацикла мы можемъ принять за большіе круги шаровъ. Такая совокупность есть *мегациклъ шаровъ*. Такой мегациклъ мы получимъ, если пересѣчемъ мегасферу плоскостью, проходящею чрезъ ось вращенія примы сопряженныхъ шаровъ то есть ось мегасферы [1]) и примемъ въ соображеніе только тѣ шары мегасферы, центры которыхъ находятся въ плоскости сѣченія.

Если въ линейной терціи мы возьмемъ произвольный шаръ и примемъ его за одинъ изъ ортогональныхъ шаровъ мегасферы, то онъ вмѣстѣ съ плоскостью подобія терціи опредѣлитъ всю приму ортогональныхъ шаровъ; одинъ изъ точечныхъ шаровъ этой примы (если шаръ не пересѣкаетъ плоскости подобія, а по его произвольности мы всегда можемъ взять его таковымъ) будетъ полюсъ плоскости, перпендикулярной къ централи и проходящей чрезъ другой точечный шаръ, относительно этого шара.

Всѣ шары терціи, проходящіе чрезъ эту точку, составятъ сферу шаровъ съ точечнымъ ортогональнымъ шаромъ. Ясно, что такихъ точечныхъ шаровъ, также какъ и такихъ сферъ шаровъ, въ терціи имѣемъ два симметричные, такъ какъ плоскость подобія есть плоскость симметріи примы шаровъ.

Преобразованіе обратными радіусами сохраняетъ всѣ эти свойства, то есть въ точкахъ преобразованныхъ будутъ также пересѣкаться сферы шаровъ, имѣющія въ нихъ свои точечные ортогональные шары.

Но такъ какъ по существу это точки, взятыя произвольно, то этотъ выводъ одинаково относится ко всѣмъ точкамъ мегасферы, то есть въ каждой точкѣ мегасферы пересѣкается сфера шаровъ, имѣющая эту точку своимъ точечнымъ ортогональнымъ шаромъ.

Эту теорему можно сопоставить съ теоремой, по которой въ каждой точкѣ линейной терціи обыкновенныхъ шаровъ пересѣкается линейная секунда шаровъ [2]).

И въ томъ, и въ другомъ случаѣ означенныя свойства сохраняются при преобразованіи обратными радіусами.

Если примемъ такую точку за центръ преобразованія, то всѣ шары этой сферы преобразуются въ плоскости. Слѣдовательно, въ каждой мегасферѣ имѣется одна, и только одна, сфера шаровъ безконечно-большого діаметра то есть совокупность плоскостей, касательныхъ къ шару.

Если въ линейной терціи шаровъ чрезъ произвольную точку, принятую за точечный ортогональный шаръ сферы, проведемъ секунду шаровъ, прямоугольно пересѣкающихъ плоскость подобія (въ этой секундѣ взятая точка и симметричная съ нею по отношенію къ плоскости подобія есть точки, чрезъ которыя проходятъ всѣ шары), а затѣмъ примемъ эту точку за центръ преобразованія обратными радіусами, получимъ мегасферу со слѣдующими свойствами.

Всѣ шары упомянутой секунды преобразуются въ плоскости, проходящія чрезъ одну и ту же точку и прямоугольно пересѣкающія сферу точечныхъ шаровъ мегасферы; и значитъ точка пересѣченія этихъ шаровъ и есть центръ этой сферы; она есть преобразованный другой точечный шаръ примы, чрезъ который также проходятъ всѣ проведенные шары.

Но второй огибающій шаръ вышеупомянутой сферы шаровъ (имѣющей первымъ огибающимъ шаромъ точечный шаръ, принятый за центръ преобразованія) принадлежитъ той же примѣ, что оба точечные шара и плоскость подобія. Поэтому въ преобразованной мегасферѣ шаръ, гомологичный этому огибающему (то есть теперь огибаемый шаровою секундою плоскостей—сферою плоскостей), принадлежитъ также той же примѣ, что и центръ, и сфера точечныхъ шаровъ мегасферы: то есть сама прима есть прима концентрическихъ шаровъ, и ея центръ есть центръ всей мегасферы.

Сама мегасфера, полученная произвольнымъ преобразованіемъ изъ линейной терціи, имѣетъ симметрію шара то есть можетъ быть разложена на приму сферъ съ концентрическими ортогональными шарами (въ частности и шарами центровъ), и въ каждой составной сферѣ шары будутъ равными.

Теперь мегасфера вполнѣ опредѣлена двумя сферами шаровъ, а именно точечныхъ и плоскостей.

По относительному положенію этихъ обѣихъ сферъ различаемъ мегасферы двухъ разрядовъ.

Если огибающій шаръ сферы плоскостей лежитъ внѣ сферы точечныхъ шаровъ, то ни одна изъ этихъ

---

[1]) Ниже мы увидимъ, что мегасфера имѣетъ центръ, и всѣ прямыя, проходящія чрезъ него, есть ея оси вращенія.

[2]) H. Г. IV 21.

плоскостей не пересѣкаетъ послѣдней сферы, а вмѣстѣ съ тѣмъ вообще ни одинъ шаръ мегасферы не имѣетъ общихъ точекъ съ этою сферою. Это будутъ мегасферы перваго разряда. Чтобы опредѣлить, принадлежитъ ли какой-нибудь данный шаръ мегасферѣ, проведемъ чрезъ двѣ произвольныя точки сферы точечныхъ шаровъ (изъ нихъ одну можемъ всегда считать за центръ преобразованія мегасферы изъ линейной терціи) напр. чрезъ концы діаметра этой сферы, проходящаго чрезъ центръ даннаго шара, касательные къ нему круги.

Если эти круги будутъ одновременно касательны и къ одной изъ плоскостей мегасферы (перпендикулярной къ радіусу), то данный шаръ принадлежитъ послѣдней. Въ самомъ дѣлѣ, принявъ одинъ изъ точечныхъ шаровъ, чрезъ который проведены эти круги, за центръ преобразованія, получимъ линейную приму съ централью—проведеннымъ радіусомъ; и тогда шаръ, преобразованный изъ даннаго, окажется принадлежащимъ одной и той же линейной примѣ вмѣстѣ съ однимъ изъ точечныхъ шаровъ и другимъ шаромъ, преобразованнымъ изъ плоскости. Въ противномъ случаѣ данный шаръ не принадлежитъ мегасферѣ, какъ не удовлетворяющій этому достаточному условію. Необходимо же проведеніе хотя одного такого круга.

Если огибающій шаръ сферы плоскостей находится внутри сферы точечныхъ шаровъ, то каждая плоскость мегасферы пересѣкаетъ сферу точечныхъ шаровъ подъ однимъ и тѣмъ же угломъ, и тогда всѣ вообще шары мегасферы пересѣкутъ эту сферу подъ тѣмъ же угломъ. Это будутъ мегасферы второго разряда. Для этихъ мегасферъ сфера точечныхъ шаровъ будетъ изогональнымъ шаромъ. Поэтому, чтобы узнать, принадлежитъ ли данный шаръ мегасферѣ, нужно только узнать, пересѣкаетъ ли онъ сферу точечныхъ шаровъ подъ угломъ, характеристичнымъ для мегасферы.

Промежуточными являются мегасферы, въ которыхъ плоскости касательны къ сферѣ точечныхъ круговъ. Въ этихъ мегасферахъ всѣ шары касательны къ послѣдней сферѣ, а потому рѣшеніе задачи о принадлежности всякаго даннаго шара мегасферѣ еще болѣе упрощается.

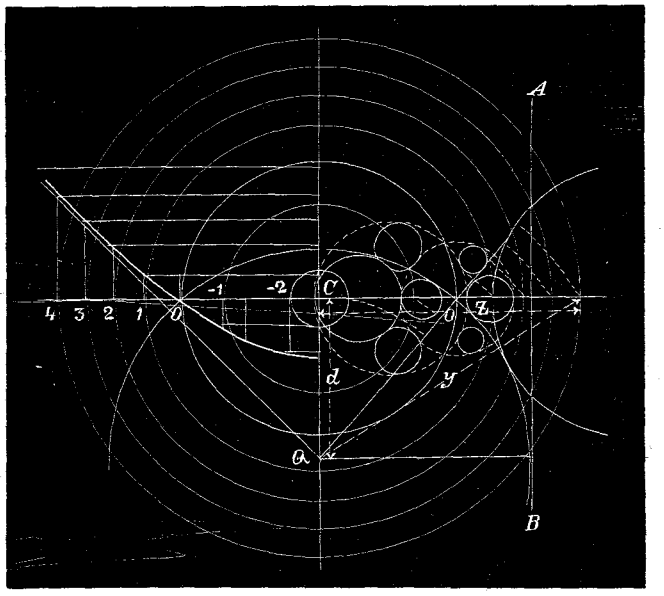
Во всѣхъ случаяхъ мегасферу векторіальныхъ шаровъ можемъ преобразовать въ линейную терцію обратными радіусами, принявъ за центръ преобразованія произвольную точку на сферѣ точечныхъ шаровъ. Понятно, что рѣшеніе задачъ, касающихся мегасферы, настолько же упрощается послѣ этого преобразованія, какъ упрощается рѣшеніе задачъ, касающихся шара, когда мы его преобразуемъ въ плоскость.

Во всѣхъ случаяхъ четыре шара мегасферы однозначно опредѣляютъ сферу, три шара—циклъ шаровъ мегасферы. Во всѣхъ же случаяхъ мегасфера пересѣкается линейною терціею въ сферѣ, линейною секундою въ циклѣ, линейною примою въ двухъ шарахъ мегасферы.

Если возьмемъ два произвольные шара, то ими съ одной стороны, какъ шарами векторіальными, съ другой стороны, какъ шарами обыкновенными, однозначно опредѣляются двѣ линейныя примы съ общею централью. И обратно, если даны двѣ примы съ общею централью, изъ коихъ одна относится къ шарамъ векторіальнымъ, а другая къ шарамъ обыкновеннымъ, то обѣ имѣютъ два общіе шара, или иначе, обѣ пересѣкаются въ двухъ шарахъ.

Всѣмъ изложеннымъ свойства мегасферы векторіальныхъ шаровъ опредѣлились съ такою отчетливостью, что представляется возможность воспроизвести модель мегасферы.

Чтобы придать этой модели наибольшую наглядность, условимся представить центры ея шаровъ въ видѣ примы концентрическихъ шаровъ, а именно такихъ шаровъ, точки поверхности которыхъ есть центры шаровъ, имѣющихъ радіусами величины натуральныхъ чиселъ, начиная отъ 0 въ обѣ стороны. Шаръ центральный для точечныхъ шаровъ (совокупность коихъ онъ самъ и обнимаетъ) представленъ на фигурахъ 4 и 5 утолщеннымъ.



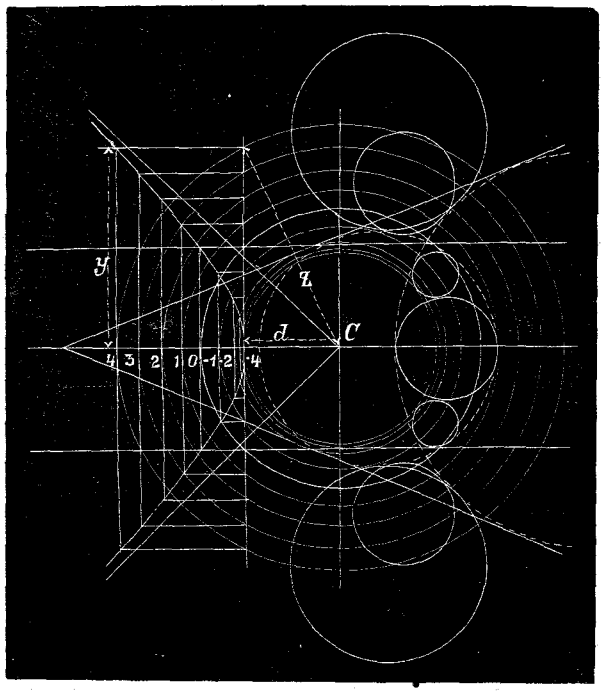
Фиг. 4.

На фиг. 4 представлена модель мегасферы перваго, а на фиг. 5 мегасферы второго разряда.

Въ обоихъ случаяхъ законъ распредѣленія на-

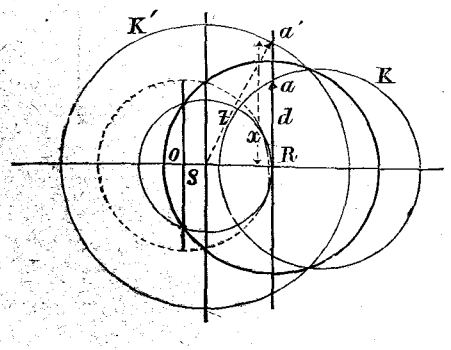
туральнаго ряда центральныхъ шаровъ выражается гиперболою, какъ это видно изъ самихъ фигуръ, и какъ это весьма просто выводится слѣдующимъ образомъ:

Пусть C центръ мегасферы перваго разряда (фиг. 4); точки, отмѣченныя нулемъ—концы діа-



Фиг. 5.

метра сферы точечныхъ шаровъ, AB одна изъ плоскостей мегасферы, а Q—центръ круга, проведеннаго чрезъ нулевыя точки касательно къ плоскости AB (перпендикулярной къ діаметру нулевыхъ то-



Фиг. 6.

чекъ). Отложимъ на радіусѣ круга Q, проведенномъ чрезъ одну изъ нулевыхъ точекъ, рядъ равныхъ отрѣзковъ въ обѣ стороны отъ нулевой точки, чрезъ точки дѣленія проведемъ изъ Q концентрическіе круги до пересѣченія съ діаметромъ нулевыхъ точекъ; полученный рядъ точекъ и будетъ принадлежать поверхностямъ концентрическихъ центральныхъ шаровъ натуральнаго ряда. Если z радіусъ одного изъ этихъ шаровъ, а y радіусъ шаровъ мегасферы, для которыхъ этотъ шаръ есть центральный, увеличенный постоянною величиною d радіуса шара Q, то $y^2 = z^2 + d^2$ или $y^2 - z^2 = d^2$.

Тотъ же выводъ легко сдѣлать и въ самомъ общемъ видѣ. Пусть (фиг. 6) R шаръ преобразованія, o ортогональный шаръ преобразованной линейной терціи (показанный пунктиромъ), ρ шаръ, преобразованный изъ плоскости подобія, K какой-нибудь шаръ линейной терціи, а K' изъ него преобразованный. Означимъ разстояніе отъ какой-нибудь точки a на кругѣ пересѣченія шара K съ плоскостью, касательною къ o въ центрѣ шара R до центра R черезъ d; разстояніе гомологичной точки a' отъ центра R чрезъ x, а до центра ρ черезъ z; подъ y будемъ подразумѣвать радіусъ шара мегасферы, центръ коего есть точка a; пусть k коэфиціентъ, характеристичный для линейной терціи (R, ρ, o радіусы шаровъ).

Имѣемъ [1]) $2\rho . o = R^2$, $z^2 = x^2 + \rho^2$, $x = \frac{R^2 d}{d^2 - r^2}$ (см. форм. B стр. 111), $r = ko$, наконецъ $y = \frac{R^2 r}{d^2 - r^2}$. Исключая изъ этихъ пяти уравненій величины ρ, x, d и r и произведя сокращенія, получаемъ $4ko^2 (z^2 - y^2) = 4oR^2 y + R^4 k$ то есть уравненіе равносторонней гиперболы. Въ частности, $y = 0$ при $z^2 = \left(\frac{R^2}{2o}\right)^2 - \rho^2$, что соотвѣтствуетъ сферѣ точечныхъ шаровъ.

Также для мегасферы второго разряда (фиг. 5) имѣетъ $z^2 = y^2 + d^2$ или $z^2 - y^2 = d^2$.

На обѣихъ фигурахъ 4 и 5 показаны шары мегасферы, входящіе въ составъ сферы, огибаемой двумя шарами, отмѣченные пунктиромъ.

Какъ въ геометріи точекъ главнѣйшими элементами являются линейныя и сферическія совокупности, пользуясь свойствами которыхъ мы выводимъ построенія совокупностей высшихъ порядковъ и классовъ, такъ и въ геометріи шаровъ въ основѣ лежатъ аналогичныя совокупности. При этомъ задача значительно расширилась, такъ какъ здѣсь мы имѣемъ систему четвертой ступени. Результатомъ явились выяснившіяся теперь построенія линейныхъ и сферическихъ совокупностей векторіальныхъ шаровъ. Это открываетъ путь для всѣхъ другихъ построеній, аналогичныхъ построеніямъ геометріи точекъ, насколько

[1]) Форм. C, стр. 111.

они лишь усложняются четырьмя ступенями или измѣреніями.

При построеніяхъ въ системахъ первенствующую роль играютъ преобразованія, а изъ послѣднихъ въ геометріи точекъ особенно выдѣляются преобразованія коллинеарности и обратными радіусами.

Какъ видимъ изъ изложеннаго, въ геометріи векторіальныхъ шаровъ при разсмотрѣніи наиболѣе элементарныхъ вопросовъ постоянно приходилось пользоваться преобразованіями послѣдняго рода, дающими возможность переходить отъ совокупностей линейныхъ къ совокупностямъ сферическимъ.

Но для разсмотрѣнія другихъ вопросовъ, и прежде всего для перехода отъ совокупностей сферическихъ къ совокупностямъ второго порядка вообще, нужно примѣнить коллинеацію, которая до сихъ поръ не была нами разсмотрѣна.

Однако, рѣшеніе этого элементарнѣйшаго вопроса Новой Геометріи не вызываетъ никакихъ затрудненій и почти непосредственно можетъ быть перенесено изъ Геометріи точекъ.

Примемъ шаръ Z (фиг. 7) за центръ коллинеаціи (перспективы), а приму шаровъ a и b за ось коллинеаціи (перспективы), и притомъ шаръ a за шаръ пересѣченія примы шаровъ a и b_1, съ осью: иначе, проведемъ чрезъ a произвольную линейную приму ab_1.

Всякому шару этой примы коллинеаренъ нѣкоторый шаръ, а совокупность всѣхъ шаровъ, коллинеарныхъ шарамъ взятой примы, составитъ новую линейную приму, гомологичную данной. Но и этой новой примѣ будетъ принадлежать шаръ a, какъ находящійся на оси перспективы.

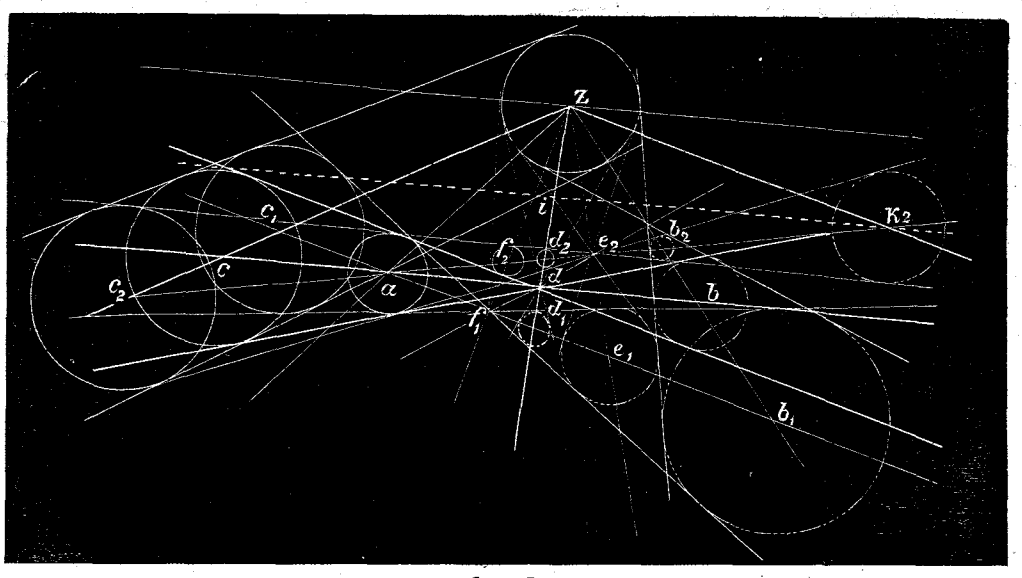
Легко понять, что построеніе нисколько не зависитъ отъ діаметра шаровъ то есть не измѣнится, если мы въ разсмотрѣніи ограничимся точками—центрами шаровъ, а построеніе гомологичныхъ точекъ въ коллинеаціи извѣстно изъ Геометріи точекъ.

