9. Линейныя совокупности векторовъ въ пространствѣ

Е. С. Федоровъ.

(Доложено 28 октября).

Въ статьѣ „Простэе и точное изображеніе точекъ пространства 4-хъ измѣреній на плоскости посредствомъ векторовъ „[1]) нетолько подробно разсмотрѣна, система векторовъ на плоскости, но и указаны основанія построенія линейной примы векторовъ въ пространствѣ по двумъ даннымъ, а именно, что эта линейная прима состоитъ изъ отрѣзковъ производящихъ гиперболическаго параболоида, заключенныхъ между двумя направляющими, изъ коихъ одна есть линія начальныхъ, а другая—линія концевыхъ точекъ, причемъ само построеніе можетъ быть произведено разложеніемъ двухъ данныхъ векторовъ на слагающіе по тремъ осямъ координатъ и построеніемъ по слагающимъ линейныхъ примъ параллельныхъ векторовъ; три вектора съ общею начальною точкою, но параллельные осямъ координатъ, какія бы направленія мы ни избрали для послѣднихъ, и есть слагающіе векторы линейной примы; концевая точка послѣдняго находится на прямой концевыхъ точекъ.

Чтобы придать этому выводу наглядность, мы можемъ спроектировать оба данные вектора на плоскость, параллельную обоимъ, а затѣмъ оба разложить на слагающіе, взявъ одну ось координатъ перпендикулярно этой плоскости, а обѣ другія параллельно ей. Тогда въ проекціи первая слагающая станетъ точечною, а двумъ парамъ послѣднихъ отвѣчаютъ линейныя примы параллельныхъ векторовъ, а, возвратившись къ самымъ векторамъ, найдемъ, что въ проекціи они будутъ огибать параболу, такъ какъ въ проекціи построеніе не будетъ отличаться отъ того, какъ если бы оба данные векторы сами находились въ этой плоскости.

Но изъ системы однополыхъ гиперболоидовъ такую совокупность производящихъ (проектирующихся въ параболѣ) даютъ именно гиперболическіе параболоиды.

Ихъ основная особенность въ томъ, что всѣ производящія (также какъ и направляющія) параллельны одной и той же плоскости и значитъ именно той, которая опредѣляется двумя данными, опредѣляющими приму, векторами.

Слѣдовательно, если линейную приму векторовъ мы будемъ проектировать именно на эту плоскость, то слагающія векторовъ по перпендикуляру къ этой плоскости нетолько спроектируются въ видѣ точекъ, но и дѣйствительно будутъ имѣть нулевую величину, а значитъ всѣ векторы линейной примы спроектируются на эту плоскость въ натуральную величину. Чтобы получить въ натуральную величину отрѣзки направляющихъ пришлось бы гиперболоидъ проектировать на другую (ассимптотическую) плоскость, а пересѣченіе такихъ двухъ плоскостей съ экстраплоскостью и дало бы двѣ прямыя, въ коихъ къ параболоиду касается экстраплоскость.

Этимъ построеніе линейныхъ примъ векторовъ въ пространствѣ нетолько обосновано, но и наглядно пояснено.

Для системы въ пространствѣ линейная прима векторовъ уже не можетъ быть задана двумя примыкающими другъ къ другу векторами (начальная точка второго совпадаетъ съ концевою точкою перваго), потому что такое заданіе дало бы приму векторовъ въ одной плоскости.

Помимо этого, и всѣ остальные спеціальные случаи линейныхъ примъ сводятся къ примамъ на плоскости или даже спеціально къ параллельнымъ векторамъ, если напр. одинъ изъ данныхъ векторовъ есть точечный, или оба вектора находятся на прямой.

Тремя произвольно данными векторами опредѣляется линейная секунда и одновременно сферо-прима векторовъ.

---

[1]) Эти Записки, II, 237.

Начальныя точки данныхъ векторовъ опредѣляютъ плоскость начальныхъ точекъ линейной секунды.

