8. Системы круговъ на сферѣ.

Е. С. Федорова.

(Доложено 25 ноября).

Стереографическая проекція какъ бы непосредственно служитъ для выраженія системы круговъ на сферѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы на чертежѣ въ этой проекціи изобразимъ какую-нибудь совокупность круговъ, то изображеніе относится и къ опредѣленной совокупности круговъ и на сферѣ. При этомъ, конечно, изображеніе не ограничивается тою частью плоскости чертежа, которая выражаетъ полусферу и которая ограничена такъ называемою окружностью проекціи, но обнимаетъ всѣ части плоскости чертежей до его безграничныхъ предѣловъ.

Два различные круга, начерченные на плоскости, выражаютъ и два различные круга на сферѣ.

Отсюда видимъ, что по проведеннымъ кругамъ не можемъ даже рѣшить, относятся ли они къ самой плоскости или же они составляютъ только проекціи круговъ на сферѣ, и если дана окружность проекціи, то положеніе ихъ на сферѣ также ясно, какъ и непосредственное положеніе ихъ на плоскости; наглядность этого положенія на сферѣ достигаетъ высшей степени, если на чертежѣ нанесена стереографическая сѣтка, не ограниченная предѣлами окружности проекціи. Всѣ тѣ точки, которыя находятся за этими предѣлами, есть точки второй полусферы.

Это тождество между кругами на плоскости и проекціями круговъ на сферѣ свидѣтельствуетъ о томъ, что даже нельзя поставить задачи въ системѣ круговъ, которая для одной изъ системъ могла бы разрѣшаться иначе, чѣмъ для другой, что ярко свидѣтельствуетъ о родственности обоихъ системъ круговъ, а слѣдовательности и родственности правильно понимаемыхъ системъ точекъ на плоскости и на сферѣ. Если на плоскости проведемъ кривую n-го порядка, то эта самая кривая есть проекція кривой того же порядка и на сферѣ. Въ частности, прямой то есть линейной примѣ точекъ на плоскости проективна прима точекъ на сферѣ.

Но въ стереографической проекціи прямая выразитъ дугу малаго круга на сферѣ, проходящую чрезъ центръ O' проектирующихъ лучей, находящійся на сферѣ въ ея пересѣченіи съ діаметромъ, перпендикулярнымъ къ плоскости, а всѣ экстраточки плоскости проектируютъ на сферѣ эту единственную точку.

Слѣдовательно, родственными является обыкновенная система точекъ на плоскости и система точекъ на сферѣ съ постояннымъ параметромъ—точкою O'.

Но вѣдь такая система имѣется и на плоскости, и мы ее получаемъ, если возьмемъ на ней постоянную точку Z и примемъ ее за центръ круга реципрочнаго преобразованія.

Если бы мы опредѣлили реципрочное преобразованіе на плоскости только какъ преобразованіе обратными радіусами, то могли бы подумать, что такового на сферѣ не имѣется, такъ какъ для сферы не примѣнимо для діаметральныхъ сферическихъ прямыхъ на кругѣ основное отношеніе $r^2 = ab$, гдѣ r радіусъ круга, а a и b разстоянія реципрочныхъ точекъ отъ центра.

Но если, какъ это и слѣдуетъ, мы это преобразованіе опредѣлимъ такъ, что точки a и b есть лишь пары инволюціи на діаметральной сферической прямой, причемъ двойными точками инволюціи будутъ двѣ точки круга на ней, то существованіе реципрочнаго преобразованія на сферѣ станетъ очевиднымъ. Тогда легко докажемъ, что всякій сферическій кругъ реципрочно преобразуется также въ кругъ, а всякая сферическая прямая—въ кругъ, проходящій чрезъ центръ круга преобразованія.

Въ силу родственности обѣихъ разсматриваемыхъ системъ изъ одной въ другую переносятся всѣ построенія, а слѣдовательно, въ частности, и реципрочное преобразованіе.

Въ проективной сферической системѣ линейными примами будутъ уже малые круги, проходящіе чрезъ

проективную точку Z′ на сферѣ, а проекціи этихъ круговъ на плоскости будутъ также малые круги, проходящіе чрезъ точку Z, и въ этой системѣ эти малые круги есть также линейныя примы точекъ.