Чтобы получить точку c_2, гомологичную точкѣ c_1, нужно провести лучъ Zc_1, и, принявъ Z и c (гдѣ c на плоскости перспективы) за одну пару сопряженныхъ гармоническихъ точекъ, опредѣлить точку c_2, сопряженную точкѣ c_1 въ инволюціи.

Чтобы отъ центровъ перейти къ самимъ шарамъ, нужно только по каждымъ двумъ изъ нихъ построить линейныя примы то есть найти огибающіе круговые конусы и ихъ центры — точечные шары примы. Для этого нужно знать разряды данныхъ шаровъ, которые тоже должны быть даны.

На чертежѣ шары Z и a приняты за шары перваго разряда (положительные), а шары b и b_1 за шары второго разряда (отрицательные).

Тогда послѣдовательно находимъ слѣдующіе шары. По b и b_1 опредѣляемъ шаръ b_2, центръ



Фиг. 7.

коего опредѣляется вышеупомянутымъ построеніемъ. Какъ видимъ, онъ также отрицательный. По двумъ шарамъ a и b и центру c находимъ соотвѣтственный положительный шаръ; по шарамъ c и Z и центрамъ c_1 и c_2 находимъ наконецъ сопряженные положительные шары.

Ясно, что въ коллинеаціи шаровъ, которую, ради опредѣленности, назовемъ сфероколлинеаціей векторіальныхъ шаровъ, сопряженные шары инволюціи вообще разнаго діаметра и могутъ быть различнаго знака, и въ частности шарамъ какого

угодно діаметра могутъ быть сопряжены и шары точечные.

Въ частности, какъ видимъ изъ чертежа, отрицательному шару e_1 гомологиченъ точечный шаръ e_2, и положительному шару f_2 гомологиченъ точечный шаръ f_1, наконецъ положительному шару d_2 гомологиченъ отрицательный шаръ d_1, причемъ шаръ d на оси перспективы есть шаръ точечный.

Такъ какъ при всѣхъ этихъ построеніяхъ мы не выходимъ изъ предѣловъ одной линейной секунды, то значитъ и всѣ вообще шары этой коллинеаціи принадлежатъ одной линейной секундѣ, а потому въ ней имѣется ось подобія или геометрическое мѣсто точечныхъ шаровъ. Ясно, что это и есть прямая $f_1\ d\ e_2$.

Въ этомъ самомъ общемъ видѣ сфероколлинеарныхъ построеній существуетъ безконечное разнообразіе формъ, но всегда основныя свойства коллинеаціи имѣютъ мѣсто, такъ какъ въ основѣ лежитъ обыкновенная коллинеація точекъ.

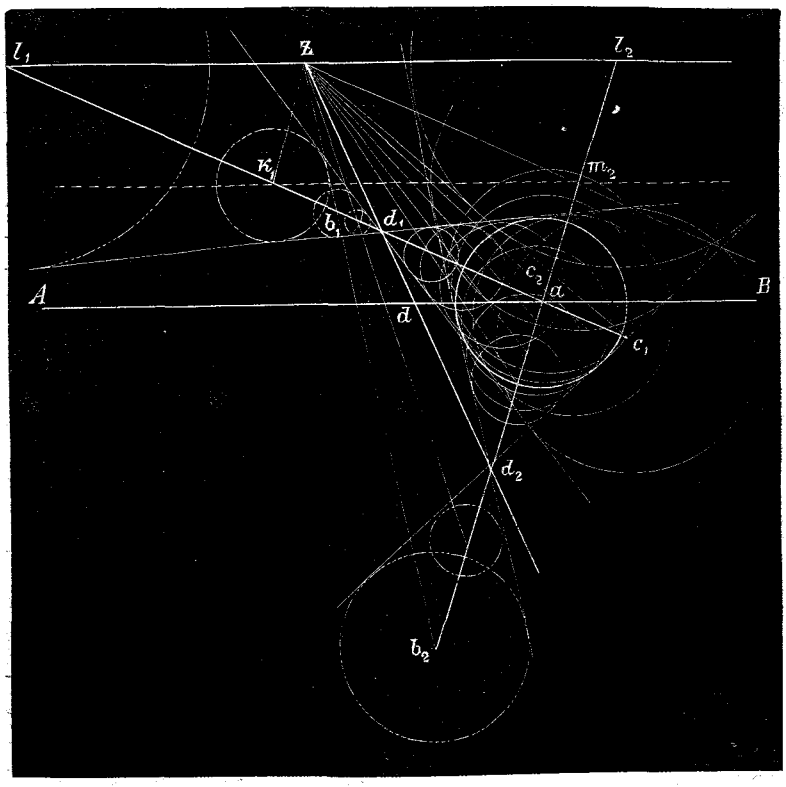
Если проведемъ черезъ Z прямую, параллельную оси перспективы, то эта прямая есть обратная ось перспективы, и гомологичные шары, имѣющіе на ней свои центры одинаково отстоятъ отъ центра Z, но конечно и ихъ діаметръ, и ихъ разрядъ можетъ быть различенъ.

Если проведемъ параллельно тѣмъ же прямымъ прямую посреди между ними (на чертежѣ показана толстымъ пунктиромъ), то это будетъ *ось инволюціи*, и всѣмъ шарамъ, имѣющимъ на ней свои центры напр. k_2, будутъ гомологичны шары, имѣющіе безконечно-удаленные центры.

Если принять, что прямая Zd перпендикулярна къ упомянутымъ прямымъ, то точка i есть *средняя точка инволюціи*. Всякой прямой, перпендикулярной къ осямъ перепективы, гомологична прямая, проходящая чрезъ эту точку. При томъ же допущеніи перпендикулярности точка d есть *средняя точка перспективы*.

Всякой прямой, проходящей чрезъ нея, гомологична прямая, проходящая чрезъ нея же и образующая съ осью перспективы тотъ же уголъ (съ другой стороны). Ясно, что и многія другія теоремы геометріи точекъ, относящіяся къ коллинеаціи, мы можемъ непосредственно отнести къ шарамъ, насколько онѣ относятся къ ихъ центрамъ, но не величинѣ діаметровъ и ихъ разряду.

Вообще, для установленія коллинеарной гомологичности шаровъ намъ нужно принять одинъ шаръ за центръ и еще выбрать линейную терцію за *терцію перспективы*. Когда рѣчь идетъ о преобразованіяхъ общаго характера не играетъ роли индивидуальность избранной системы преобразованія, но особенно важно ее упростить. Шары терціи перспективы самогомологичны, по опредѣленію этой терціи.



Фиг. 8.

На фиг. 8 за центръ перспективы принятъ точечный шаръ z, а за терцію перспективы—линейная терція шаровъ, имѣющая плоскость AB центральною плоскостью всѣхъ шаровъ терціи. Какому-нибудь шару b_1, имѣющему центръ на обратной оси перспективы, гомологиченъ шаръ l_2 того же діаметра и имѣющій центръ на той же оси, но противоположнаго разряда, потому что шары l_1 и l_2 примы раздѣляются точечнымъ шаромъ z. Этимъ опредѣляется построеніе обѣихъ гомологичныхъ примъ шаровъ, какъ показано на фигурѣ. Въ частности, шарамъ k_1 и m_2 гомологичны шары, имѣющіе центръ въ безконечности, такъ какъ центры этихъ шаровъ находятся на оси инволюціи.

При этомъ построеніи каждому точечному шару d_1 гомологиченъ точечный же шаръ d_2. На прямой $z\ d_1\ d_2$ точка d есть тотъ точечный шаръ терціи перспективы, который принадлежитъ примѣ точечныхъ шаровъ.

Во всѣхъ случаяхъ сфероколлинеація преобразуетъ линейныя совокупности въ линейныя же, и

вообще порядокъ совокупностей сохраняется. Въ частности, циклы шаровъ преобразуются въ квадратичныя же примы, сферы въ квадратичныя секунды, а мегасферы въ квадратичныя терціи.

II. Система шаровъ обыкновенныхъ.

Въ противоположность системѣ шаровъ векторіальныхъ въ существующей литературѣ разработанъ вопросъ о линейныхъ совокупностяхъ обыкновенныхъ шаровъ, но не разработанъ вопросъ о совокупностяхъ сферическихъ. Не дано даже способа преобразованія линейныхъ совокупностей въ сферическія. Въ связи съ этимъ стоитъ то, что имѣется только преобразованіе линейныхъ совокупностей въ линейныя же, а именно преобразованіе обратными радіусами.

Здѣсь прежде всего обращаетъ на себя вниманіе то обстоятельство, что тотъ же самый способъ преобразованія обратными радіусами, который въ геометріи векторіальныхъ шаровъ служитъ для преобразованія линейныхъ совокупностей въ сферическія, здѣсь имѣетъ совершенно другое значеніе, а именно служитъ сфероколлинеаціей.

Правда, что и здѣсь понятіе сфероколлинеаціи можетъ быть расширено; напр., можно сфероколлинеацію обусловить тѣмъ, что дается точечный шаръ Z, какъ центръ перспективы и линейная терція, имѣющая общую центральную плоскость (симметричная), какъ терція перспективы; но при преобразованіи на каждомъ лучѣ, исходящемъ изъ Z какъ изъ центра, слѣдуетъ за двѣ постоянныя точки принять Z и центръ, находящійся на центральной плоскости терціи перспективы [1]); но такъ какъ для общихъ выводовъ не имѣютъ значенія индивидуальныя условія преобразованія, а главное значеніе имѣетъ простота, то и способъ преобразованія обратными радіусами достаточенъ.

Но если способъ преобразованія обратными радіусами получаетъ значеніе сфероколлинеаціи, то теперь прежде всего нужно выработать тотъ способъ преобразованія, который изъ линейныхъ совокупностей создастъ совокупности сферическія. Ради опредѣленности, назовемъ такія преобразованія *реципрочными*, а создаваемую ими гомологичность — *реципрочностью*.

Въ такомъ случаѣ можемъ сказать, что преобразованіе обратными радіусами есть реципрочное для векторіальныхъ шаровъ и сфероколлинеарное для шаровъ обыкновенныхъ.

Теперь нужно найти способъ *преобразованія реципрочнаго для шаровъ обыкновенныхъ*.

Въ статьѣ „Точное изображеніе точекъ пространства на плоскости“ [1]) доказано, что сфера шаровъ обыкновенныхъ характеризуется тѣмъ, что ея совокупность центровъ есть шаръ, а сама принадлежитъ нѣкоторой линейной терціи. Отсюда слѣдуетъ, что при искомомъ преобразованіи прежде всего нужно преобразовывать центры шаровъ тѣмъ же пріемомъ, какой дѣйствителенъ для всѣхъ точекъ вообще при примѣненіи преобразованія обратными радіусами. Тогда совершенно ясно, что вообще линейныя совокупности преобразуются въ сферическія, если только будетъ соблюдено второе упомянутое условіе, опредѣляющее діаметръ преобразованнаго шара.

Но легко вывести и вторую часть построенія, вытекающую изъ поставленныхъ условій. Дѣло идетъ о той терціи, которой принадлежитъ данная сфера шаровъ.

Для рѣшенія вопроса примемъ, что центральный шаръ сферы и есть шаръ реципрочнаго преобразованія. Въ такомъ случаѣ, по опредѣленію сферы, она, въ частности каждый составляющій ее шаръ, должны преобразоваться сами въ себя. Но разъ нетолько всѣ шары сферы, но и самъ центральный шаръ преобразуются сами въ себя, то значитъ и этотъ послѣдній шаръ принадлежитъ той же преобразованной терціи, что и всѣ шары совокупности.

Итакъ реципрочное преобразованіе обыкновенныхъ шаровъ состоитъ въ преобразованіи ихъ центровъ тѣмъ же пріемомъ, что и по способу обратныхъ радіусовъ, а діаметръ преобразованныхъ шаровъ опредѣляется принадлежностью ихъ тѣмъ же линейнымъ примамъ, что шары преобразуемые и шаръ преобразованія.

Въ частности, если Z шаръ преобразованія (фиг. 9), и данъ шаръ a, пересѣкающій первый въ кругѣ, то, найдя точку a', реципрочную точкѣ a, затѣмъ чрезъ тотъ же кругъ пересѣченія проведемъ шаръ, который и будетъ реципрочнымъ по отношенію къ шару и имѣть центръ въ точкѣ a'.

Если данъ шаръ b, лежащій внѣ шара преобразованія, то опять сначала получимъ центръ b' реципрочнаго шара, какъ точку, реципрочную центру b, а затѣмъ построимъ по отношенію къ b и Z ортогональный шаръ O, и искомый шаръ b', долженъ

[1]) Само собою разумѣется, что линейныя примы, для которыхъ такимъ образомъ находятся централи, есть примы шаровъ обыкновенныхъ, а не векторіальныхъ.

[1]) Записки Горн. Инст. I стр. 66.

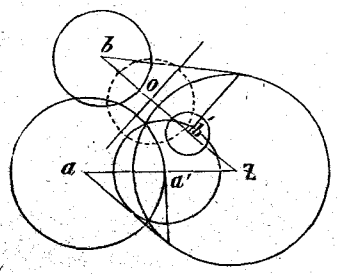
прямоугольно пересѣкать тотъ же ортогональный шаръ. Плоскость, перпендикулярная къ централи bZ и проходящая чрезъ центръ O ортогональнаго шара, есть радикальная плоскость примы.

Если, наконецъ данъ шаръ b', находящійся внутри шара преобразованія, то построеніе шара b, ему реципрочнаго, прямо вытекаетъ изъ только-что сказаннаго.

Ясно, что въ томъ частномъ случаѣ, когда данъ шаръ касательный, то и реципрочный ему шаръ есть шаръ, касательный въ той же точкѣ шара преобразованія.

Точечному шару и при этомъ преобразованіи реципроченъ точечный же шаръ, потому что каждый изъ двухъ точечныхъ шаровъ примы есть, по отношенію ко всѣмъ шарамъ примы, полюсъ плоскости, проходящей чрезъ другой точечный шаръ. Для этихъ шаровъ различія между реципрочнымъ преобразованіемъ обыкновенныхъ шаровъ и преобразованіемъ обратными радіусами не существуетъ.

Если нужно преобразовать плоскость, то при данномъ преобразованіи она является радикальною плоскостью примы, а потому ея полюсъ въ примѣ есть центръ шара преобразованія (онъ же точка реципрочная всѣмъ безконечно-удаленнымъ центрамъ), и преобразованный шаръ есть самъ шаръ преобразованія.



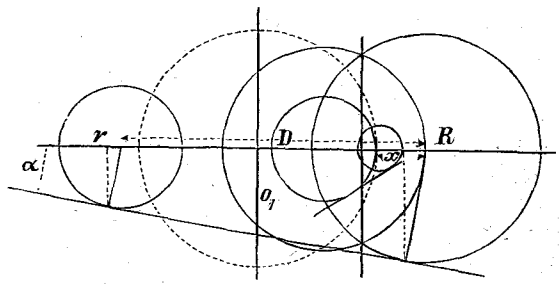
Фиг. 9.

Итакъ шаръ преобразованія самъ по себѣ реципроченъ всѣмъ плоскостямъ пространства. Иначе: самому шару преобразованія нѣтъ опредѣленнаго реципрочнаго, а таковою можетъ явиться каждая плоскость, гдѣ бы она ни находилась.

Отсюда слѣдуетъ, что если шаръ преобразованія не входитъ въ составъ преобразуемой системы, то въ преобразованной системѣ шаровъ вовсе нѣтъ плоскостей.

Шару, концентричному съ шаромъ преобразованія, реципрочны шары той же, концентричной, примы, но имѣющіе центры въ безконечности то есть безконечно удаленныя плоскости.

Означимъ радіусъ шара преобразованія чрезъ R, преобразуемаго r, преобразованнаго y; разстояніе центровъ шаровъ R и r чрезъ D, а центровъ шаровъ R и y чрезъ x (фиг. 10).



Фиг. 10.

Прежде всего ясно, что $x\,D = R^2$ или $x = \frac{R^2}{D}$. 1).

Проведемъ внѣшній конусъ, касательный къ шарамъ r и R; означимъ уголъ растворенія конуса чрезъ α, разстояніе центра конуса отъ центра R чрезъ l. Какъ извѣстно, средняя плоскость между плоскостями, проходящими чрезъ круги касательныхъ точекъ, есть радикальная плоскость примы шаровъ r R, а точка ея пересѣченіе съ осью конуса есть центръ ортогональнаго шара примы; означимъ радіусъ этого шара (отмѣченнаго пунктиромъ) чрезъ o_1, а разстояніе его центра отъ центра шара r чрезъ k(x — разстояніе центра преобразованнаго шара отъ центра шара R, y—радіусъ послѣдняго).

Имѣемъ слѣдующія соотношенія:

$\frac{l}{l-D} = \frac{R}{r}$ или $\frac{R}{l} = \frac{R-r}{D}$; но также $\frac{R}{l} = sin\ \alpha$;

$k + r\,sin\,\alpha = D - k - R\,sin\,\alpha$ или

$2k = D - (R+r)\ sin\ \alpha = D - \frac{(R+r)\,R-r)}{D}$;

$k^2 = r^2 + o_1{}^2$, и $y^2 + o_1{}^2 = (D-k-x)^2 = D^2 + k^2 + x^2 - 2\ (kD + x\,D - kx)$.

Подставляя соотвѣтственныя значенія и произведя сокращенія, получаемъ окончательно $y = \pm \frac{Rr}{D}$ ... 2)

Изъ этого выраженія легко получаемъ разсмотрѣнные уже частные случаи, а именно:

при $r = 0$, также $y = 0$

при $D = R$ $y = r$ (понятно также $x = R$)

при $D = \infty$ $x = 0$, $y = 0$

при $D = \infty$ и одновременно $r = \infty$ имѣемъ $x = 0$, $y = {}^0/_0$.

при $D = 0$ и конечномъ значеніи r имѣемъ $x = \infty$, $y = \infty$ то есть шарамъ, концентрическимъ съ шаромъ преобразованія, гомологичны плоскости.

Опредѣливъ свойства реципрочнаго преобразованія обыкновенныхъ шаровъ, мы можемъ непосредственно

перейти къ опредѣленію *мегасферы обыкновенныхъ шаровъ* какъ реципрочно преобразованной линейной терціи. Отсюда слѣдуетъ и обратный выводъ, что всякая вообще мегасфера можетъ быть реципрочно преобразована въ линейную терцію.

Для того, чтобы изучить свойства этого преобразованія, мы должны принять во вниманіе, что въ системѣ обыкновенныхъ шаровъ различаются шары двоякаго рода: вещественные и мнимые (также какъ въ системѣ векторіальныхъ шаровъ различаются шары положительные и отрицательные).

Всякіе четыре шара однозначно опредѣляютъ *нетолько линейную терцію, но и сферу шаровъ; но* это только въ томъ случаѣ, если извѣстно, какіе изъ нихъ вещественные и какіе мнимые. Если же этого не дано, то можно сдѣлать рядъ предположеній, совершенно такой же, какъ если неизвѣстно, какіе изъ четырехъ данныхъ векторіальныхъ шаровъ положительные и какіе отрицательные; другими словами, и здѣсь, если не дано упомянутого условія, можетъ быть восемь различныхъ рѣшеній, и только одно изъ нихъ относится къ нимъ, какъ къ шарамъ одинакового разряда. Только въ этомъ послѣднемъ случаѣ центръ ортогональнаго шара (той линейной терціи, которой они принадлежатъ) есть радикальный центръ то есть вообще имѣется точка, въ которой степень всѣхъ четырехъ шаровъ одинакова, потому что къ мнимымъ шарамъ линейной терціи одинаковость степени не относится.