Разложивъ каждый векторъ на два слагающихъ, изъ коихъ одинъ перпендикуляренъ къ найденной плоскости, найдемъ три концевыхъ точки слагающихъ, которыя опредѣляютъ плоскость концевыхъ точекъ слагающихъ векторовъ этого направленія. Впрочемъ, въ силу независимости слагающихъ векторовъ по этому направленію отъ слагающихъ по другимъ направленіямъ мы получимъ тотъ же результатъ, какъ если бы за плоскость концевыхъ точекъ приняли ту, которая опредѣляется концевыми точками данныхъ векторовъ. Въ частности, всѣ тѣ векторы линейной секунды, которые находятся въ плоскости начальныхъ точекъ, имѣютъ начальными точками прямую—ту самую прямую, которая была бы осью линейной секунды векторовъ, параллельныхъ этимъ слагающимъ.

Итакъ, въ каждой линейной секундѣ векторовъ имѣется линейная прима такихъ, которые находятся въ плоскости начальныхъ точекъ.

Изъ трехъ слагающихъ въ плоскости начальныхъ точекъ мы можемъ составить линейную секунду векторовъ въ этой плоскости. Какъ извѣстно [1]), такая секунда имѣетъ одинъ точечный векторъ, который составляетъ центръ линейной секунды, а всѣ исходящіе изъ него лучи есть начальныя точки линейныхъ примъ параллельныхъ векторовъ. Если изъ концевой точки вектора мы возставимъ перпендикуляръ, то точка пересѣченія послѣдняго съ плоскостью концевыхъ точекъ дастъ концевую соотвѣтственнаго вектора. То же получимъ, если изъ начальной точки вектора возставимъ перпендикуляръ и точку пересѣченія послѣдняго съ плоскостью вертикальныхъ слагающихъ (представляя себѣ плоскость начальныхъ точекъ горизонтальною) примемъ за другую слагающую того же вектора.

Тѣ векторы, начальныя точки которыхъ есть лучи линейной секунды слагающихъ векторовъ въ плоскости начальныхъ точекъ, всѣ имѣютъ разныя величины вертикальныхъ слагающихъ, а потому между ними не можетъ быть двухъ параллельныхъ. Въ общемъ случаѣ во всей линейной секундѣ нѣтъ ни точечнаго вектора, ни двухъ параллельныхъ векторовъ.

Одно неразрывно связано съ другимъ: если бы имѣлось два параллельныхъ вектора, то ими опредѣлялась бы линейная прима параллельныхъ векторовъ, въ томъ числѣ одинъ точечный; если бы имѣлся точечный векторъ то изъ него и произвольнаго другого вектора составилась бы линейная прима параллельныхъ векторовъ, и точечный векторъ сталъ бы центромъ всей линейной секунды, и всѣ исходящіе изъ него лучи были бы начальными точками параллельныхъ векторовъ.

Но это уже составляетъ спеціальную линейную секунду, обладающую центромъ. Она только тѣмъ отличалась бы отъ линейной секунды векторовъ въ плоскости, что ея векторы вообще не находились бы въ плоскости начальныхъ точекъ, а совокупность всѣхъ направленій векторовъ секунды была совокупность направленій, параллельныхъ нѣкоторой плоскости; иначе сказать совокупность всѣхъ направленій всѣхъ векторовъ секунды была бы линейною примою направленій, и это выражалось бы характерною для секунды экстрапрямою.

Такая спеціальная секунда опредѣлилась бы заданіемъ трехъ векторовъ, изъ которыхъ два параллельные. Если бы всѣ три заданные вектора были параллельными, то мы получили бы спеціальную секунду параллельныхъ векторовъ съ прямою точечныхъ векторовъ или осью секунды.

Если бы два заданные вектора имѣли бы общую начальную точку, мы получили бы спеціальную линейную секунду, всѣ начальныя точки которой находились бы на прямой, и которую поэтому можно было бы назвать прямолинейною секундою. Наконецъ, если бы всѣ три данные вектора имѣли бы общую начальную точку, мы получили бы точечную секунду съ векторами всѣхъ направленій, какъ лучей линейной секунды.