Съ этой обобщенной точки зрѣнія линейная терція опредѣляется не величиною степени, а ортогональнымъ шаромъ, вещественнымъ или мнимымъ; и первая возникающая задача есть построеніе по четыремъ даннымъ шарамъ, относительно которыхъ извѣстно, какіе изъ нихъ вещественные и какіе мнимые, ортогональнаго шара.

Рѣшеніе этой задачи вполнѣ опредѣляется рѣшеніемъ задачи построенія линейной примы (то есть напримѣръ нахожденія радикальной плоскости) по двумъ даннымъ шарамъ, а это рѣшеніе подробно изложено вначалѣ статьи „Точное изображеніе точекъ пространства на плоскости“ [1]).

Если даны четыре шара A, B, C, D, то все равно, какіе изъ нихъ вещественные и какіе мнимые, лишь бы это было извѣстно, мы можемъ построить три примы AB, AC, AD, то есть найти три радикальныя плоскости этихъ примъ, а точка пересѣченія этихъ трехъ плоскостей и есть истинный радикальный центръ, точнѣе центръ ортогональнаго шара, вещественнаго или мнимаго. Если напр. шары C и D мнимые, которые для отличія отмѣтимъ какъ C' и D', то конечно примы AC' и AD' построятся иначе, чѣмъ примы AC и AD, если C и D тѣ же шары, но принятые за вещественные.

Обычное построеніе радикальнаго центра и ортогональнаго шара относится только къ шарамъ вещественнымъ.

Теперь проведемъ шаръ чрезъ центры четырехъ данныхъ шаровъ и примемъ его за *центральный шаръ* сферы шаровъ то есть совокупности такихъ шаровъ, которые принадлежатъ найденной данной линейной терціи и имѣютъ центрами точки на центральномъ шарѣ.

Если въ предѣлахъ линейной терціи возьмемъ произвольную приму шаровъ, то ясно, что можно терцію разложить на приму сферъ, для которыхъ эти шары есть центральные; но у каждой сферы будетъ свой центральный шаръ, а ортогональный шаръ будетъ общимъ для всѣхъ.

Въ частности, мы можемъ разложить терцію на приму концентрическихъ сферъ, центральные шары которыхъ концентричны съ ортогональнымъ шаромъ примы. Особенность этихъ сферъ будетъ равенство всѣхъ, входящихъ въ ихъ составъ, шаровъ.

Въ терціяхъ перваго разряда, кромѣ общаго для всѣхъ сферъ ортогональнаго шара O, будетъ имѣться еще концентрическій съ нимъ шаръ O_1, для каждой сферы отдѣльно, который тоже можно назвать ортогональнымъ, если шары сферы принять за мнимые (точнѣе, если вообще перемѣнить разрядъ шаровъ). Съ другой стороны, если принять центральный шаръ C сферы за шаръ реципрочнаго преобразованія, то сфера преобразуется сама въ себя, тогда какъ вся терція преобразуется въ мегасферу.

Въ частности, если за шаръ реципрочнаго преобразованія примемъ именно шаръ O, то составъ шаровъ мегасферы будетъ тотъ же, что и шаровъ линейной терціи, и лишь измѣнится ихъ разрядъ, то есть вещественные шары станутъ мнимыми, и наоборотъ.

Съ этой точки зрѣнія каждая сфера шаровъ имѣетъ два ортогональные шара O и O_1, смотря потому, будемъ ли входящіе въ ея составъ шары считать за вещественные или мнимые, и потому произвольную сферу шаровъ можно опредѣлить двумя ортогональными шарами O и O_1, и вмѣстѣ съ тѣмъ непосредственно опредѣляется и радикальная плоскость P примы OO_1. Ясно, что къ той же примѣ отнесется и центральный шаръ C сферы, потому что, принявъ его за шаръ реципрочнаго преобразованія, мы тождественно сохраняемъ сферу; а зна-

[1]) Записки Горнаго Института I стр. 54 и сл.

читъ и этотъ шаръ принадлежитъ той же совокупности, однозначно опредѣляемой шарами OO_1 то есть линейной примѣ.

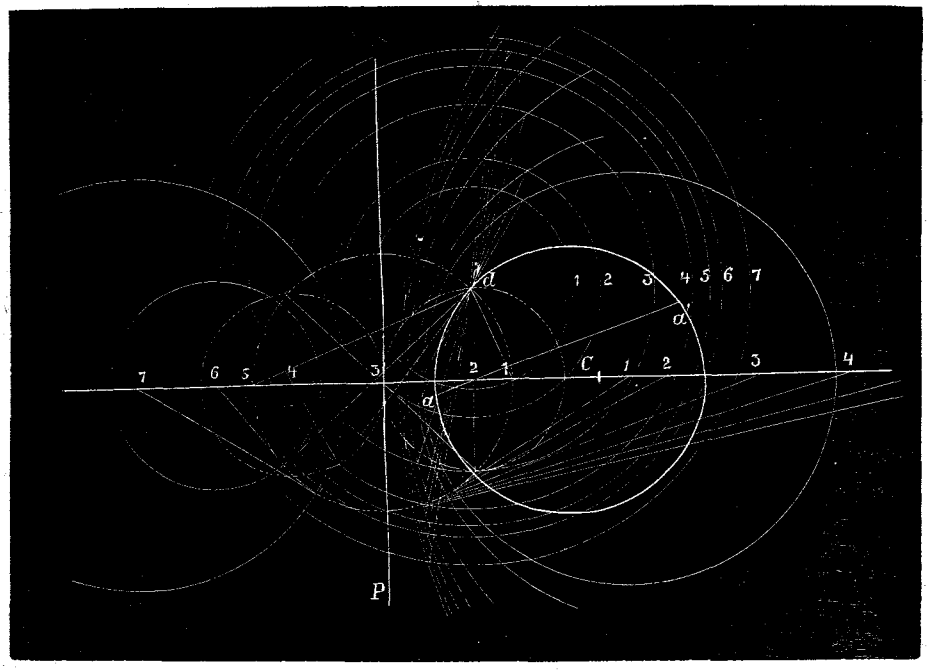
Въ этой совокупности на шары O и O_1 мы можемъ смотрѣть какъ на перемѣнные элементы инволюціи, опредѣляемой постоянными элементами C и P, которые будутъ двойными ея элементами. Въ самомъ дѣлѣ, если шаръ O примемъ тождественнымъ съ C, то съ нимъ же станетъ тождественнымъ и шаръ O_1 (сфера точечныхъ шаровъ), а если O примемъ тождественнымъ съ плоскостью P, то съ нею же станетъ тождественнымъ и шаръ O_1 (въ этомъ случаѣ шары сферы—безконечно-удаленныя плоскости).

Такъ какъ изъ четырехъ гармоническихъ точекъ центровъ O, O_1, C и P — послѣдняя безконечно удалена, то равны отрѣзки OC и OC_1.

Ради нагляднаго поясненія приведемъ фиг. 11.

этимъ шарамъ всѣ шары сферы вещественны, а по отношенію къ центральнымъ шарамъ другой стороны тѣ же шары есть шары мнимые, какъ это видно на примѣрѣ тѣхъ шаровъ сферы, за центры коихъ взята общая точка d на центральномъ шарѣ. Понятно, что эту точку можно взять совершенно произвольно на поверхности того же шара.

Изъ всего изложеннаго видимъ, что въ примѣ сферъ, имѣющихъ общій центральный шаръ C, точки централи примы составляютъ инволюцію, въ которой двойными точками являются центръ этого шара C и точка безконечно-удаленная а сопряженными (гармонически) являются центры двухъ сопряженныхъ ортогональныхъ шаровъ одной и той же сферы, изъ коихъ одинъ относится къ шарамъ этой сферы какъ вещественный, а другой къ нимъ же какъ мнимымъ.



Фиг. 11.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ * 1923 * ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

Въ ней утолщенный шаръ C принятъ постояннымъ центральнымъ шаромъ инволюціи, также какъ радикальная плоскость P примы центральныхъ шаровъ. Изъ послѣднихъ приведены и перенумерованы семь паръ шаровъ, изъ коихъ центры шаровъ одной пары слѣдуютъ въ одномъ, а центры шаровъ другой въ противоположномъ направленіи отъ центра C. Первый и пятый центральные шары одной стороны есть шары точечные въ примѣ; шары, центры коихъ находятся между ними, есть шары мнимые, а шары шестой и седьмой вещественны. По отношенію къ

Если по отношенію къ центральному шару C воспроизведемъ полюсъ радикальной плоскости P (это будетъ центръ шара *2*) и примемъ послѣдній за центръ перспективы, а плоскость P за плоскость перспективы, то, самъ шаръ C (также какъ и всѣ шары построенной примы) отнесется къ числу самоколлинеарныхъ шаровъ [1]). Поэтому, если чрезъ центръ *2* проведемъ лучъ, который пересѣчетъ центральный шаръ въ точкахъ a и a', то эти точки

[1]) Новая Геометрія II, 29.

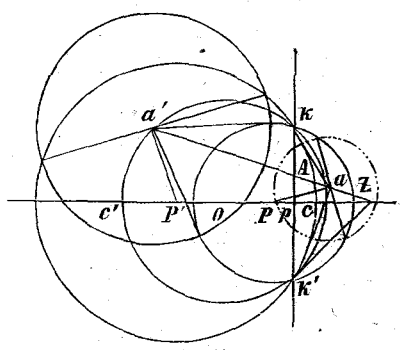
будутъ гомологичными точками коллинеаціи, совершенно независимо отъ того, къ какой сферѣ относится данный центральный шаръ, лишь бы сопряженные ортогональные шары сферы принадлежали той же примѣ.

Изъ этихъ двухъ сопряженныхъ центровъ одинъ относится къ шару вещественному, а другой къ шару мнимому той же сферы.

Поэтому, если въ сферѣ имѣются точечные шары (причемъ сама сфера не есть сфера точечныхъ шаровъ), то таковые будутъ двойными точками этой инволюціи.

Это именно имѣетъ мѣсто, когда радикальная плоскость P пересѣкаетъ центральный шаръ C.

На фигурѣ 12 именно и изображенъ тотъ случай, когда оба ортогональные шара, имѣющіе центрами P и P', пересѣкаются въ точкахъ общаго точечнаго круга, имѣющаго діаметромъ kk'; чрезъ тотъ же кругъ, конечно, проходитъ и центральный шаръ сферы, имѣющій центромъ точку O то есть средину отрѣзка PP'.



Фиг. 12.

Если примемъ плоскость круга kk' за плоскость перспективы, а полюсъ Z этой плоскости по отношенію къ центральному шару за центръ перспективы то между шарами обоихъ разрядовъ въ сферѣ шаровъ установится однозначная проективность, выражающаяся въ томъ, что центры обоихъ шаровъ, напр., a и a' есть точки коллинеарныя (ср. Новая Геометрія II, 28; ради наглядности на этой фигурѣ въ соотвѣтственныхъ точкахъ выставлены тѣ же буквы, что и на фиг. 22 руководства).

Остановимся на какой-нибудь одиночной сферѣ, характеризуемой сопряженными ортогональными шарами O и O_1, гдѣ O_1 относится къ ея шарамъ какъ мнимымъ. Сфера эта есть пересѣченіе линейной терціи O съ мегасферою, полученной изъ нѣкоторой терціи O_1 реципрочнымъ преобразованіемъ. Мы возстановимъ эту линейную терцію, если произведемъ обратное реципрочное преобразованіе, а двѣ линейныя терціи пересѣкутся уже не въ сферѣ съ центральнымъ шаромъ C, а въ линейной секундѣ, характеризующейся примою ортогональныхъ шаровъ OO_1, или иначе кругомъ пересѣченія этихъ двухъ шаровъ, вещественнымъ или мнимымъ [1]).

Но плоскость этого круга и есть радикальная плоскость P. Она, слѣдовательно, есть централь секунды шаровъ, общихъ для обѣихъ терцій. Если она вещественно пересѣкается шаромъ C, то кругъ пересѣченія есть геометрическое мѣсто общихъ шаровъ терціи O и мегасферы, потому что при реципрочномъ преобразованіи шары, центры коихъ на поверхности шара C, самогомологичны.

Изъ этого слѣдуетъ, что (линейная) прима (линейныхъ) терцій шаровъ то есть совокупность, ортогональные шары которой образуютъ линейную приму, пересѣкается въ одной и той же линейной секундѣ (P). Слѣдовательно, и обратно: совокупность ортогональныхъ шаровъ (линейныхъ) терцій, имѣющихъ общую линейную секунду, есть линейная прима.

Произвольно взятая линейная прима шаровъ *реципрочно преобразуется шаромъ* R въ циклъ шаровъ, принадлежащій секундѣ, опредѣляемой тою же примой и шаромъ R. И обратно, каждый данный циклъ шаровъ реципрочно преобразуется каждымъ шаромъ, входящимъ въ его составъ, въ опредѣленную линейную приму, которая получается изъ двухъ преобразованныхъ ею шаровъ, потому что только изъ этой примы и шара S цикла получится совокупность, имѣющая центрами тотъ же кругъ и принадлежащая той же линейной секундѣ.

Въ частности, если шаръ преобразованія имѣетъ центръ на централи примы, то и циклъ, полученный послѣ преобразованія будетъ имѣть ту же центральную прямую какъ кругъ безконечно-большого радіуса.

Теперь изслѣдуемъ свойства мегасферы, получаемой реципрочнымъ преобразованіемъ съ даннымъ, произвольно взятымъ, шаромъ преобразованія линейной терціи.

Пусть ортогональный шаръ данной терціи есть O, а шаръ преобразованія R.

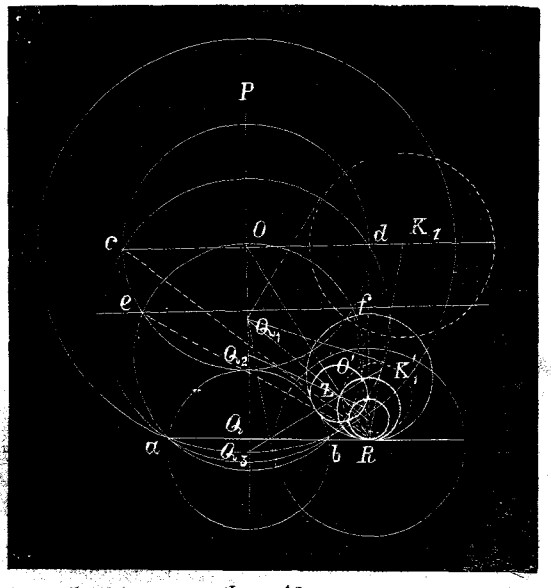
Линейная прима, опредѣляемая шарами K_1 и K_2, преобразуется въ циклъ шаровъ съ преобразованными шарами K_1' и K_2'. Этотъ циклъ принадлежитъ линейной секундѣ, опредѣляемой кромѣ этихъ двухъ шаровъ еще шаромъ R, причемъ R есть преобразованная радикальная плоскость p примы. Но такъ какъ эту

[1]) Тамъ-же VI, 3.

плоскость мы можемъ ввести какъ опредѣляющую линейную приму, то для полнаго опредѣленія послѣдней достаточно имѣть одинъ шаръ K_1.

Данною радикальною плоскостью и шаромъ K_1 вполнѣ опредѣляется и централь примы, а слѣдовательно, послѣ преобразованія, и центральный кругъ цикла шаровъ; этою примою и шаромъ R опредѣляются всѣ элементы линейной секунды, въ составъ которой войдутъ шары цикла. Но отдѣльно даннымъ преобразованнымъ шаромъ K_1' и шаромъ R эта секунда еще не опредѣляется, почему такое заданіе недостаточно.

Означимъ ортогональный кругъ этой секунды черезъ O_1 и возьмемъ еще произвольный шаръ K_3 съ центромъ въ той же общей центральной плоскости секунды (фиг. 13).



Фиг. 13.

Три данные шара опредѣляютъ секунду, ортогональный кругъ которой означимъ чрезъ O. Если это точечный циклъ, то въ преобразованной совокупности получится преобразованный точечный циклъ O', причемъ O, R и O' принадлежатъ одной линейной примѣ. Плоскость p будетъ принадлежать и секундѣ K_1 K_2 K_3, и проходить чрезъ центръ круга O_1; поэтому, если данъ слѣдъ этой плоскости на плоскости центровъ, то для опредѣленія ортогональнаго круга секунды, коей принадлежитъ преобразованный циклъ шаровъ, достаточно, кромѣ шара R, имѣетъ еще одинъ изъ преобразованныхъ шаровъ K_1' или K_2': отысканіе круга O_1 сводится къ отысканію ортогональнаго круга секунды, опредѣляемой двумя шарами R и K_1' и имѣющаго центръ на слѣду плоскости p.

Если данъ еще шаръ K_3, то, получивъ преобразованный шаръ K_3', легко найдемъ и другой циклъ шаровъ, представляющій преобразованную приму, опредѣляемую шаромъ K_3' и плоскостью p. По только что сказанному найдемъ ортогональный кругъ Q_2, а центральный кругъ цикла опредѣлится тѣмъ, что онъ пройдетъ чрезъ центръ, R шара преобразованія, чрезъ центръ шара K_3', а центръ его находится на прямой, параллельной слѣду плоскости p и проходящей чрезъ центръ R.

Но тремя шарами K_1, K_2, K_3 вполнѣ опредѣляется линейная секунда, которую можемъ разсматривать какъ приму примъ съ централями, перпендикулярными къ плоскости p то есть параллельными между собою. Каждой изъ этихъ примъ гомологиченъ циклъ шаровъ, имѣющій общій шаръ R, а всѣ центральные круги этихъ цикловъ составятъ приму круговъ, имѣющихъ общую точку касанія — центръ шара R и общую централь, параллельную слѣду плоскости p.

Съ другой стороны, каждому изъ цикловъ принадлежитъ свой ортогональный кругъ ряда Q, причемъ всѣ эти круги будутъ имѣть своими центрами слѣдъ плоскости p, и всѣ будутъ ортогональными по отношенію къ шару R. Слѣдовательно, совокупность шаровъ Q есть также линейная прима.

Въ частности, если возьмемъ приму, имѣющую централью прямую ab (фиг. 13) и проходящую чрезъ центръ шара R, то эта централь преобразуется сама въ себя, а центръ ортогональнаго круга секунды будетъ въ безконечности, такъ какъ въ составъ ея войдутъ кромѣ шара R еще одинъ шаръ, концентрическій съ нимъ, но принадлежащій данной секундѣ; ортогональными же шарами по отношенію къ концентрическимъ могутъ быть лишь центральныя плоскости.

Если за централь примы примемъ ту, которая находится въ безконечности, то преобразованіе ея даетъ точечный циклъ, а именно центръ шара R, а шары этой примы станутъ центральными (діаметральными) плоскостями круга O; ортогональный кругъ такой примы можетъ имѣть центръ лишь въ центрѣ примы, то-есть въ данномъ случаѣ въ центрѣ шара O. Но такъ какъ и ортогональный кругъ даннаго случая принадлежитъ къ примѣ ортогональныхъ круговъ Q, то значитъ онъ долженъ проходить чрезъ точки a и b пересѣченія всѣхъ вообще ортогональныхъ шаровъ съ прямою RQ.

Отсюда видимъ, что примы этихъ круговъ и центральныхъ круговъ цикловъ есть примы сопряженныя, однозначно проективныя, потому что въ каж-

домъ циклѣ принадлежитъ по одному кругу той и другой; кромѣ того имѣемъ, что централи обѣихъ примъ параллельны между собою, и кругу съ безконечно-удаленнымъ центромъ гомологиченъ кругъ съ безконечно же удаленнымъ центромъ. Отсюда заключаемъ, что примы центровъ круговъ обѣихъ системъ есть примы подобныя. Центръ подобія Z легко устанавливается по пересѣченіи прямой OR съ какою-нибудь прямой, соединяющею два гомологичные центра.

Такимъ образомъ изъ данной линейной секунды (съ ортогональнымъ кругомъ O) получаемъ *мегациклъ* шаровъ, центральные круги которыхъ образуютъ линейную приму съ общею точкою касанія R и находимъ соотвѣтствіе каждаго изъ этихъ круговъ съ ортогональнымъ кругомъ той линейной секунды, которой принадлежитъ данный циклъ шаровъ.

Итакъ, мегациклъ въ пересѣченіи съ одною изъ секундъ, опредѣляемыхъ ортогональными кругами Q, даетъ циклъ шаровъ; причемъ всѣ циклы имѣютъ общій шаръ R, то-есть шаръ преобразованія.

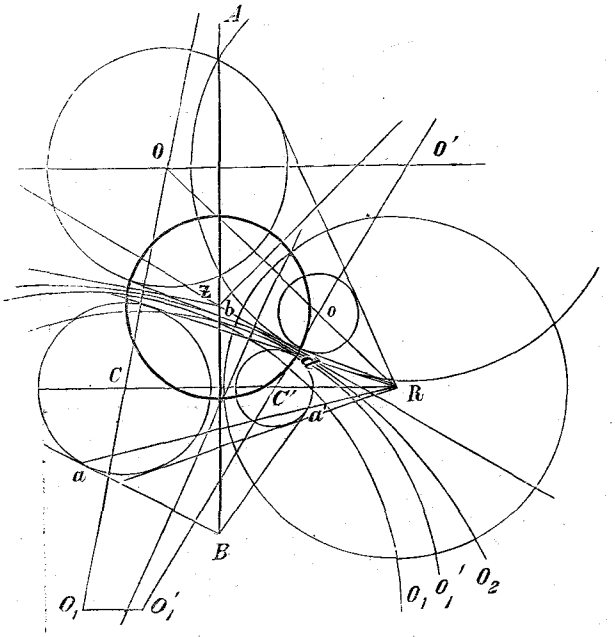
Если въ линейной секундѣ ортогональный кругъ есть циклъ точечныхъ шаровъ, то таковой же имѣется и въ мегациклѣ (а именно O'). Всѣ тѣ циклы, центральные круги которыхъ пересѣкаются съ нимъ, даютъ въ пересѣченіи два точечные шара. Послѣдніе получаются прямо проведеніемъ лучей Rc и Rd, или Re и Rf и опредѣленіемъ точекъ ихъ пересѣченія съ центральными кругами соотвѣтственныхъ цикловъ.

Въ частности, имѣется циклъ съ однимъ точечнымъ шаромъ, а именно тотъ, для котораго ортогональный кругъ секунды есть кругъ Qs, касательный къ кругу O.

Ясно, что отъ примъ съ параллельными централями мы можемъ непосредственно перейти къ секундамъ съ параллельными центральными плоскостями; при этомъ плоскость p придется замѣнить перпендикуляромъ къ этимъ плоскостямъ. Приведенныя построенія отнесутся къ плоскости, проходящей чрезъ перпендикуляръ p и центръ R; циклы замѣнятся сферами, а мегациклъ мегасферою.

Теперь перейдемъ къ общему случаю реципрочнаго преобразованія данной сферы шаровъ и полученія мегасферы изъ линейной терціи.

Пусть дана *линейная терція* (фиг. 14), опредѣляемая ортогональнымъ шаромъ O и возьмемъ въ ней произвольный шаръ C, принявъ его за центральный шаръ сферы. Имѣя ортогональный шаръ O и центральный шаръ C сферы шаровъ, мы вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣляемъ и другой, перемѣнный ортогональный шаръ сферы O_1, принадлежащій той же примѣ шаровъ (простымъ отложеніемъ равныхъ разстояній отъ C въ обѣ стороны то есть $OC = CO_1$).



Фиг. 14.

Пусть R шаръ преобразованія.

Прежде всего требуется найти центральный шаръ C' и ортогональный шаръ O' преобразованной сферы.

Допустимъ, что мы нашли эти шары.

Ясно, что шары O и O' опредѣляютъ приму и ея радикальную плоскость AB, въ точкахъ которой оба шара имѣютъ равную степень. Но вѣдь это означаетъ, что точки этой плоскости есть центры шаровъ, одновременно принадлежащихъ и терціи O' то есть представляютъ точки центральной плоскости секунды, въ которой пересѣкаются обѣ линейныя терціи.

Если шаръ C, какъ сферу точекъ, преобразуемъ обратными радіусами, получимъ сферу точекъ C' какъ центральный шаръ преобразованной сферы шаровъ и притомъ всѣ три шара C, R и C' принадлежатъ одной и той же примѣ.

Нетрудно доказать, что радикальная плоскость этой примы есть та же центральная плоскость AB секунды пересѣченія обѣихъ терцій O и O'.

Въ самомъ дѣлѣ, между обѣими терціями мы можемъ установить по шарамъ C и C' связь коллинеарности: нетолько каждой точкѣ a шара C однозначно соотвѣтствуетъ точка a' на шарѣ C', но

и касательной aB, какъ централи линейной примы, однозначно соотвѣтствуетъ касательная $a'B$, какъ централь примы гомологичной терціи, и обѣ централи, какъ гомологичныя (гомологичность же примъ вытекаетъ какъ слѣдствіе ихъ опредѣленія двумя безконечно-близкими гомологичными шарами, имѣющими центры около a на C и около a' на C' въ предѣлѣ), пересѣкаются въ центрѣ B общаго шара для обѣихъ примъ, а слѣдовательно и обѣихъ терціи, и значитъ находится на центральной плоскости секунды пересѣченія. Такъ какъ всѣ гомологичныя точки обоихъ шаровъ C и C' соединяются лучами въ центрѣ R, то это соотношеніе представитъ случай перспективнаго положенія двухъ подобныхъ системъ [1]); плоскостью перспективы такихъ двухъ системъ является радикальная плоскость примы двухъ коллинеарныхъ шаровъ. Итакъ, радикальная плоскость этой примы, также какъ и примы OO', есть одна и та же плоскость AB.

Поэтому, если по тремъ шарамъ O, C и R найдемъ радикальную ось и ортогональный кругъ Z линейной секунды, то той же секундѣ будутъ принадлежать, кромѣ взятыхъ шаровъ, и шары O' C', также какъ и сопряженные ортогональные шары обѣихъ сферъ то есть шары O_1 и O'_1. Къ этой же секундѣ отнесется и сфера точечныхъ шаровъ o, получаемая преобразованіемъ шара O (если послѣдній есть вещественный ортогональный шаръ).

Такимъ образомъ линейная прима шаровъ OCO_1 преобразуется (обратными радіусами) въ линейную же приму oC'; а если продолжимъ обѣ централи примъ до взаимнаго пересѣченія, то точка этого пересѣченія будетъ центромъ шара O_2, одновременно принадлежащаго обѣимъ, такъ какъ онѣ обѣ принадлежатъ одной линейной секундѣ. При преобразованіи обратными радіусами этотъ шаръ, какъ одновременно принадлежащей обѣимъ линейнымъ примамъ, преобразуется самъ въ себѣ, и, слѣдовательно, онъ пересѣкаетъ прямоугольно нетолько шаръ Z, но и шаръ R, то есть его центръ находится на радикальной плоскости примы обоихъ упомянутыхъ шаровъ.

Если примемъ за центральный тотъ шаръ примы OC, который проходитъ чрезъ центръ R шара преобразованія, то ясно, что онъ преобразуется въ плоскость, а именно радикальную плоскость опредѣленной уже примы oO_2, перпендикулярную къ ея централи то есть плоскость, проходящую черезъ ось Z (случай мегацикла).

Въ частности, если преобразованный центральный шаръ C' пересѣкается со сферою o точечныхъ шаровъ въ циклѣ точечныхъ шаровъ, то черезъ тотъ же циклъ, конечно, проходятъ и ортогональные шары O' и O_1'.

Итакъ, вообще данной линейной терціи, разсматриваемой какъ прима сферъ шаровъ, централь которой есть прямая OC_2, гомологична мегасфера, также разлагаемая на приму сферъ шаровъ, имѣющую централью прямую oO_2; какъ примы центральныхъ и ортогональныхъ шаровъ, онѣ есть гомологичныя по отношенію къ шару R линейныя примы шаровъ съ однимъ общимъ шаромъ O_2 (для котораго R есть ортогональный шаръ).

Въ преобразованныхъ сферахъ o есть сфера точечныхъ шаровъ, въ которой совпадаютъ и центральный, и оба ортогональные шара. Напротивъ того, радикальная плоскость преобразованной примы есть центральный шаръ безконечно-большого діаметра, и съ нимъ опять совпадаютъ оба ортогональные шара.

Во всѣхъ остальныхъ сферахъ примы центральный шаръ и оба ортогональные есть шары различные, между которыми должно существовать линейное соотвѣтствіе вслѣдствіе ихъ однозначной проэктивности.

Это линейное соотвѣтствіе, выражающееся въ простой пропорціональности, непосредственно усматривается изъ чертежа. Если, ради простоты, мы означимъ разстоянія центровъ шаровъ, о коихъ идетъ рѣчь, отъ центра шара o тѣми же буквами, какими мы обозначили самые шары, получимъ:

$$K = \frac{O}{R} = \frac{O'}{C'} = \frac{O_1' - 2C'}{C'} \quad \text{(такъ какъ } O'C' = O_1'C').$$

Изъ этого отношенія сами собою выводятся тѣ частные случаи, о которыхъ сейчасъ была рѣчь, а именно при $C' = 0$ также O' и O_1' равны O; при $C' = \infty$ также O' и O_1' равны ∞.

Итакъ, для каждой данной мегасферы, получаемой реципрочнымъ преобразованіемъ изъ линейной терціи посредствомъ шара R, основное значеніе имѣетъ постоянное отношеніе K, непосредственно выводимое изъ приведеныхъ данныхъ.

Какъ видимъ мегасфера опредѣлена, если данъ ортогональный шаръ или вообще линейная терція и еще шаръ преобразованія, который необходимо входитъ въ составъ мегасферы, а именно какъ шаръ, преобразованный изъ шаровъ безконечно-большого діаметра. Линейная терція опредѣляется четырьмя шарами; слѣдовательно, мегасфера опредѣляется пятью шарами.

[1]) См. слѣдующую замѣтку подъ этимъ названіемъ.

Но для опредѣленія мегасферы мы можемъ и отрѣшиться отъ той линейной терціи, изъ которой получаемъ преобразованную мегасферу.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ того обстоятельства, что упомянутое основное характеристическое отношеніе K пріурочивается къ точкѣ o какъ центру, мы можемъ заключить, что эта точка есть истинный центръ мегасферы, то есть что изъ произвольныхъ примъ сферъ, на которыя мы можемъ ее разложить, проще всего принять ее за приму сферъ съ концентрическими центральными шарами. И тогда найдемъ, что шаръ o есть сфера точечныхъ шаровъ, а проходящая чрезъ центръ Z радикальная плоскость одной изъ примъ есть одинъ изъ центральныхъ шаровъ безконечно-большого діаметра.

Имѣя для каждаго центральнаго направленія шаръ o и радикальную плоскость, мы легко для произвольнаго центра C' построимъ центральный шаръ примы, а по разъ опредѣленному отношенію K найдемъ и соотвѣтственный ортогональный шаръ O' (также какъ и O_1').

Такъ какъ при полученіи мегасферы изъ линейной терціи мы можемъ смотрѣть на послѣднюю какъ на произвольную приму сферъ, то ясно, что легко найти и такую, въ составъ которой входитъ шаръ O и центръ шара R какъ ортогональный точечный шаръ, а централь есть прямая, соединяющая центры O и R; шаромъ R она преобразуется въ приму ортогональныхъ шаровъ, концентрическихъ съ шаромъ o.

Нетрудно и непосредственно вывести мегасферу по пяти даннымъ шарамъ A, B, C, D и E. Для этого одинъ изъ шаровъ напр. E примемъ за шаръ реципрочнаго преобразованія, которое воспроизведетъ гомологичные шары A', B', C' и D'; ясно, что опредѣленная послѣдними линейная терція послѣ обратнаго преобразованія станетъ искомою мегасферою, потому что въ составъ послѣдней войдутъ кромѣ первыхъ четырехъ шаровъ еще и E, какъ шаръ преобразованія.

Такъ какъ всѣ эти шары предполагаются произвольными, то ясно, что реципрочное преобразованіе произвольнымъ шаромъ мегасферы дастъ линейную терцію, причемъ этотъ шаръ уже не входитъ въ составъ линейной терціи; если бы шаръ E принадлежалъ одной и той же терціи съ четырмя другими шарами, то линейная терція преобразовалась бы сама въ себя, потому что каждый ея шаръ преобразовался бы въ шаръ той же терціи.

Но если дана мегасфера и шаръ преобразованія, не входящій въ ея составъ, то она преобразуется въ другую мегасферу, потому что, каждая сфера реципрочно преобразуется въ сферу, и значитъ произвольное сѣченіе данной мегасферы какою-нибудь линейною терціею даетъ также всегда сѣченіе искомой мегасферы линейною же терціею; мы говоримъ мегасферы потому что совокупность, пересѣкаемая всякими линейными терціями въ сферѣ шаровъ, и есть мегасфера.

Сфера шаровъ характеризуется центральнымъ шаромъ C и ортогональнымъ шаромъ O, опредѣляющимъ терцію, которой принадлежитъ данная сфера.

Если пересѣчемъ послѣднюю линейную секундою, входящею въ составъ этой терціи такъ, чтобы центральная плоскость p послѣдней пересѣкла центральный шаръ въ кругѣ k, то получимъ совокупность шаровъ, характеризующуюся центральнымъ кругомъ k и ортогональнымъ шаромъ O. Нетрудно видѣть, что эта совокупность есть циклъ шаровъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если примемъ плоскость p за радикальную плоскость примы, въ составъ которой входитъ шаръ O, то легко получимъ центръ и ортогональный шаръ этой примы, вещественный или мнимый; первый въ случаѣ, если шаръ O не пересѣкается плоскостью p и прима имѣетъ два точечныхъ шара, послѣдній въ случаѣ пересѣченія. Въ обоихъ случаяхъ ортогональный шаръ пересѣкается плоскостью p въ кругѣ, который и есть ортогональный кругъ цикла; если этотъ кругъ есть сѣченіе вещественнаго ортогональнаго шара, то шары цикла, прямоугольно пересѣкая вещественные шары ортогональной примы, проходятъ чрезъ точечные шары примы, и потому ортогональный кругъ есть кругъ мнимый; и обратно, если онъ есть сѣченіе мнимаго ортогональнаго круга какъ общаго круга сѣченія всѣхъ шаровъ примы, то всѣ шары цикла пересѣкаютъ его прямоугольно и онъ есть вещественный ортогональный кругъ цикла.

Изъ этого видимъ, что подъ цикломъ шаровъ мы должны подразумѣвать совокупность, характеризующуюся, кромѣ центральнаго круга, еще ортогональною примою шаровъ, потому что это равнозначно съ присутствіемъ одного ортогональнаго круга въ центральной плоскости p цикла.

Отсюда слѣдуетъ, что вообще сѣченіе сферы линейною секундою произвольнаго положенія, входящею въ составъ терціи съ ортогональнымъ шаромъ O, есть циклъ шаровъ.

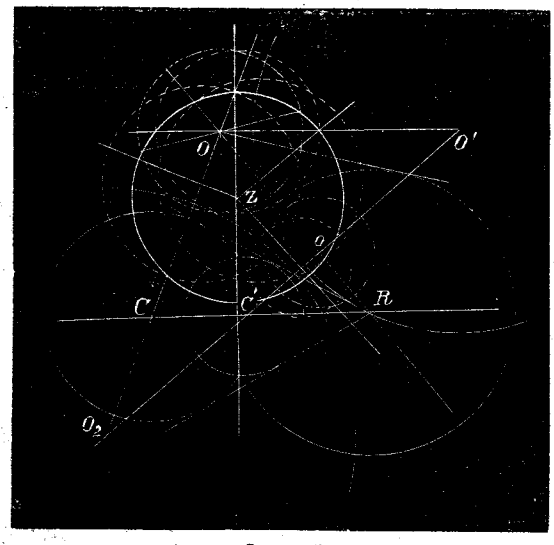
Отсюда же наконецъ слѣдуетъ, что сѣченіе мегасферы произвольною линейною секундою есть циклъ шаровъ, потому что эта секунда входитъ въ составъ какой-нибудь терціи, а всякая терція пересѣкаетъ мегасферу въ сферѣ шаровъ.

Всякій данный циклъ шаровъ произволь-

нымъ шаромъ реципрочно преобразуется въ циклъ же шаровъ.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ цикла $\angle$ и произвольнаго шара K мы воспроизведемъ сферу (для чего достаточно имѣть всего три шара цикла), а послѣдняя даннымъ шаромъ преобразованія замѣнится другою сферою; прима шаровъ, имѣющихъ общимъ кругомъ пересѣченія центральный кругъ цикла, преобразуется обратными радіусами въ приму же шаровъ, имѣющихъ общій преобразованный кругъ. Ясно, что тотъ изъ шаровъ этой примы, который пройдетъ чрезъ центръ преобразованнаго шара K', и есть искомая сфера, а пересѣченіе ея линейною секундою, центральная плоскость которой есть плоскость преобразованнаго круга, пересѣкаетъ сферу въ преобразованномъ циклѣ.

Что касается разрядовъ мегасферъ, то они непосредственно выводятся по разрядамъ линейныхъ терцій, изъ которыхъ они могутъ быть воспроизведены. Именно изъ линейныхъ терцій съ вещественнымъ ортогональнымъ шаромъ воспроизводятся мегасферы, содержащія сферу точечныхъ шаровъ; въ мегасферахъ изъ линейныхъ терцій съ мнимымъ ортогональнымъ шаромъ сферы точечныхъ шаровъ не имѣется, и въ нихъ, также какъ въ соотвѣтственныхъ терціяхъ, всѣ составные шары могутъ разсматриваться какъ вещественные.



Фиг. 15.

Сфера точечныхъ шаровъ какъ шаръ центральный раздѣляетъ центральные шары сферъ вещественныхъ и мнимыхъ шаровъ.

Сдѣлаю поясненіе для случая данныхъ мнимыхъ шаровъ. Изъ трехъ данныхъ шаровъ O, C и R только первый можетъ быть заданъ вещественнымъ или мнимымъ. Послѣднее означаетъ, что шары сферы, имѣющей центральный шаръ C и ортогональный шаръ O, пересѣкаютъ послѣдній не прямоугольно, а чрезъ концы діаметровъ. Поэтому въ примѣ CO, также какъ и въ примѣ OO' этотъ шаръ играетъ роль мнимаго шара. Эта роль обусловливаетъ и другой ходъ построенія соотвѣтственныхъ примъ, что и изображено на фиг. 15, гдѣ вещественные ортогональные шары этихъ двухъ примъ показаны пунктиромъ.

Съ другой стороны шаръ O, какъ мнимый ортогональный шаръ, чрезъ это самое является вещественнымъ шаромъ той самой линейной терціи, для которой онъ играетъ эту роль; какъ вещественный шаръ онъ реципрочно преобразуется въ шаръ o по центру, что и показано на фигурѣ въ видѣ касательныхъ изъ центра O къ шару преобразованія.

Мы видѣли, что если центръ шара C' совпадаетъ съ центромъ шара o (фиг. 14), то съ тѣмъ же центромъ совпадутъ и центры шаровъ O' и O_1', то есть въ этомъ видѣ мегасфера представится въ видѣ примы сферъ съ концентрическими центральными и ортогональными шарами, а это показываетъ, что всѣ шары однѣй составной сферы равны между собою. Въ такомъ видѣ яснѣе всего проявляется высшая симметрія мегасферы, имѣющей сферу точечныхъ шаровъ.