Четыре данные произвольные вектора опредѣляютъ линейную терцію векторовъ (и одновременно ихъ сферосекунду).

Таковая необходимо имѣетъ одинъ точечный векторъ, который и составляетъ центръ линейной терціи.

Это слѣдуетъ изъ того, что если разложимъ данный векторъ на слагающія по тремъ осямъ координатъ, то по параллельнымъ слагающимъ составимъ линейныя терціи параллельныхъ векторовъ, и каждая изъ этихъ трехъ терцій имѣетъ характеристичную плоскость линейной терціи то есть плоскость точечныхъ векторовъ, а три плоскости пересѣкаются въ одной точкѣ, которая и есть искомый точечный векторъ терціи. Этой точкою и данными векторами вполнѣ опредѣляется искомая линейная терція, потому что всѣ лучи этой линейной терціи есть начальныя точки параллельныхъ векторовъ.

Если возьмемъ нѣкоторую сферу, концентричную

[1]) Эти Записки, II, 221 и слѣд.

съ линейной терціею, то совокупность концевыхъ точекъ векторовъ, начальныя точки которыхъ есть точки этой сферы, составитъ эллипсоидъ, служащій наглядным выраженіемъ свойствъ данной линейной терціи.

Что это есть именно эллипсоидъ, видно изъ слѣдующаго: гомологичность начальныхъ и концевыхъ точекъ векторовъ приводитъ къ выводу, что это секунда концевыхъ точекъ есть коносекунда; въ ней же нѣтъ ни одного точечнаго, а слѣдовательно не можетъ быть и мнимыхъ векторовъ, или въ частности, ни одного вектора безконечно большой длины то есть ни одной концевой экстраточки; это несовмѣстимо ни съ какими другими коносекундами кромѣ эллипсоидовъ.[1])

Мы можемъ признать существованіе трехъ особыхъ осей[2]) линейной терціи, кои заключаютъ въ себѣ линейныя примы векторовъ. Это слѣдуетъ изъ того, что гомологичность двухъ линейныхъ секундъ лучей приводитъ къ гексапримѣ какъ совокупности точекъ, въ коихъ пересѣкаются гомологичные лучи. Каждая же плоскость, въ томъ числѣ и экстраплоскость, пересѣкаетъ гексаприму въ трехъ точкахъ, а эти три экстраточки и выражаютъ направленія, одинаковыя какъ для лучей начальныхъ точекъ, такъ и для тѣхъ векторовъ, для которыхъ эти точки есть начальныя.

Но такъ какъ изъ трехъ точекъ пересѣченія, одна пара можетъ быть мнимою, то мы можемъ раздѣлить линейныя терціи векторовъ на два разряда: въ однихъ имѣются три такія вещественныя особыя оси, а въ другихъ имѣется только одна такая особая вещественная ось, а пара другихъ осей есть пара мнимая.

Въ плоскостяхъ, проходящихъ чрезъ пару особыхъ лучей, всѣ векторы линейной секунды находятся въ одной плоскости, и значитъ въ линейныхъ терціяхъ перваго разряда имѣется три особыя плоскости, проходящія чрезъ три особыя оси, въ которыхъ линейная секунда векторовъ есть линейная секунда векторовъ въ соотвѣтственныхъ плоскостяхъ. Въ остальныхъ плоскостяхъ векторы выходятъ изъ предѣловъ этихъ плоскостей, и отъ нихъ остаются только ихъ начальныя точки и, какъ доказано выше, только одна линейная прима векторовъ въ нихъ.

Только эти три особыя плоскости есть плоскости, въ коихъ находятся линейныя секунды векторовъ перваго разряда. Если бы мы провели чрезъ особую ось плоскость, не проходящую чрезъ другую особую, то въ линейной секундѣ не было бы еще ни одного вектора, находящагося въ этой плоскости; въ противномъ случаѣ мы получили бы линейную секунду векторовъ въ этой плоскости, и такъ какъ въ ней есть одна особая ось, то должна быть и другая, и секунда была бы перваго разряда и заключала бы въ себѣ двѣ особыя оси. Линейныя терціи второго разряда не могутъ пересѣкаться въ плоскостяхъ линейныхъ секундъ перваго разряда; но въ числѣ линейныхъ секундъ въ пространствѣ могутъ находиться и секунды съ особою осью, которыя представятъ лишь спеціальный случай линейной примы векторовъ, находящихся въ плоскости начальныхъ точекъ.