Для нагляднаго представленія ея останется лишь привести въ связь радіусы центральныхъ шаровъ съ радіусами шаровъ концентрическихъ сферъ. Проще всего для этого выдѣлить сферу точечныхъ шаровъ, а затѣмъ періодически отмѣтить центральные шары, сферъ въ арифметической прогрессіи радіусовъ составныхъ шаровъ, какъ это было сдѣлано для мегасферъ векторіальныхъ шаровъ.

По этому условію мегасфера изобразится въ видѣ ряда концентрическихъ шаровъ, радіусы которыхъ слѣдуютъ опредѣленному закону; его то и слѣдуетъ раскрыть.

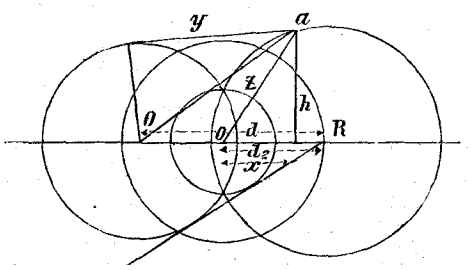
Означимъ радіусъ ортогональнаго шара данной терціи чрезъ O, радіусъ шара преобразованія чрезъ R, разстояніе между центрами этихъ шаровъ чрезъ

d. Соединивъ какую-нибудь точку a на шарѣ R (фиг. 16) съ центрами шаровъ O и выведеннаго изъ него обратными радіусами шара o прямыми, проведя изъ a касательную y къ шару O и опустивъ изъ нея же перпендикуляръ h на прямую OR, получимъ прямоугольные трехугольники, изъ которыхъ выведемъ (значенія d_2, x и z показаны на фигурѣ):

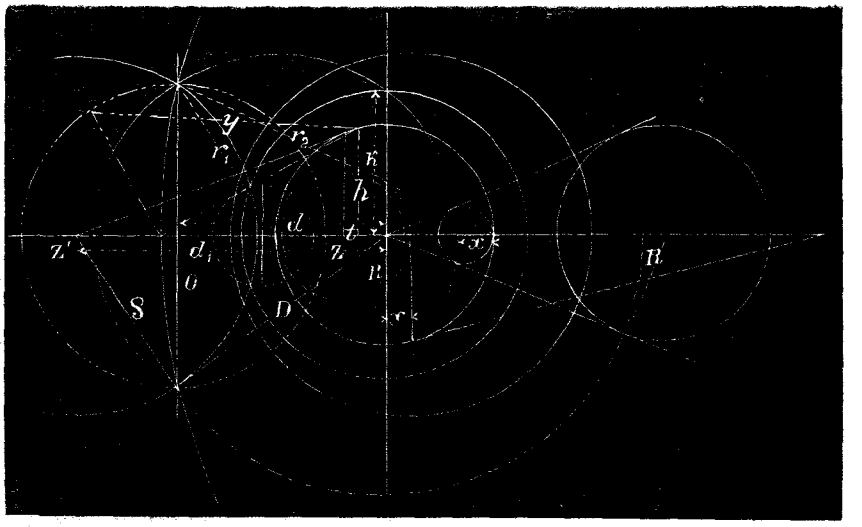
1) $(d_2-x)^2+h^2=R^2$, 2) $h^2+x^2=z^2$, 3) $h^2+(d-d_2+x)^2=y^2+O^2$.

Сравнивая мегасферу съ линейною терціею, находимъ, что послѣдняя характеризуется постоянствомъ O' (терціи перваго разряда) или O_1' (терціи второго разряда), тогда какъ въ мегасферахъ эти ихъ величины перемѣнныя.

Для мегасферъ второго разряда центръ находится конечно на прямой, соединяющей центры шаровъ O и R (фиг. 17), но опредѣлить его положеніе проще всего вычисленіемъ. Очевидно, онъ долженъ находиться посреди̇нѣ центровъ двухъ равныхъ шаровъ, имѣющихъ ту же централь.



Фиг. 16.



Фиг. 17.

Кромѣ того, по вышеприведенной формулѣ B) (стр. 111) имѣемъ 4) $d_2=\frac{dR^2}{d^2-O^2}$; элиминируя изъ этихъ четырехъ равенствъ величины x,h и d_2 и произведя сокращеніе, получимъ

$$y^2R^2-z^2(d^2-O^2)=-\frac{R^4O^2}{d^2-O^2}; \qquad (3)$$

здѣсь z выражаетъ радіусъ нѣкотораго центральнаго шара мегасферы, а y радіусовъ шаровъ сферы, характеризующейся этимъ центральнымъ шаромъ.

Въ частности, изъ формулы 3) выводится, что $y=0$ при $z^2=\left(\frac{R^2O}{d^2-O^2}\right)^2=o^2$, то есть что шаръ o есть сфера точечныхъ шаровъ.

Если означимъ вещественный ортогональный шаръ сферы z чрезъ O', а мнимый ортогональный шаръ той же сферы чрезъ O_1', то получимъ

$$O'^2=z^2-y^2;\ O_1'^2=z^2+y^2. \qquad (4)$$

Проще всего за одинъ изъ такихъ шаровъ взять тотъ, центръ котораго находится на пересѣченіи этой централи съ шаромъ преобразованія R. Такихъ точекъ двѣ; принявъ ихъ за центры, будемъ имѣть два шара радіусовъ r_1 и r_2, и эти оба шара самогомологичны.

Разсмотримъ хоть первый изъ нихъ.

Означимъ разстояніе центра другого шара мегасферы, имѣющаго ту же величину радіуса r_1 чрезъ x. Тогда гомологичный ему шаръ, имѣющій центръ удаленнымъ (отъ центра шара R) на x', пересѣчетъ въ большомъ кругѣ шаръ O, и пусть его радіусъ r_1'; означимъ еще черезъ d разстояніе центровъ O и R.

Имѣемъ 1) $r'^2_1=O^2+(d-R)^2$, 2) $xx'=R^2$, 3) $r'^2_1=O^2+(d+x')^2$ и 4) $r_1'=r_1\frac{x'}{R}$ (по формулѣ 2 стр. 119).

Элиминируя изъ этихъ равенствъ величины r_1, r_1' и x' и означая $d^2 + O^2$ чрезъ D^2, найдемъ

$$x = \frac{R\,(D^2 - 2dR)}{D^2}. \qquad (5)$$

Согласно первому изъ равенствъ то же можно написать въ формѣ

$$x = R\,\frac{(r_1^2 - R^2)}{D^2}. \qquad (5')$$

Означивъ $(r_1^2 - R^2)$ чрезъ k^2, получаемъ формулу, аналогичную формулѣ для радіуса шара, преобразованнаго обратными радіусами, если примемъ шаръ k за шаръ преобразованія, и возьмемъ для преобразованія шаръ радіуса R (изображенный на правой сторонѣ фигуры), прямоугольно пересѣкающій шаръ радіуса D (показанный пунктиромъ).

Но еще проще замѣнить постоянную x постоянною v, выражающею разстояніе центра мегасферы отъ центра R.

Находимъ $$v = d\,\frac{R^2}{D^2} \qquad (5'')$$

то есть формулу, непосредственно выражающую, что центръ Z мегасферы есть преобразованный обратными радіусами центръ того шара z' линейной терціи, для котораго прямая D есть касательная, что и показано построеніемъ.

Если бы за основаніе вычисленій мы приняли кругъ радіуса r_2, получили бы тѣ же равенства съ замѣною въ первомъ и въ окончательной формулѣ 5) знака — знакомъ +; формула же 5″) получилась бы тождественною, какъ иначе и не можетъ быть.

Зная положеніе центра мегасферы, мы легко найдемъ уравненіе связи между радіусами y шаровъ ея концентрическихъ сферъ и радіусами z центральныхъ шаровъ послѣднихъ.

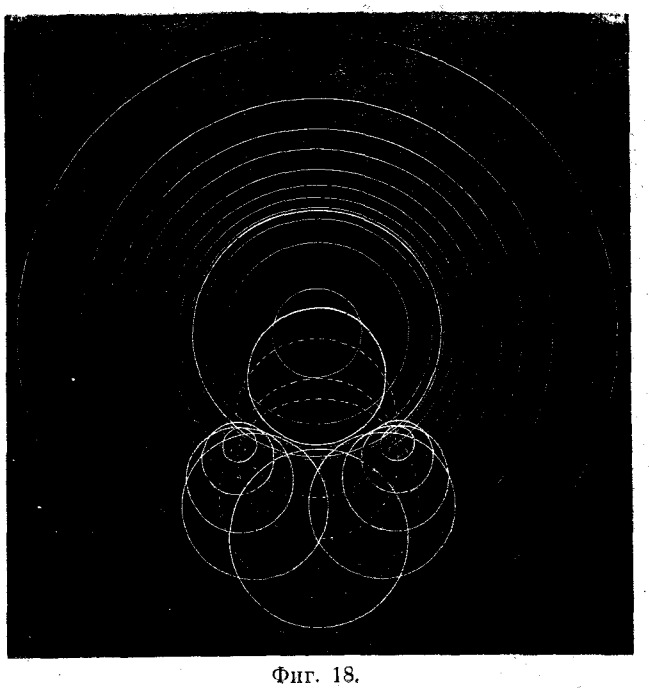
Для этого составимъ равенства 1) $h^2 + (v - t)^2 = R^2$, 2) $h^2 + t^2 = z^2$, 3) $h^2 + (d - v + t)^2 = y^2 - O^2$ и 4) $v = \frac{dR^2}{d^2 + O^2} = \frac{dR^2}{D^2}$.

Элиминируя изъ этихъ равенствъ величины h, t и v и произведя сокращенія, найдемъ

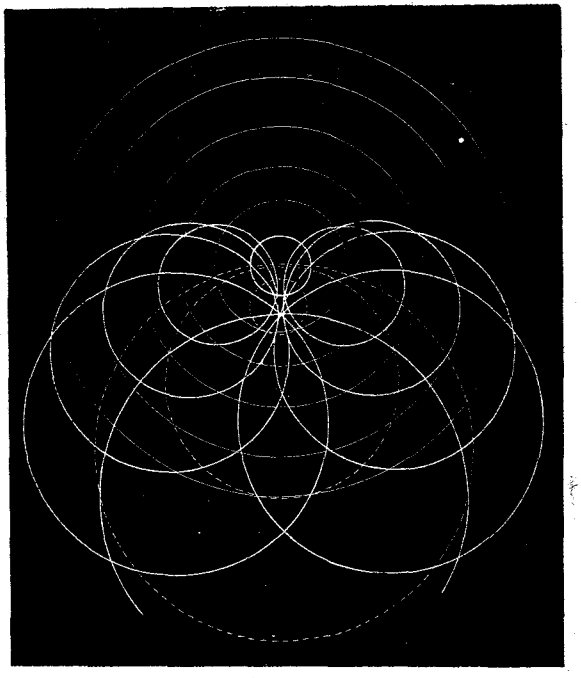
$$y^2R^2 - z^2D^2 = \frac{R^4O^2}{D^2}. \qquad (6)$$

Изъ этого уравненія видимъ, что ни при какомъ z y не получаетъ значенія 0; при $z = 0$, находимъ $y = \frac{RO}{D} = \frac{R\rho}{d_1}$, такъ какъ $O : D = \rho : d_1$ (фиг. 17), а это и есть радіусъ круга, гомологичнаго тому, коего центръ есть z' и радіусъ ρ.

Способъ основанъ на томъ, что всѣ шары, имѣющіе центры на поверхности шара R преобразованія, самореципрочны. Поэтому, проведя на фиг. 20 рядъ соотвѣтствующихъ круговъ, какъ діаметральныхъ сѣченій этихъ шаровъ, найдемъ что эти круги прямоугольно пересѣкаютъ ортогональный кругъ O.



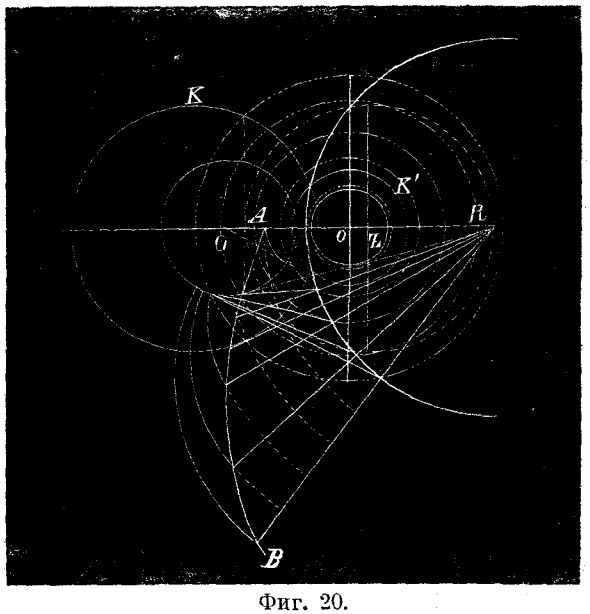
Фиг. 18.



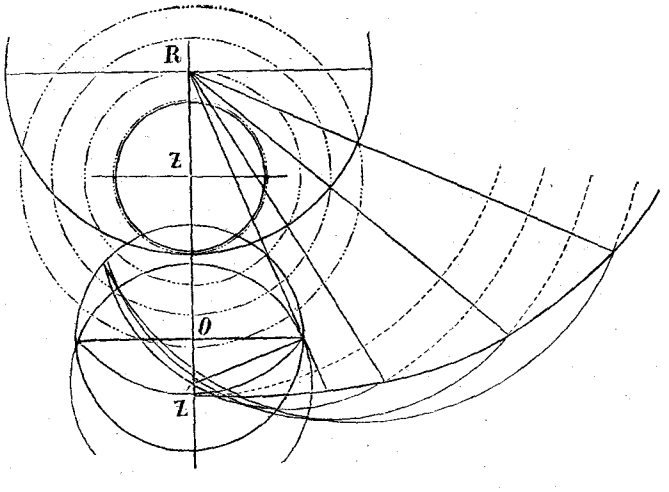
Фиг. 19.

Касательныя въ точкахъ пересѣченія этихъ круговъ съ кругомъ O отмѣчаютъ на кругѣ R ихъ центры, а прямыя, соединяющія эти центры съ

центромъ R, отмѣчаютъ на соотвѣтственныхъ кругахъ точки, совокупность которыхъ даетъ кривую AB.



Фиг. 20.



Фиг. 21.

Опредѣливъ эту кривую, уже легко найти на ней точки, которыя принадлежатъ кругамъ съ арифметическою прогрессіею величинъ радіусовъ. Въ частности, радіусъ равенъ нулю для точечныхъ круговъ цикла o, реципрочно выводимаго изъ ортогональнаго круга O; o и есть нулевой кругъ мегасферы.

Совершенно аналогично составлена и фиг. 21 для мегасферы второго разряда.

На фигурахъ 18 и 19 представлены двѣ модели мегасферы перваго разряда съ изображеніемъ въ каждой по одной сферѣ, представленной раціональными (то есть имѣющими центры на поверхностяхъ раціональныхъ шаровъ мегасферы) вещественными шарами.

На фиг. 20 показанъ графическій способъ воспроизведенія такой модели мегасферы перваго разряда, а на фиг. 21 то же второго разряда.

III. Сравненіе мегасферъ векторіальныхъ и обыкновенныхъ шаровъ.

При всей одинаковости коренныхъ свойствъ этихъ мегасферъ, въ нихъ, по изложенному выше, проявляются существенныя различія въ общихъ свойствахъ, которыя, какъ мы постараемся показать, есть различія только кажущіяся, зависящія отъ примѣненія къ векторіальнымъ шарамъ недостаточно общей точки зрѣнія.

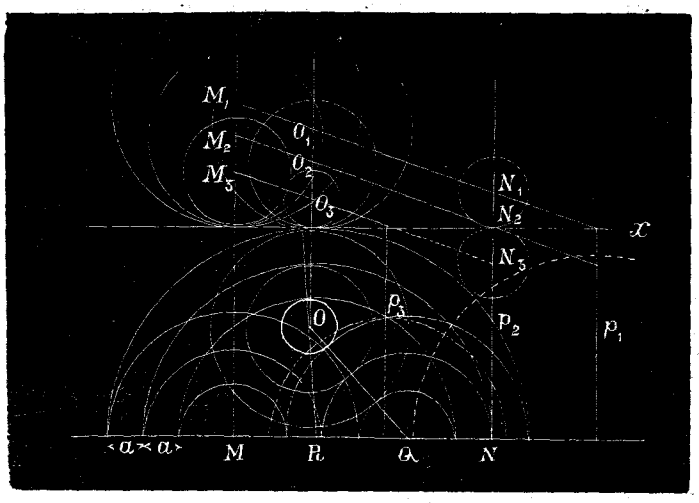
Существенное различіе выражается въ томъ, что мегасфера обыкновенныхъ шаровъ преобразуется въ линейную терцію, какой бы изъ ея шаровъ мы ни приняли за шаръ реципрочнаго преобразованія. Мегасфера векторіальныхъ шаровъ преобразуется въ линейную терцію обратными радіусами лишь въ томъ случаѣ, если за центръ шара преобразованія примемъ точку на сферѣ точечныхъ шаровъ, каковая непремѣнно имѣется во всякой мегасферѣ; при этомъ не играетъ роли радіусъ шара преобразованія, хотя при томъ же центрѣ, но разныхъ радіусахъ, получимъ разныя преобразованныя мегасферы или линейныя терціи.

Изъ всего этого ясно вытекаетъ необходимость такого расширенія понятія о реципрочномъ преобразованіи системы векторіальныхъ шаровъ, при которомъ результатъ существенно зависѣлъ бы отъ величины радіуса шара преобразованія, а именно отъ того, входитъ ли шаръ преобразованія въ составъ преобразуемой совокупности, или не входитъ.

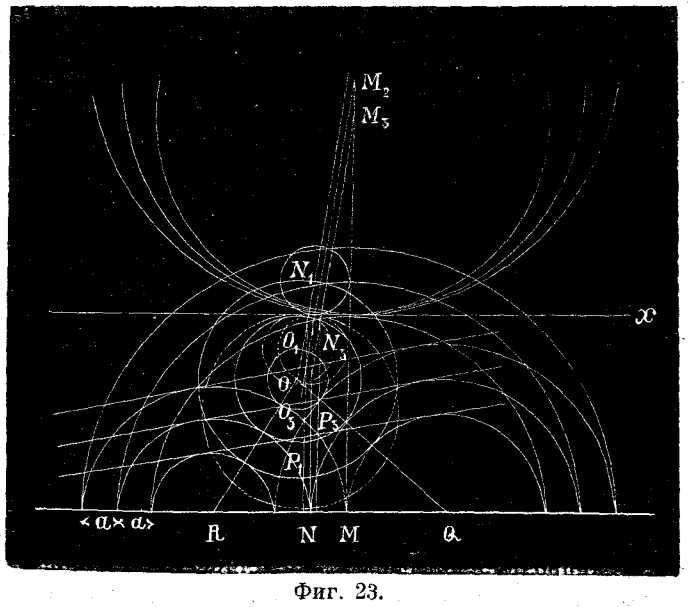
Для пониманія возможности такого расширенія опредѣленія реципрочнаго преобразованія, замѣтимъ, что если во всѣхъ шарахъ какой-либо линейной терціи мы увеличимъ или уменьшимъ радіусы на одну и ту же величину, то отъ этого составъ терціи нисколько не измѣняется, а только параллельно перемѣщается плоскость подобія, а съ нею и вся терція. Если радіусы увеличимъ на (положительную) величину a то точки плоскости подобія станутъ центрами слоя шаровъ, имѣющихъ радіусъ $+a$; зато слой, имѣвшій шары радіуса $-a$, станетъ плоскостью подобія; при

уменьшеніи радіусовъ на ту же величину терція перемѣстится на ту же величину, но въ обратномъ направленіи.

Составъ сферъ шаровъ отъ такого измѣненія радіусовъ конечно измѣнится, что прямо слѣдуетъ



Фиг. 22.



Фиг. 23.

изъ перемѣщенія плоскости подобія, но сфера до измѣненія останется сферою же и послѣ означеннаго измѣненія радіусовъ.

На фиг. 22 и 23 наглядно пояснено измѣненіе, претерпѣваемое сферою отъ уменьшенія или увеличенія радіусовъ всѣхъ шаровъ на одну и ту же величину a.

Пусть данная сфера опредѣляется двумя огибающими: шаромъ, имѣющимъ центръ R и радіусъ r и имѣющимъ центръ Q и радіусъ q. Эти два шара опредѣляютъ приму, радикальная плоскость, и значитъ плоскость подобія сферы которой есть p_1 (ортогональный шаръ отмѣченъ пунктиромъ). Разсмотримъ наибольшій шаръ сферы, имѣющій центръ M и радіусъ m, наименьшій шаръ сферы, имѣющій центръ N и еще какой-нибудь промежуточный шаръ сферы, имѣющій центръ O и радіусъ o (по опредѣленію, онъ одновременно касателенъ къ шарамъ Q (снаружи) и R (извнутри) и притомъ O_3 показанъ на фигурѣ утолщеннымъ).

На верхней половинѣ фигуры проведена ось абсциссъ x, а за ординаты приняты радіусы шаровъ соотвѣтствующаго слоя въ той линейной терціи, которой принадлежитъ сфера. Конечныя точки ординатъ составляютъ центры тѣхъ же шаровъ сферы или терціи; но всѣ эти шары касательны къ оси абсциссъ, а центры шаровъ находятся на одной прямой, пересѣкающей ось абсциссъ въ точкѣ, въ коей проектируется слѣдъ плоскости подобія.

Пусть величина радіуса шара N_1 есть a, на которую мы желаемъ уменьшить всѣ шары терціи, въ томъ числѣ и шары сферы. Ясно, что центры всѣхъ шаровъ на верхней части фигуры перемѣстятся на величину a, а слѣдовательно шаръ N_2 станетъ точечнымъ, почему его центръ пересѣчется слѣдомъ плоскости подобія въ новомъ положеніи p_2, и его точка окажется на оси абсциссъ. Въ сферѣ всѣ центры шаровъ останутся на своихъ мѣстахъ, но всѣ шары станутъ меньше; изъ огибающихъ же шаровъ R уменьшится на a, а Q увеличится на a. На фигурѣ показано и еще такое же уменьшеніе радіусовъ шаровъ, послѣ котораго шаръ N_3 станетъ отрицательнымъ (радіусъ величины a).

На фиг. 24 изображена сфера второго разряда, характеризующаяся изогональнымъ шаромъ I_1 и ортогональнымъ O_1 (проведеннымъ болѣе толстымъ пунктиромъ). Плоскость круга пересѣченія этихъ шаровъ то есть цикла точечныхъ шаровъ a_1... есть плоскость подобія той линейной терціи, коей принадлежитъ данная сфера; поэтому кругъ точекъ a_1 есть кругъ касанія центральнаго (для сферы) гиперболоида съ шаромъ O_1.

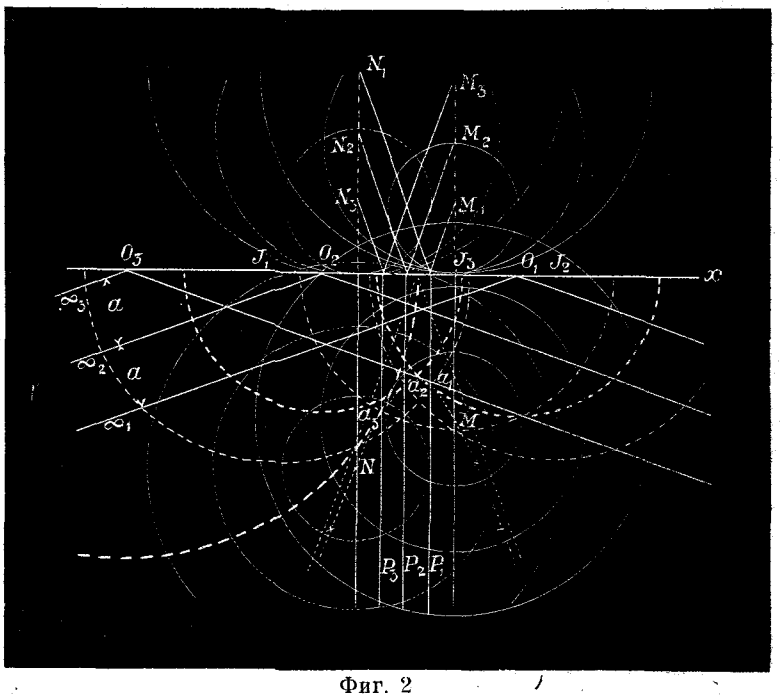
Ясно, что эту характеристику мы можемъ замѣнить другою, исходя изъ ортогональнаго шара O_1, и плоскости подобія, одновременно представляюще изогональную плоскость.

Тогда станетъ ясно, что измѣнивъ, напр. увеличивъ, радіусы всѣхъ шаровъ сферы на одну и ту же величину a, мы, хотя и измѣнимъ характеристичныя константы сферы, но всетаки получимъ сферу ша-

ровъ. Плоскость ∞_1, представляющая шаръ безконечно-большого діаметра, проходящая черезъ центръ ортогональнаго шара, передвинется параллельно на величину a, а этимъ опредѣлится центръ O_2 новаго ортогональнаго шара. Шаръ M_1 (см. верхнюю половину чертежа) увеличитъ радіусъ на a, почему проходящая черезъ его центръ прямая, характеризующая константу K линейной терціи, также передвинется параллельно, проходя уже черезъ центръ M_2; на абсциссѣ x она отмѣтитъ положеніе измѣненной плоскости подобія p_2, а послѣдняя въ сѣченіи съ центральнымъ гиперболоидомъ отмѣтитъ циклъ точечныхъ шаровъ, вполнѣ опредѣляющій ортогональный шаръ. Еще проще получить тотъ же результатъ, имѣя въ виду, что теперь плоскостью подобія станетъ та, которая была вначалѣ центральною для шаровъ радіуса—a, такъ какъ отрицательные шары при увеличеніи радіусовъ получатъ абсолютное уменьшеніе своихъ радіусовъ на ту же величину a. Ясно, что всѣ шары опредѣленной такимъ образомъ сферы будутъ имѣть величины радіусовъ не больше, чѣмъ у первоначальной. Увеличивъ радіусы этой сферы на a, получимъ сферу съ ортогональнымъ шаромъ O_3 и плоскостью подобія p_3 и т. д.

Изъ изложеннаго усматриваемъ возможность слѣдующаго расширенія понятія о реципрочномъ преобразованіи системъ векторіальныхъ шаровъ, при которомъ величина радіуса шара преобразованія получаетъ существенное значеніе.

Если данъ шаръ K радіуса k и шаръ преобразованія R радіуса r, то, чтобы получить реципрочно преобразованный шаръ K', мы уменьшаемъ радіусъ даннаго шара на величину r то есть подвергаемъ преобразованію обратными радіусами шаръ, имѣющій тотъ же центръ, что и K, но радіуса $k—r$. Получивъ такимъ образомъ преобразованный шаръ K', мы увеличимъ его радіусъ на величину r, и тогда окончательно выведенный шаръ будетъ принадлежать той же примѣ, что K и R. Если $k<r$, то шаръ K



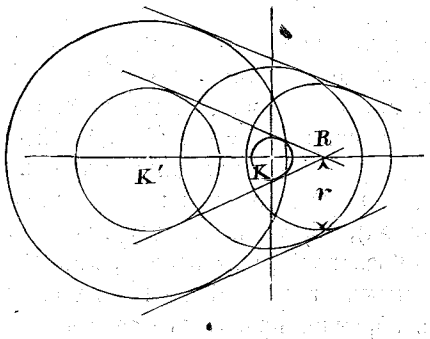
Фиг. 2

замѣняется отрицательнымъ шаромъ. Эти оба случая поясняются построеніями фиг. 25 и 26.

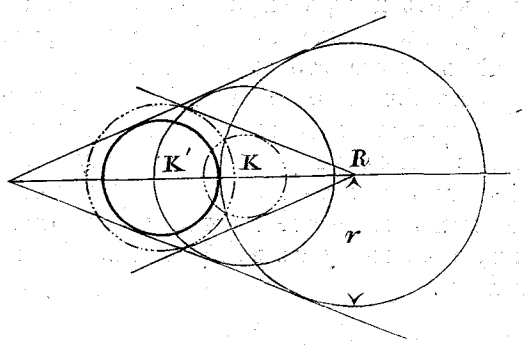
Изъ этого опредѣленія прежде всего слѣдуетъ, что реципрочное преобразованіе линейной терціи шаромъ R, входящимъ въ ея составъ, дастъ въ результатѣ ту же линейную терцію, или иначе линейная терція самореципрочна, если шаръ преобразованія входитъ въ ея составъ.

Это прямо слѣдуетъ изъ того, что каждый шаръ терціи K, подвергнутый такому реципрочному преобразованію, дастъ шаръ K', принадлежащій линейной примѣ KR, и слѣдовательно входитъ въ составъ терціи.

Наоборотъ, если шаръ преобразованія R не входитъ въ составъ линейной терціи, то преобразованіе даетъ мегасферу.



Фиг. 25.



Фиг. 26.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ линейной терціи мы уменьшимъ (или увеличимъ) радіусы всѣхъ шаровъ на одну и ту же величину, то и произвольно взятая въ терціи прима огибающихъ шаровъ измѣнится въ приму же. Съ другой стороны реципрочное преобразованіе этой примы дастъ приму же шаровъ (какъ обыкновенныхъ), а она вполнѣ опредѣлитъ мегасферу. Для окончательнаго рѣшенія задачи нужно еще обратно увеличить на ту же величину r всѣ шары мегасферы. Но достаточно представить послѣднюю въ видѣ примы концентрическихъ сферъ, чтобы увидѣть, что отъ этого увеличенія радіусовъ модель мегасферы не измѣнится существенно: при тѣхъ же координатахъ z то есть радіусахъ сферъ всѣ величины координатъ y получатъ одно и то же приращеніе r; слѣдовательно, измѣнится только значеніе чиселъ y (отчего, конечно, и сферою точечныхъ шаровъ станетъ та которая до измѣненія имѣла радіусъ—r).

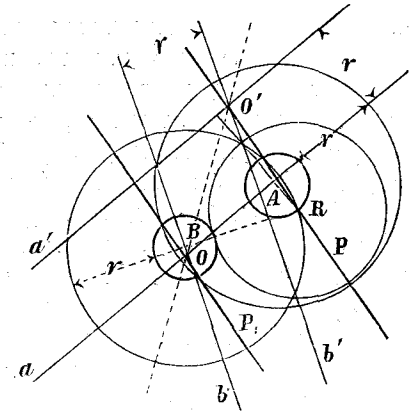
Но хотя сфера точечныхъ шаровъ мегасферы отъ примѣненія реципрочнаго преобразованія въ расширенномъ видѣ и перемѣстится, но это перемѣщеніе не отразится на разрядахъ мегасферъ: и при расширенномъ преобразованіи получимъ тѣ же два разряда мегасферъ въ зависимости отъ разрядовъ преобразуемыхъ линейныхъ терцій.

Это можно усмотрѣть изъ реципрочнаго преобразованія терціи промежуточной то есть такой, у которой всѣ шары касательны къ плоскости подобія.

Мы уже видѣли, что если уменьшимъ радіусы всѣхъ шаровъ на величину r, терція не измѣнится, а только параллельно перемѣстится (въ данномъ случаѣ на величину r).

Послѣ преобразованія обратными радіусами эта терція станетъ мегасферою промежуточною, то есть всѣ ея шары будутъ касательны къ сферѣ точечныхъ шаровъ. Увеличивая теперь радіусы всѣхъ шаровъ мегасферы на величину r, мы на ту же величину уменьшимъ радіусъ сферы точечныхъ шаровъ, но касаніе къ ней всѣхъ остальныхъ шаровъ сохранится.

Мы видѣли, что при преобразованіи линейной примы перваго разряда обратными радіусами получается циклъ шаровъ, въ составъ котораго непремѣнно входитъ точечный шаръ, представляющій центръ шара преобразованія, какъ общая точка пе-



Фиг. 27.

ресѣченія огибающихъ шаровъ (циклиды). Отсюда слѣдуетъ, что при расширенномъ преобразованіи то есть увеличеніи всѣхъ радіусовъ шаровъ цикла на величину r въ составъ цикла войдетъ и шаръ преобразованія.

Для нагляднаго поясненія приведена фиг. 27. Oa, Ob огибающія примы шаровъ, R шаръ преобразованія радіуса r. Уменьшивъ радіусы всѣхъ шаровъ примы на r, получимъ огибающія $O'a'$, $O'b'$. Преобразованіе обратными радіусами даетъ изъ нихъ

круги съ центрами A и B, какъ принадлежащіе циклидѣ. Увеличивъ радіусъ перваго круга на r и уменьшивъ радіусъ второго круга на r, мы получимъ окончательные огибающіе круги; къ обоимъ изъ нихъ кругъ шара R касателенъ то есть входитъ въ составъ огибаемой совокупности.

То же самое относится и къ секундамъ, и терціямъ, то есть и въ преобразованныхъ изъ нихъ сферахъ и мегасферахъ центръ шара преобразованія входитъ въ составъ точечныхъ шаровъ. Наконецъ то же относится и къ примамъ, секундамъ и терціямъ второго разряда, что видно изъ того, что сферическія совокупности вообще преобразуются въ линейныя, если за центръ шара преобразованія принять какой-нибудь точечный шаръ совокупности.

Но такъ какъ нетолько линейныя, но и сферическія совокупности остаются таковыми же послѣ произвольнаго уменьшенія или увеличенія радіусовъ всѣхъ шаровъ на одну и ту же величину, то значитъ при расширенномъ реципрочномъ преобразованіи шаръ этого преобразованія всегда входитъ въ составъ преобразованной (сферической) совокупности.

Слѣдовательно, и обратно, если произведемъ такое реципрочное преобразованіе, шаръ котораго входитъ въ составъ сферической совокупности, послѣдняя станетъ линейною.

Такъ какъ по минимальному числу элементовъ, опредѣляющему линейную совокупность, послѣдняя можетъ быть воспроизведена во всѣхъ случаяхъ, каковы бы ни были данные элементы, и такъ какъ всякую линейную совокупность можно преобразовать въ сферическую, какова бы ни была данная совокупность и каковъ бы ни былъ данъ шаръ преобразованія, то значитъ по тремъ даннымъ шарамъ, каковы бы они ни были, всегда можно построить циклъ, по четыремъ сферу и по пяти мегасферу. Если даны шары a, b, c, d, e, то можемъ принять одинъ изъ нихъ, безразлично какой, за шаръ преобразованія и соотвѣтственно получить (принявъ за таковой шаръ e) преобразованные шары a' b' c' d'; послѣдніе всегда достаточны (лишь бы никакіе три изъ нихъ не входили въ составъ линейной примы) для построенія линейной терціи, а совершивъ обратное преобразованіе, найдемъ мегасферу, въ составъ которой войдутъ всѣ пять данныхъ шаровъ. Наоборотъ, если преобразуемъ эту мегасферу, принявъ за шаръ преобразованія нетолько одинъ изъ этихъ пяти шаровъ, но вообще одинъ изъ шаровъ мегасферы, послѣдняя станетъ линейною терціею.

Такимъ образомъ окончательно устанавливается полная одинаковость коренныхъ свойствъ мегасферъ какъ обыкновенныхъ, такъ и векторіальныхъ шаровъ.

Эта общность, конечно, должна распространяться и на другіе образы, и прежде всего на систему точекъ.

И дѣйствительно, если изъ трехъ точекъ примемъ одну за центръ круга преобразованія, а чрезъ преобразованныя другія двѣ точки проведемъ прямую, то обратное преобразованіе прямой дастъ кругъ, проходящій чрезъ всѣ три данныя точки.

Если даны четыре точки (не находящіяся на одной прямой), то, принявъ одну изъ нихъ за центръ шара преобразованія, можемъ чрезъ преобразованныя три остальныя точки провести плоскость, а эта плоскость обратно преобразуется въ шаръ, проходящій чрезъ всѣ четыре данныя точки.

Вообще плоскость, гомологичная шару, не проходитъ чрезъ центръ шара преобразованія; но чѣмъ болѣе будемъ уменьшать радіусъ шара преобразованія, тѣмъ ближе это имѣетъ мѣсто и становится такимъ въ точности, когда радіусъ шара преобразованія сокращается до нуля то есть становится точкою, тою самою, которая дана. Поэтому преобразованіе шара какою-либо изъ его точекъ, какъ точечныхъ шаровъ, дастъ плоскость, касательную къ шару въ этой точкѣ, составляющей ея полюсъ.

IV. Система параллельныхъ векторовъ.

Послѣ того, что было изложено по основамъ системъ векторіальныхъ и обыкновенныхъ шаровъ, не представляетъ никакого затрудненія сдѣлать аналогическіе выводы и для системы параллельныхъ векторовъ, и, въ частности, установить ихъ коллинеарное и реципрочное преобразованіе, которыя и являются основаніемъ для этого вывода.

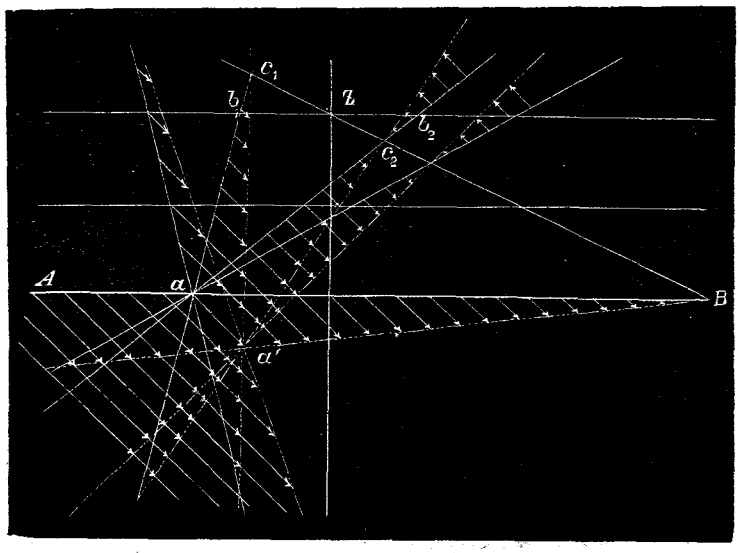
Такъ какъ система параллельныхъ векторовъ есть система четвертой ступени, то всѣ позиціонныя построенія гомологичны построеніямъ системы шаровъ, какъ обыкновенныхъ, такъ и векторіальныхъ. Въ частности, подлежатъ выводу нетолько линейныя совокупности, но и совокупности сферическія трехъ ступеней, включая, слѣдовательно, линейныя терціи и терціи сферическія то есть мегасферы.

Линейныя совокупности уже были выведены въ статьѣ. „Точное изображеніе точекъ пространства на плоскости“ [1]. Теперь приходится ограничиться

[1]) Записки Горнаго Института стр. 75.

установкою упомянутыхъ преобразованій и систематическимъ выводомъ совокупностей сферическихъ.

Что касается коллинеаціи, то операція столь проста и столь непосредственно вытекаетъ изъ предъидущаго изложенія, что полагаю достаточнымъ привести фиг. 28, въ которой взятъ простѣйшій видъ; именно за центръ перспективы Z принятъ точечный векторъ, а AB слѣдъ плоскости перспективы.



Фиг. 28.