Если бы оказалось, что всѣ четыре опредѣляющіе вектора имѣютъ начальныя точки въ одной плоскости, то эта плоскость была бы общею плоскостью начальныхъ точекъ и терція стала бы плоскостною: въ ней каждая начальная точка была бы общею для нѣкоторой линейной примы.

Мы могли бы опредѣлить ее плоскостью начальныхъ точекъ, нѣкоторою точечною линейною примою и еще какимъ-нибудь векторомъ, начальная точка котораго находится въ плоскости предъидущей примы; но такъ какъ каждой начальной точкѣ принадлежитъ точечная прима, а вмѣстѣ съ тѣмъ и плоскость, то прямая пересѣченія обѣихъ плоскостей также заключаетъ въ себѣ векторъ съ тою же начальною точкою, а потому въ такой терціи имѣются и прямолинейныя секунды векторовъ въ плоскости, и значитъ такую терцію мы можемъ составить по прямолинейной секундѣ и еще какому-нибудь вектору.

Ясно, что центръ прямолинейной секунды, какъ точечный векторъ, есть одновременно и центръ плоскостной терціи. Съ начальною точкою еще какого-нибудь вектора также связана плоскость, которая съ предъидущею даетъ одно, и только одно общее направленіе. Если въ первой прямолинейной секундѣ возьмемъ произвольную начальную точку и построимъ ея векторъ этого направленія, то получимъ два параллельные вектора, а слѣдовательно и нѣкоторую ихъ линейную приму съ ея точечнымъ векторомъ. Отсюда видимъ, что въ плоскостной линейной терціи имѣется линейная прима точечныхъ векторовъ то есть прямая центровъ; всѣ плоскости прямолинейныхъ секундъ параллельны.

[1]) Едва ли здѣсь нужно останавливаться на томъ, что собственно линейная терція векторовъ есть полное выраженіе гомогенной деформаціи кристалловъ, въ частности, законовъ ихъ термическаго расширенія.

Хотя линейная терція опредѣляется только четырьмя векторами, дающими четыре соотвѣтствія между начальными и конечными точками, но изъ изложеннаго видно, какъ мы устанавливаемъ соотвѣтствіе между всѣми точками вообще, а для установленія коллинеарности въ данномъ случаѣ достаточно пяти соотвѣтствій.

[2]) Въ частности, термическихъ осей кристалла.

Отсюда слѣдуетъ, что такую линейную терцію мы можемъ построить по прямолинейной секундѣ и точечному вектору и получаемъ ось плоскостной терціи то есть прямую центровъ.

Какъ видимъ, мы можемъ также построить такую линейную терцію, исходя изъ линейной секунды параллельныхъ векторовъ и еще одного вектора (съ начальною точкою въ общей плоскости начальныхъ точекъ). Но такимъ векторомъ и осью секунды вполнѣ опредѣляется вся линейная секунда; съ другой стороны, прибавленнымъ векторомъ и тѣмъ, который принадлежитъ линейной секундѣ параллельныхъ векторовъ, опредѣляется точечная линейная прима векторовъ. Поэтому въ плоскостной линейной терціи заключается линейная прима линейныхъ секундъ параллельныхъ векторовъ, а каждой ея начальной точкѣ принадлежитъ точечная линейная прима векторовъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и опредѣленная прямая концевыхъ точекъ, и всѣ такія прямыя во всей терціи параллельны между собою.