Дана прима, опредѣленная централью ab_1, или, что все равно, двумя начальными точками векторовъ напр. a и c_1 и еще ихъ длинами: для перваго aa', а для второго нуль то есть точечный векторъ (центръ примы). Точка a взята на плоскости перспективы; поэтому эта прима преобразуется въ приму ab_2, причемъ $b_1Z = Zb_2$; точечному вектору c_1 гомологиченъ такой же векторъ c_2; этимъ опредѣляются длины и направленія векторовъ для всѣхъ точекъ обѣихъ примъ. Ясно, что c_1Zc_2 есть геометрическое мѣсто точечныхъ векторовъ то есть ось секунды, которой принадлежатъ обѣ примы, также какъ и примъ съ централью въ плоскости перспективы.

Въ той же секундѣ построена еще пара гомологичныхъ примъ; и всѣ эти примы векторовъ имѣютъ общій векторъ aa' (то есть пересѣкаются въ немъ).

Въ упомянутой статьѣ показано также, что циклъ векторовъ характеризуется кругомъ центральныхъ (начальныхъ) точекъ, а конечныя точки представляютъ эллипсъ, получающійся изъ круга посредствомъ уклоненія (косого растяженія), имѣющаго ось подобія секунды своею осью, и величины и направленія векторовъ своими величиною и направленіемъ.

Конечно то же самое относится и къ сферѣ векторовъ при условіи замѣны секунды терціей и слѣдовательно оси подобія плоскостью подобія, а эллипса эллипсоидомъ.

Такимъ образомъ построеніе сферы векторовъ (напр. по четыремъ даннымъ) не представляетъ никакихъ затрудненій. Теперь же опредѣлимъ реципрочное преобразованіе, возсоздающее эту сферу изъ линейной секунды векторовъ.

Впрочемъ, послѣ разсмотрѣнія реципрочнаго преобразованія обыкновенныхъ шаровъ, отвѣтъ получается въ этомъ случаѣ непосредственно; чтобы преобразовать данный векторъ v посредствомъ даннаго шара R преобразованія съ даннымъ въ центрѣ послѣдняго векторомъ r, нужно по способу обратныхъ радіусовъ найти начальную точку искомаго вектора v', а длина вектора опредѣлится по принадлежности его къ примѣ vr. Въ частности, безконечно-большимъ векторамъ реципрочны безконечно большіе же векторы.

На фиг. 29 показано преобразованіе цикла векторовъ съ центральнымъ кругомъ C и тремя векторами 1, 2, 3 этого цикла въ циклъ съ центральнымъ кругомъ C' и тремя гомологичными векторами $1'$, $2'$, 3 посредствомъ круга преобразованія R съ центральнымъ векторомъ r.

Три вектора перваго цикла опредѣляютъ ось подобія, и вмѣстѣ соотвѣтственную секунду, по точкамъ 13 и 23 и даютъ прямую O; три вектора второго цикла по точкамъ $1'2'$ а $2'3$ опредѣляютъ ось подобія O'. Векторъ 3 общій для обоихъ цикловъ, такъ какъ его начальная точка есть общая для центральныхъ круговъ обоихъ цикловъ; но такъ какъ обѣ линейныя секунды пересѣкаются въ линейной примѣ, то ясно, что централь этой примы и есть общая хорда обоихъ центральныхъ круговъ, а центръ этой примы есть точка Z пересѣченія осей подобія обѣихъ секундъ. Такъ какъ ось подобія пересѣкаетъ кругъ C' въ точечныхъ векторахъ a и b, то гомологичные векторы легко получаются построеніемъ, показаннымъ на фигурѣ.

Если векторъ, коего начальная точка есть центръ даннаго шара, принадлежитъ опредѣленной линейной терціи, то къ той же терціи мы можемъ отнести и самъ шаръ.

Ясно, что если шаръ преобразованія R принадлежитъ преобразуемой линейной терціи, то сама терція преобразуется сама въ себя, потому что

каждый шаръ терціи преобразуется при этомъ въ шаръ той же терціи.

Что дѣйствительно сфера векторовъ (напр. C) посредствомъ шара преобразованія R, не принадлежащаго той же линейной терціи, преобразуется въ сферу же (C') векторовъ (то есть совокупность, имѣющую центральный шаръ и принадлежащую опредѣленной линейной терціи), можно видѣть изъ слѣдующаго.

Также какъ было отмѣчено и для сферъ шаровъ, мы можемъ принять центръ R шара преобразованія за центръ перспективы, а центральную плоскость секунды пересѣченіи обѣихъ терціи за плоскость перспективы двухъ подобныхъ системъ въ коллинеаціи [1]), и тогда обѣ сферы векторовъ съ центральными шарами C и C' будутъ связаны простымъ подобіемъ (съ обратными начальными точками) по условіямъ коллинаціи, при которой одинъ шаръ принадлежитъ примѣ самоколлинеарныхъ шаровъ, а другой выводится преобразованіемъ подобія съ даннымъ отношеніемъ подобія, принимая центръ R за центръ подобія.

Поэтому, если для преобразованія линейной терціи мы возьмемъ шаръ R, не входящій въ ставъ терціи, то, раздѣливъ точки пространства данной терціи на точки шаровъ нѣкоторой произвольной примы, мы каждую изъ полученныхъ сферъ векторовъ, по только что изложенному, преобразуемъ въ гомологичную сферу векторовъ; и вся линейная терція преобразуется въ мегасферу векторовъ, которую мы можемъ разсматривать какъ произвольную приму сферъ.

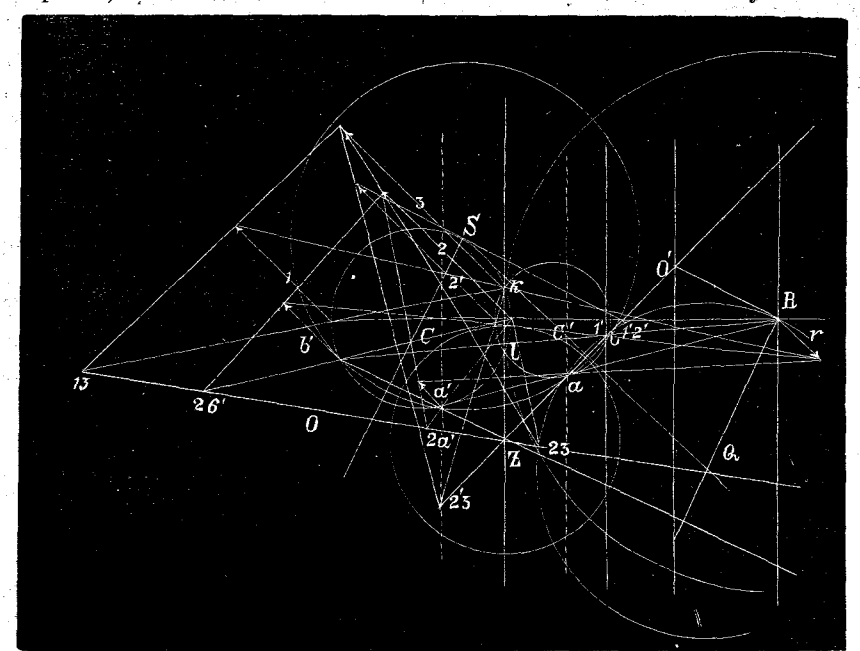
Такъ какъ точки a' и b' въ коллинеаціи гомологичны точкамъ a и b, то прямой Zab то есть оси подобія O' гомологична прямая $Za'b'$, которая не есть ось подобія другой системы.

На точку Z мы можемъ смотрѣть какъ на слѣдъ радикальной оси секунды шаровъ, которой принадлежитъ и прима CC', и примы, имѣющія общіе круги пересѣченія ab и $a'b'$. Въ частности, этой секундѣ принадлежитъ и шаръ Q, преобразованный изъ плоскости $Za'b'$ то есть одновременно проходящій и чрезъ кругъ ab, и чрезъ центръ R, и шаръ S, общій обѣимъ примамъ, имѣющимъ общими круги ab и $a'b'$. Послѣдній шаръ прямоугольно пересѣкаетъ шаръ R.

Теперь замѣтимъ, что шаръ преобразованія съ центральнымъ векторомъ r мы можемъ замѣнить шаромъ преобразованія съ точечнымъ векторомъ, если во всей преобразуемой и преобразованной системѣ уменьшимъ длины векторовъ на величину r. Это прямо слѣдуетъ изъ самого способа преобразованія векторовъ.

Конечно, отъ этого уменьшенія длины всѣхъ векторовъ; измѣнятся и положенія точечныхъ векторовъ; но въ остальномъ операціи построенія не измѣнятся.

Сдѣлавъ это уменьшеніе, легко найдемъ величину параллельнаго перемѣщенія, какое испытаетъ ось подобія O. Произведя преобразованіе, останется

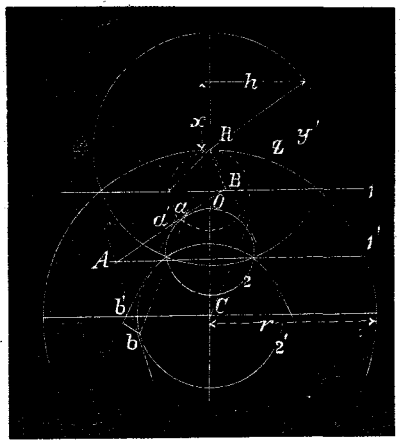


Фиг. 29.

[1]) Ср. слѣдующую статью.

измѣнить длину векторовъ въ обратную сторону, чтобы получить требующійся результатъ. Отсюда видимъ, что модель мегасферы не зависитъ отъ длины векторовъ, какіе мы приписываемъ каждому концентрическому шару, и произвольный изъ нихъ можетъ быть принятъ за нулевой, и отъ этого законъ распредѣленія центральныхъ шаровъ не измѣнится.

Однако предварительно нужно доказать, что и для параллельныхъ векторовъ мегасфера можетъ быть приведена къ формѣ концентрической примы сферъ равныхъ векторовъ.



Фиг. 30.

Пусть R (фиг. 30) шаръ преобразованія, прямая 1—слѣдъ плоскости подобія линейной терціи. Раздѣлимъ терцію на приму сферъ, въ которой плоскость 1 есть радикальная, а центръ R одинъ изъ точечныхъ ея шаровъ (слѣдовательно, ортогональный шаръ примы будетъ тотъ, что отмѣченъ пунктиромъ).

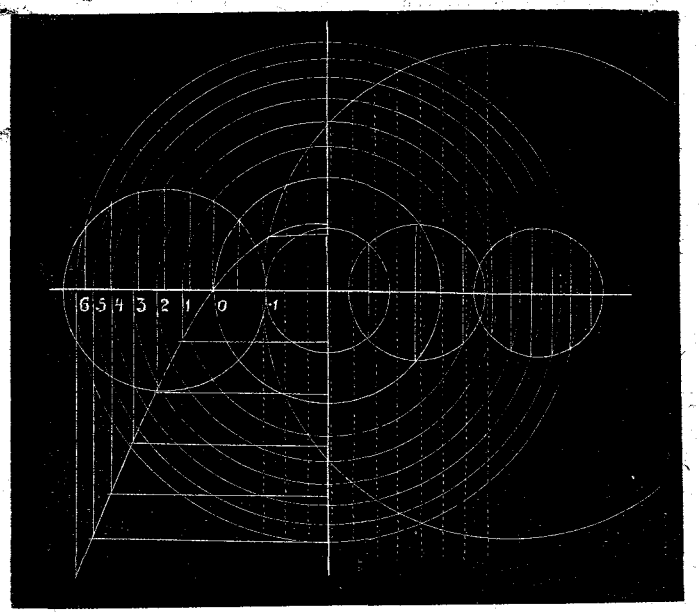
Плоскость 1 преобразуется въ шаръ точечныхъ векторовъ 1′, а какой-нибудь центральный шаръ 2 примы преобразуется въ шаръ 2′, концентрическій съ шаромъ 1′ (коего радіусъ означимъ r').

Возьмемъ на шарѣ 2 произвольную точку a и проведемъ въ ней касательную AB; соотвѣтственная точка и касательная къ шару 2′ будутъ b и bA; затѣмъ возьмемъ весьма близкую къ a точку a' на шарѣ 2, которой соотвѣтствуетъ точка b', весьма близкая къ b на шарѣ 2′. Означимъ Ra черезъ a, Rb черезъ Rb, a' черезъ $a+\triangle a$ и Rb' черезъ $b-\triangle b$.

Мы опять имѣемъ здѣсь случай перспективнаго положенія двухъ подобныхъ системъ, не находящихся въ положеніи инволюціи, причемъ гомологичныя касательныя Aa и Ab пересѣкаются въ точкѣ на плоскости перспективы (одновременно радикальной оси примы шаровъ 2 и 2′). Отсюда слѣдуетъ, что если Aa пересѣкается съ плоскостью 1 въ точкѣ B, то BR параллельна Ab. Означимъ Ba черезъ k и aa' черезъ $\triangle k$.

Съ другой стороны углы Aab и Aba равны, и значитъ трехугольникъ Aab равнобедренный, то есть $Aa = Ab$; по той же причинѣ $aB = BR$.

Опустивъ изъ точекъ a и b перпендикуляры на прямую $Ra'b'$ и принявъ во вниманіе безконечномалую величину угла bRb', можемъ видѣть, что $\triangle a : \triangle b = a : b$. Но также имѣемъ $ab = (a+\triangle a)(b-\triangle b)$. Означимъ длины векторовъ въ точкахъ a и a', b и b' соотвѣтственно чрезъ v и v', V и V', а чрезъ K коэфиціентъ пропорціональности въ величинахъ вектора (до преобразованія) въ зависимости отъ разстоянія отъ плоскости подобія 1. Тогда величина вектора въ точкѣ a есть Kk, и потому 1) $v = Kk$, 2) $v' = v\,\frac{a+\triangle a}{a-\triangle a}$, 3) $V = v\,\frac{b}{a}$ и 4) $V' = v\,\frac{a+\triangle a}{a-\triangle a}\cdot\frac{b-\triangle b}{a+\triangle a}$; но числитель здѣсь равенъ ab, а знаменатель a^2 (если пренебрежемъ членомъ, представляющимъ безконечно малую второго порядка); итакъ $V' = v\frac{b}{a} = V$, что и требовалось доказать.



Фиг. 31.

Для того, чтобы составить модель мегасферы, разсматриваемой какъ прима концентрическихъ сферъ параллельныхъ векторовъ имѣемъ 1) $h^2 + x^2 = R^2$; 2) $z^2 = (x+r')^2 + h^2$; 3) $y' = p + x$; 4) $y = Ky'$; 5) $r' = \frac{R^2}{2p}$. Элиминируя изъ этихъ равенствъ величины x, y', h, r' и произведя сокращенія, найдемъ $Kz^2 = R^2 y + \frac{KR^4}{4p^2}$

При $y = 0, z = \frac{R^2}{2p} = r'$; при $z = 0$, $y = -\frac{KR^2}{4p^2}$.

Если пересѣчемъ центральные шары этой мегасферы произвольнымъ шаромъ, то послѣдній есть центральный для нѣкоторой сферы, входящей въ составъ мегасферы. Поэтому плоскости его сѣченія съ шарами модели, есть плоскости равноотстоящія, совершенно независимо отъ радіуса и положенія центра взятаго шара, что и видно изъ фиг. 31. Эти плоскости именно для каждой сферы параллельны плоскости подобія, а величины радіусовъ шаровъ сферы прямо пропорціональны разстоянію отъ плоскости подобія.

По этой причинѣ легко получить модель мегасферы *графически, исходя изъ какого-нибудь шара* и пересѣкая его рядомъ параллельныхъ равноотстоящихъ плоскостей, какъ показано на фигурѣ пунктиромъ.

Измѣняя длины всѣхъ векторовъ мегасферы на одну и ту же величину a, мы этимъ не измѣнимъ ни самой мегасферы, ни входящихъ въ ея составъ сферъ. Въ мегасферѣ отъ этого измѣненія тѣ же концентрическія сферы при томъ же центральномъ шарѣ, будутъ имѣть увеличенныя на величину a векторы, и, въ частности, сферою точечныхъ векторовъ станетъ та, которая имѣла величину векторовъ $-a$. Въ каждой произвольной сферѣ передвинется параллельно плоскость подобія, а именно замѣнитъ ту, въ плоскости которой находились центры (начальныя точки) векторовъ величины $-a$.

Мы можемъ условиться называть реципрочнымъ преобразованіемъ по вектору v то, которое получится изъ даннаго вектора, если уменьшимъ его на величину a, преобразуемъ систему обратными радіусами шаромъ радіуса a, центръ коего есть начальная точка вектора v и по преобразованіи снова увеличимъ длину полученнаго вектора на величину a.

Тогда нетолько для системъ параллельныхъ векторовъ, но и для всѣхъ системъ четвертой ступени можемъ выразить слѣдующія общія свойства.

Если даны два элемента a и b, то любой изъ нихъ можемъ принять за элементъ реципрочнаго преобразованія и получить преобразованные элементы a_1 и b_1; можемъ принять и эти элементы за элементы того же преобразованія и получить новые элементы и т. д., и всѣ полученные такимъ образомъ элементы будутъ принадлежать одной и той же линейной примѣ элементовъ, какъ частномъ случаѣ цикла.

Если даны три элемента a, b, и c, не принадлежащіе одной линейной примѣ, то опять каждый изъ нихъ можемъ принять за элементъ реципрочнаго преобразованія и такимъ образомъ неопредѣленно получатъ элементы цикла abc.

Если даны четыре элемента a, b, c, и d, не принадлежащіе по три одной линейной примѣ, то снова каждый изъ нихъ можемъ принять за элементъ реципрочнаго преобразованія, и такимъ образомъ получимъ неопредѣленное число элементовъ сферы $abcd$.

Наконецъ, если дано пять элементовъ a, b, c, d, и e, не принадлежащихъ по три одной линейной примѣ, то такое же реципрочное преобразованіе по каждому изъ нихъ и вновь полученныхъ даетъ намъ неопредѣленное число элементовъ мегасферы $abcde$.

И обратно, реципрочное преобразованіе какой угодно линейной или сферической совокупности по одному изъ входящихъ въ ея составъ элементовъ всегда даетъ линейную же совокупность, ту же, преобразуется ли линейная совокупность, опредѣляемая однимъ элементомъ меньше, или преобразуется сферическая совокупность, причемъ въ составъ преобразованной уже не входитъ тотъ элементъ, по которому произведено преобразованіе.

Полярныя отношенія мегасферъ.

Общеизвѣстны полярныя отношенія, обусловливаемыя квадратичными совокупностями точекъ то есть кривыми и кривыми поверхностями второго порядка.

Въ основаніи этихъ отношеній лежатъ свойства касательныхъ и стягивающихъ хордъ.

Начала Новой Геометріи позволяютъ безспорно распространить эти отношенія на всякаго рода квадратичныя совокупности, изъ какихъ бы элементовъ онѣ ни слагались. Съ другой стороны, квадратичныя совокупности выводятся изъ сферическихъ преобразованіемъ коллинеаціи, а таковыя преобразованія можно установить для всякой системы. Это отношеніе сферическихъ и квадратичныхъ совокупностей въ общемъ видѣ позволяетъ упростить изслѣдованіе, ограничиваясь одними сферическими совокупностями, потому что отъ нихъ эти отношенія общаго свойства непосредственно переносятся на всякія квадратичныя совокупности.

Но помимо такого расширенія въ приложеніи полярныхъ отношеній къ совокупностямъ всякаго рода, заслуживаютъ особаго вниманія изслѣдованія этихъ отношеній въ системахъ высшихъ чѣмъ третьей ступени, и прежде всего для системъ четвертой ступени то есть изученіе ихъ по отношенію къ мегасферамъ.