Постоянными, опредѣляющими плоскостную линейную терцію, являются слѣдующія: 1) плоскость начальныхъ точекъ, 2) положеніе оси терціи, 3) отношеніе между длиною вектора, находящагося въ плоскости начальныхъ точекъ, и разстояніемъ его отъ оси терціи, 4) направленіе прямыхъ концевыхъ точекъ точечныхъ линейныхъ примъ и 5) направленіе векторовъ въ плоскости начальныхъ точекъ.

Чтобы по этимъ даннымъ опредѣлить векторы, имѣющіе начальною данную точку, мы чрезъ нее проводимъ прямую направленія 5); по отношенію 3) находимъ концевую точку вектора на полученной прямой и чрезъ нея проводимъ прямую направленія 4); эта прямая и есть искомая совокупность концевыхъ точекъ векторовъ.

Пять произвольно данныхъ векторовъ опредѣляетъ линейную кварту. Ясно, что въ квартѣ общаго характера каждая точка пространства есть начальная точка линейной примы векторовъ. Въ частности, совокупность всѣхъ векторовъ, имѣющихъ начальными точками всѣ точки нѣкоторой плоскости, составляютъ плоскостную линейную терцію, и значитъ линейную кварту мы можемъ опредѣлить по таковой и еще произвольно взятому вектору; а такъ какъ плоскостная терція содержитъ особую ось (точечныхъ векторовъ), то таковая должна находиться и въ линейной квартѣ.

И дѣйствительно, если возьмемъ линейную терцію общаго характера и еще нѣкоторый векторъ, то, такъ какъ начальная точка послѣдняго уже въ терціи принадлежала нѣкоторому вектору, то въ квартѣ ей принадлежитъ линейная прима векторовъ и ея плоскость; то же параллельно принадлежитъ и всѣмъ точкамъ луча, исходящаго изъ центра терціи. Взявъ произвольную точку пространства, мы находимъ, что и ей принадлежитъ линейная прима векторовъ и ея плоскость, а слѣдовательно между векторами двухъ такихъ произвольныхъ примъ имѣется по одному, и и только по одному вектору одинаковаго направленія; два параллельныхъ вектора опредѣляютъ ихъ линейную приму, а вмѣстѣ съ тѣмъ и нѣкоторый точечный векторъ. Если же на всякой прямой пространства долженъ находиться точечный векторъ, то, такъ какъ совокупность таковыхъ можетъ быть только линейная, она, должна быть линейною секундою и выражаться плоскостью линейной кварты.

Отсюда видимъ, что линейную кварту общаго характера мы можемъ опредѣлить тремя точечными векторами (въ свою очередь опредѣляющими плоскость кварты) и какою-нибудь точечною линейною примою.

Имѣя эти данныя, мы легко найдемъ векторы для любой ихъ начальной точки A, взятой въ пространствѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ этой точки чрезъ начальную точку примы проведемъ прямую до пересѣченія съ плоскостью кварты въ нѣкоторой точкѣ O; принявъ эту точку за центръ прямого или обратнаго подобія [1]), легко построимъ въ точкѣ A точечную приму векторовъ, подобную данной для опредѣленія; это точечная прима и есть искомая.

Шестью произвольно-взятыми векторами опредѣляется линейная квинта векторовъ.

Мы можемъ ее построить, исходя изъ линейной кварты и еще произвольно даннаго вектора. Но такъ какъ въ начальной точкѣ этого вектора мы уже имѣемъ точечную линейную приму векторовъ, то ясно, что теперь получимъ точечную линейную секунду векторовъ то есть каждая точка пространства есть общая начальная точка векторовъ, концевыя точки которыхъ въ совокупности образуютъ нѣкоторую плоскость. Ясно, что во всей линейной квинтѣ всѣ точечныя линейныя секунды образуютъ подобныя совокупности точки и плоскости, причемъ центръ ихъ прямого или обратнаго подобія есть нѣкоторая точка плоскости линейной квинты, какъ совокупности точечныхъ векторовъ.

[1]) Это зависитъ отъ того, находится ли точка A съ одной и той же стороны отъ плоскости линейной кварты, что и данная начальная точка, или со стороны противоположной.