Полное раскрытіе существенныхъ деталей этихъ отношеній требовало бы разсмотрѣнія ихъ для каждой изъ установленныхъ системъ; однако процессъ

переложенія выводовъ отъ одной системы къ другой, той же ступени, настолько элементаренъ, что вполнѣ достаточно ограничиться или абстрактнымъ изложеніемъ, заразъ обнимающемъ всѣ аналогичныя системы, или же, ради простоты и наглядности, выбрать одну изъ системъ, и на ней проявить эти общія отношенія. При этомъ система точекъ, какъ система третьей ступени, напередъ исключается для нашей цѣли. Руководясь ею, мы должны остановиться на одной изъ системъ четвертой ступени, предпочтительно, ради простоты, остановившись на наиболѣе изученной, каковою является система обыкновенныхъ шаровъ.

Итакъ, наша задача состоитъ въ томъ: каковы однозначныя преобразованія, какія можно произвести въ системѣ шаровъ, пользуясь для этого преобразованія какою-нибудь сферическою ихъ совокупностью?

Простѣйшею таковою совокупностью является циклъ шаровъ, который мы и должны принять за совокупность, обусловливающую искомое преобразованіе.

Мы знаемъ, что циклъ шаровъ опредѣляется: 1) его центральнымъ кругомъ, а 2) линейною примою ортогональныхъ шаровъ. На центральный кругъ мы можемъ смотрѣть какъ на произвольное сѣченіе центральнаго шара сферы, и въ этомъ плоскомъ сѣченіи кругъ сѣченія того шара ортогональной примы, центръ коего находится въ этой плоскости, есть ортогональный кругъ цикла. Поэтому отношенія цикла шаровъ еще проще выражаются отношеніями цикла круговъ на плоскости.

Итакъ, въ любомъ циклѣ представлены центральный кругъ C, ортогональный кругъ O и сопряженный ортогональный кругъ O_1, непосредственно выводящійся изъ двухъ первыхъ; чтобы получить кругъ A цикла, нужно за центръ его принять какую-либо точку на кругѣ C, причемъ кругъ долженъ одновременно прямоугольно пересѣкать оба круга O и O_1, одинъ какъ вещественный, другой какъ мнимый ортогональный кругъ.

Взявъ другой такой же, но перемѣнный, кругъ съ центромъ B, мы опредѣляемъ линейную приму AB, которая приближается къ касательной вмѣстѣ съ приближеніемъ точки B къ A, и въ предѣлѣ становится примою, касательною къ циклу, причемъ ея централь становится касательною къ кругу C, а всѣ ея круги продолжаютъ оставаться въ предѣлахъ секунды, опредѣляемой однимъ изъ ортогональныхъ круговъ, смотря потому, считаемъ ли мы шаръ A за вещественный или за мнимый. Какъ видимъ, при этихъ двухъ допущеніяхъ, какъ существенно различныхъ, мы получаемъ и два различныя рѣшенія для касательныхъ примъ, хотя въ обѣихъ централь одна и та же.

Двѣ касательныя, какъ находящіяся въ предѣлахъ одной линейной секунды, пересѣкутся въ одномъ единственномъ кругѣ, и вотъ этотъ то элементъ мы и можемъ принять за полюсъ примы, опредѣляемой двумя кругами касанія. Какъ видимъ, въ разсматриваемой системѣ, построеніе полюсовъ и поляръ ничѣмъ не отличается отъ построенія въ системѣ точекъ, кромѣ того, что полюсъ, какъ точку, нужно принять за центръ круга, а централь примы, какъ поляру, за геометрическое мѣсто центровъ круговъ секунды, почему легко распространить этотъ выводъ на циклъ и сферу шаровъ.

Къ послѣдней въ данномъ ея шарѣ A мы можемъ провести касательную секунду, центральная плоскость которой есть касательная къ шару C въ центрѣ шара A, а всѣ шары принадлежатъ той же линейной терціи, что и сама сфера. Ортогональный кругъ этой секунды есть кругъ пересѣченія ея центральной плоскости и ортогональнаго шара O.

Рѣчь о полярныхъ отношеніяхъ къ сферѣ можетъ быть только въ предѣлахъ той же линейной терціи.

Если бы мы взяли шаръ K, не принадлежащій этой терціи, то и не могли бы изъ него провести касательной примы къ сферѣ. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что изъ K можно провести къ сферѣ касательную, имѣющую со сферою только одинъ общій шаръ A. Въ такомъ случаѣ, измѣнивъ положеніе касательной на безконечно-малую величину, мы получимъ сѣкущую сферу въ двухъ безконечно близкихъ шарахъ A_1 и A_2, но оба эти шара, какъ шары сферы, принадлежатъ той же линейной терціи и опредѣляютъ входящую въ ея составъ линейную приму, и еслибы K принадлежалъ этой примѣ, то вмѣстѣ съ тѣмъ онъ принадлежалъ бы и терціи, что противно условію.

Теперь перейдемъ къ полярнымъ отношеніямъ мегасферы.

Мы знаемъ, что четыре линейныя терціи шаровъ пересѣкаются въ одномъ шарѣ, а четыре ортогональныхъ шара терцій однозначно опредѣляютъ терцію ортогональныхъ шаровъ; и упомянутый шаръ пересѣченія есть тотъ единственный шаръ A, который прямоугольно пересѣкаетъ всѣ шары этой терціи. Но такъ какъ каждый шаръ послѣдней есть, въ свою очередь, ортогональный по отношенію къ нѣкоторой линейной терціи, то каждая таковая проходитъ чрезъ шаръ A, и слѣдовательно чрезъ каж-

дый шаръ проходитъ терція линейныхъ терцій шаровъ.

Теперь разсмотримъ какую-нибудь мегасферу, взявъ на ней постоянный шаръ A и три перемѣнные B, C и D. Чрезъ эти четыре шара можемъ провести линейную терцію, а она пересѣчетъ мегасферу въ нѣкоторой сферѣ шаровъ. Приближая шаръ D къ A, мы получимъ рядъ уменьшающихся линейныхъ отрѣзковъ DA, которые можемъ назвать хордами мегасферы; онѣ же будутъ хордами и перемѣнной сферы пересѣченія. Въ предѣлѣ такая хорда сократится до одного элемента, но и въ этомъ предѣльномъ случаѣ прима AD есть совокупность вполнѣ опредѣленная, но только получитъ значеніе касательной примы, и притомъ касательной нетолько по отношенію къ перемѣнной сферѣ, но и по отношенію ко всей мегасферѣ, такъ какъ будетъ имѣть съ нею всего одинъ общій шаръ A.

Такъ какъ изъ четырехъ взятыхъ шаровъ остается только три, то чрезъ нихъ можно провести циклъ ABC; мѣняя положеніе шаровъ B и C, мы вмѣстѣ съ тѣмъ получимъ различные циклы пересѣченія мегасферы секундою ABC, но всѣ эти циклы будутъ съ касательною примою AD имѣть одинъ общій шаръ A мегасферы.

Приближая шаръ C къ шару A, мы опять получимъ рядъ хордъ AC и въ предѣлѣ вторую касательную приму AC, которая вмѣстѣ съ примою AD опредѣлитъ касательную секунду ACD, то есть имѣющую нетолько съ каждымъ перемѣннымъ цикломъ, касательнымъ къ примѣ AD, но и со всею мегасферою одинъ единственный общій шаръ A.

Теперь изъ взятыхъ четырехъ шаровъ остается только два, опредѣляющіе линейную приму AB, но кромѣ нея имѣется касательная къ мегасферѣ линейная секунда ACD.

Приближая B къ A, мы опять получимъ рядъ сокращающихся хордъ, въ предѣлѣ имѣющій касательную приму AB. Касательная секунда и еще одинъ шаръ этой примы опредѣлятъ касательную терцію.

Итакъ изъ терціи терцій, проходящихъ чрезъ шаръ A, имѣется одна единственная, *касательная къ мегасферѣ въ этомъ шарѣ*.

Всякая другая линейная терція, проходящая чрезъ него, пересѣчетъ мегасферу въ сферѣ, а эту терцію въ секундѣ, касательной къ мегасферѣ, а слѣдовательно и къ каждой сферѣ, и къ каждому циклу, проходящимъ чрезъ шаръ A. Всякая линейная секунда пересѣчетъ мегасферу въ циклѣ, а эту терцію въ примѣ, касательной къ мегасферѣ, а слѣдовательно и къ каждому изъ этихъ цикловъ.

Въ виду однозначной связи между шаромъ A мегасферы и касательною въ немъ терціею мы можемъ считать его за полюсъ, а касательную терцію за полярную.

Такъ какъ всякая вообще терція, имѣющая съ мегасферою общіе шары, пересѣчетъ ее въ сферѣ, а касательную терцію въ секундѣ, касательной къ этой сферѣ въ шарѣ A, то сама касательная терція есть совокупность касательныхъ секундъ ко всѣмъ сферамъ мегасферы въ шарѣ A. Но каждыя двѣ сферы пересѣкаются въ циклѣ, а соотвѣтственныя касательныя секунды въ примѣ, то значитъ касательная терція есть также совокупность примъ, касательныхъ въ шарѣ A къ цикламъ мегасферы, проходящимъ чрезъ этотъ шаръ.

Означимъ мегасферу чрезъ M, одну изъ ея сферъ, проходящихъ чрезъ шаръ A, чрезъ S, терцію сферы чрезъ T, а терцію, касательную къ мегасферѣ въ шарѣ A, чрезъ Ta.

Терціи T и Ta пересѣкаются въ касательной къ сферѣ S секундѣ, входящей въ составъ терціи T. Какъ извѣстно [1]), всякая линейная секунда въ терціи опредѣляется, какъ мнимымъ ортогональнымъ кругомъ, кругомъ пересѣченія ортогональнаго шара терціи съ центральною плоскостью секунды; мы говоримъ здѣсь о мнимомъ ортогональномъ кругѣ потому, что онъ вещественъ лишь въ томъ случаѣ, если шаръ, чрезъ центръ котораго проходитъ плоскость секунды, есть мнимый шаръ терціи, а теперь мы имѣемъ въ виду вещественный шаръ A.

И такъ какъ это соображеніе одинаково относится ко всѣмъ секундамъ, касательнымъ къ мегасферѣ въ шарѣ A, то для всѣхъ этихъ секундъ мнимыми ортогональными кругами являются сѣченія шара A центральными плоскостями секундъ. Полная же совокупность этихъ сѣченій составитъ самъ шаръ A какъ мнимый ортогональный шаръ касательной терціи.

По условію же онъ есть полюсъ этой терціи относительно мегасферы. Слѣдовательно, полюсомъ каждой терціи, касательной къ мегасферѣ, служитъ ея ортогональный шаръ, принятый какъ шаръ противоположнаго разряда, то есть мнимый за вещественный и вещественный за мнимый.

Теперь возьмемъ на мегасферѣ четыре шара A, B, C, D, принадлежащіе нѣкоторой терціи T, а слѣдовательно и мегасферѣ M, и въ частности сферѣ S ея пересѣченія съ этою терціей и проведемъ чрезъ нихъ четыре касательныя къ мегасферѣ терціи Ta,

[1]) Н. Г. VI 4.

Tb, *Tc*, *Td*. Эти четыре терціи пересѣкутся въ одномъ единственномъ шарѣ; но такъ какъ каждая изъ этихъ терцій имѣетъ своимъ ортогональнымъ шаромъ одинъ изъ приведенныхъ четырехъ шаровъ сферы S (но какъ шаръ противоположнаго разряда), то значитъ и всѣ вообще терціи, касательныя къ этой сферѣ, и не только онѣ, но и вся терція терцій, имѣющихъ ортогональными шарами шары терціи T, пересѣкаются въ одномъ единственномъ шарѣ, а именно ортогональномъ шарѣ терціи T, но разсматриваемой какъ составленной изъ шаровъ противоположнаго разряда, то есть, въ данномъ случаѣ, шаровъ мнимыхъ. Въ сферѣ шаровъ такимъ ортогональнымъ для ея шаровъ, какъ мнимыхъ, является сопряженный ортогональный шаръ.

Итакъ полюсомъ терціи T, пересѣкающей мегасферу M въ сферѣ S, является сопряженный ортогональный ея шаръ O_2 (а не тотъ ортогональный шаръ, который характеризуетъ терцію T пересѣченія).

Здѣсь умѣстно замѣтить, что съ перемѣной мегасферы при пересѣченіи ея одною и тою же терціею T мѣняется составъ шаровъ сферы S пересѣченія, а также и положеніе сопряженнаго ортогональнаго шара O_2, но главный ортогональный ея шаръ O_1, какъ шаръ, характеризующій линейную терцію, остается неизмѣннымъ.

Если пересѣчемъ M двумя произвольными терціями T_1 и T_2, то 1) получимъ линейную секунду ихъ пересѣченія T_{12}, и 2) двѣ сферы S_1 и S_2, которыя также пересѣкаются, а именно въ циклѣ S_{12}, который и находится въ секундѣ T_{12}, то есть представляетъ циклъ пересѣченія мегасферы этою секундою. Обѣимъ терціямъ коррелятивны соотвѣтственно полюсы O_1 и O_2, а эти снова, въ свою очередь, опредѣляютъ линейную приму O_{12}.

Ясно, что эту приму мы можемъ считать взаимною полярою секундѣ T_{12}.

Если всѣ терціи, касательныя къ мегасферѣ въ шарахъ сферы S, опредѣляемой терціею T, проходятъ черезъ полюсъ O, то всѣ терціи, касательныя въ шарахъ циклѣ S_{12}, проходятъ и чрезъ O_1, и чрезъ O_2, то есть чрезъ приму O_{12}.

Поэтому всякая терція, проходящая чрезъ приму, касательную къ циклу S_{12} и приму O_{12}, представляющую взаимную поляру секундѣ цикла, есть касательная къ мегасферѣ.

Наконецъ три терціи T_1, T_2, T_3 пересѣкутся въ примѣ T_{123}, а сферы ихъ пересѣченія съ мегасферою—въ парѣ шаровъ (если пересѣкутся, то не больше чѣмъ въ парѣ) S_{123}, которая однозначно опредѣляетъ нѣкоторую приму, пересѣкающую мегасферу, а именно приму T_{123}; три ортогональные шара этихъ терцій, какъ ихъ полюсы, опредѣляютъ секунду O_{123}. Ясно, что обѣ терціи, касательныя къ мегасферѣ въ этой парѣ, какъ проходящія черезъ эту секунду, въ ней именно и пересѣкутся.

Поэтому двѣ терціи, касательныя къ мегасферѣ въ парѣ шаровъ S_{123}, пересѣкаются въ линейной секундѣ, представляющей взаимную поляру той примѣ T_{123}, которая опредѣляется этою парою.

Существованіе касательныхъ терцій указываетъ и на существованіе другихъ терцій двоякаго рода: однѣхъ, пересѣкающихъ мегасферу (въ сферахъ) и другихъ, не имѣющихъ съ мегасферою общихъ шаровъ; касательныя терціи разграничиваютъ однѣ отъ другихъ; а такъ какъ касательная терція можетъ быть проведена черезъ каждый шаръ мегасферы, то совокупность этихъ шаровъ разграничиваетъ шары внѣшніе и внутренніе по отношенію къ мегасферѣ.

Внѣшними шарами будутъ тѣ, которые принадлежатъ какой-нибудь касательной терціи, тогда какъ внутренніе не могутъ принадлежать ни одной изъ нихъ. И обратно, изъ любого внѣшняго шара можно къ мегасферѣ провести касательныя терціи, а изъ внутренняго этого нельзя.

Такимъ образомъ, если проведемъ приму шаровъ, пересѣкающую мегасферу напр. въ парѣ S_{123}, то эта пара раздѣлитъ приму на двѣ части: одну, связывающую шары пары, которой принадлежатъ шары внутренніе, и другую съ внѣшними шарами.

Если изъ взаимной поляры, то есть секунды, проведемъ черезъ каждый изъ шаровъ пары по терціи, то, по условію, обѣ будутъ терціями, касательными къ мегасферѣ; онѣ будутъ разграничивать терціи сѣкущія, проводимыя чрезъ внутренніе шары примы и терціи внѣшнія, проводимыя чрезъ внѣшніе шары примы; въ послѣднихъ вовсе нѣтъ шаровъ, общихъ съ мегасферою.

Отсюда мы замѣчаемъ, между прочимъ, что взаимныя поляры (прима и секунда) не имѣютъ общихъ шаровъ, то есть не пересѣкаются. Если бы онѣ пересѣклись, то входили бы въ составъ одной терціи, пересѣкающей мегасферу; между тѣмъ, составляя терціи изъ полярной секунды и внѣшнихъ точекъ примы, мы получимъ совокупности, не заключающія внутреннихъ шаровъ.

Чрезъ каждый шаръ мы можемъ провести терцію терцій. Если шаръ принадлежитъ мегасферѣ, то только одна терція (касательная) имѣетъ съ мега-

сферою общимъ только этотъ шаръ; всѣ же остальныя пересѣкаютъ ее въ сферахъ. Если этотъ шаръ внутренній, то всѣ терціи есть терціи сѣкущія, и во всѣхъ этотъ шаръ внутренній. Каждой терціи имѣется полюсъ въ видѣ внѣшняго шара, а потому терціей, полярной данному шару, явится и внѣшняя терція то есть терція, не имѣющая съ мегасферою общихъ шаровъ.

И обратно, если внѣшней терціи коррелятивенъ шаръ A, то каждому шару этой терціи коррелятивна полярная терція шаровъ, проходящая черезъ шаръ A.

Тотъ же выводъ мы можемъ обосновать и иначе. Мы знаемъ, что на мегасферу мы можемъ смотрѣть какъ на приму сферъ, и въ каждой данному шару коррелятивна линейная секунда; слѣдовательно, во всей мегасферѣ ему будетъ коррелятивна линейная прима линейныхъ секундъ, то есть линейная терція. При этомъ мы приму терцій, опредѣляющихъ сферы, выбираемъ такъ, чтобы онѣ проходили чрезъ постоянную секунду, заключающую въ себѣ этотъ шаръ.

Но кромѣ коррелятивности можно установить и простую гомологичность (реципрочность) шаровъ по отношенію къ мегасферѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, мегасфера имѣетъ центръ, и всѣ ея элементы можно разложить въ концентрическія сферы равныхъ. Если возьмемъ какой-нибудь элементъ, то имѣется и другой равный, связанный съ нимъ центромъ мегасферы какъ центромъ обратнаго равенства.

Два такихъ шара опредѣляютъ линейную приму; и если одинъ изъ нихъ внутренній, то также и другой, а потому такая прима пересѣчетъ мегасферу въ двухъ шарахъ, тоже равныхъ, находящихся внѣ пары первыхъ. Но эта же прима, какъ и всякая вообще, пересѣчетъ терцію, полярную данному шару A въ одномъ шарѣ B, потому что она не находится въ этой терціи. Вотъ шаръ B и есть шаръ, реципрочный шару A по отношенію къ мегасферѣ. Если чрезъ шаръ A проведемъ линейную приму, то реципрочная прима, проходящая чрезъ шаръ B, будетъ цикломъ и т. д. Все это непосредственно слѣдуетъ изъ гармоническихъ отношеній между шарами A и B и двумя шарами мегасферы, принадлежащими той же примѣ.

Мы получили другое выраженіе для реципрочнаго преобразованія, разсмотрѣннаго раньше.

Если принять во вниманіе, что въ силу гармоническихъ отношеній всѣмъ шарамъ безконечно большого діаметра, то есть имѣющимъ безконечно удаленные центры, реципроченъ шаръ, имѣющій центромъ центръ мегасферы, будетъ легко понять, что это и есть шаръ реципрочнаго преобразованія.

Мы ограничились здѣсь, въ видѣ примѣра, ближайшимъ разсмотрѣніемъ полярныхъ отношеній въ системѣ обыкновенныхъ шаровъ. Но эти соображенія, съ отвѣтствующими для каждой системы видоизмѣненіями въ выраженіяхъ, одинаково примѣнимы для всѣхъ системъ четвертой ступени, то есть, въ частности, и для системъ векторіальныхъ шаровъ и параллельныхъ векторовъ.