Съ перваго взгляда можетъ показаться, что въ силу родственности центры круговъ на плоскости должны быть проективны сферическимъ центрамъ на сферѣ, такъ какъ можетъ показаться, что тогда равнымъ отрѣзкамъ—радіусамъ круговъ на сферѣ проективны равные же отрѣзки—радіусы проективныхъ круговъ на сферѣ; чтобы видѣть ошибочность такого представленія, достаточно указать на то, что отрѣзки вообще считаются по линейнымъ примамъ, а теперь въ обѣихъ системахъ линейныхъ примъ, таковыми являются малые круги; въ частности, въ системѣ на плоскости, только радіусы круга Z принадлежатъ дѣйствительнымъ прямымъ на плоскости.

Чтобы въ обѣихъ системахъ получить величины равныхъ отрѣзковъ во всѣхъ районахъ чертежа мы по пріему, который былъ мною примѣненъ въ статьѣ о родственныхъ системахъ, должны раздѣлить всю плоскость чертежа двумя системами равноотстоящихъ перпендикулярныхъ прямыхъ на квадратную сѣть и напр., около каждаго квадрата этой сѣти описать кругъ, а затѣмъ всю эту систему реципрочно преобразовать. Тогда получимъ реципрочную квадратную сѣть, которая и даетъ намъ соотвѣтствующія равныя величины отрѣзковъ во всѣхъ районахъ чертежа; такое опредѣленіе двухъ равныхъ отрѣзковъ вполнѣ согласуется съ основнымъ положеніемъ, по которому четвертая гармоническая точка на линейной примѣ этихъ отрѣзковъ есть экстраточка.

Если точку Z′ на сферѣ будемъ перемѣщать (проективно будетъ перемѣщаться и точка Z), то, въ частности, можемъ привести ее въ положеніе O′, и тогда ей будутъ проективны на плоскости всѣ экстраточки [1]) и линейныя примы — малые круги — станутъ прямыми на плоскости, а на сферѣ все-таки останутся малыми кругами, но проходящими чрезъ точку O′.

Въ этомъ смыслѣ на обыкновенную (самостоятельную) систему точекъ на плоскости мы можемъ смотрѣть какъ на особый спеціальный случай системы съ параметромъ; такого же спеціальнаго случая на сферѣ не имѣется.

Если мы примемъ во вниманіе, что при проектированіи въ стереографической проекціи также и углы въ безконечно-малыхъ районахъ плоскости переносятся на безконечно-малые районы сферы, то значитъ сохраняется значеніе и перпендикулярныхъ пересѣченій круговъ. Мы можемъ принять кругъ реципрочнаго преобразованія на сферѣ за вещественный или мнимый, и легко получимъ полныя линейныя секунды обыкновенныхъ круговъ, какъ круговъ, ортогонально пересѣкающихъ круги преобразованія.

Мы легко получаемъ на сферѣ и систему, элементы которой есть круги векторіальные.

Въ самомъ дѣлѣ, если даны два такіе круга, то, проведя чрезъ нихъ пару общихъ касательныхъ (соотвѣтственно ихъ векторіальности), мы легко опредѣлимъ по нимъ всю линейную приму векторіальныхъ круговъ на сферѣ, а этимъ устанавливается сама система.

Но можетъ случиться, что оба данные круга не имѣютъ общихъ вещественныхъ касательныхъ. Въ такомъ случаѣ, какъ и для примъ на плоскости, приходится признать существованіе касательныхъ мнимыхъ. Какъ въ системѣ на плоскости, такъ и въ системѣ на сферѣ, центръ линейной примы, то есть точечный векторіальный кругъ, есть въ то же время и центръ инволюціи лучей. Если возьмемъ одинъ такой лучъ, который пересѣчетъ всѣ круги линейной примы, то найдемъ, что совокупность его полюсовъ по отношенію къ этимъ кругамъ составитъ другой лучъ, сопряженный съ первымъ, и притомъ инволюція получится эллиптическая. Въ частности, централь линейной примы и ея главная нормаль (перпендикуляръ къ ней, проведенный изъ центра) есть два такіе сопряженные луча инволюціи. Мнимые двойные лучи инволюціи есть мнимыя общія касательныя.

Для системы на плоскости совершенно очевидно, что всѣ круги линейной примы пересѣкаютъ главную нормаль подъ равными углами; это очевидно изъ того, что ея центръ есть центръ подобія, а главная нормаль проходитъ чрезъ центръ подобія. Послѣднему нѣтъ мѣста въ системѣ на сферѣ въ буквальномъ смыслѣ слова; тѣмъ не менѣе и здѣсь всѣ круги пересѣкаютъ главную нормаль подъ равными же углами.

Это доказывается тѣмъ, что если центръ примы примемъ за центръ круговъ преобразованія обратными радіусами, то главная нормаль всегда преобразуется сама въ себя, а круги линейной примы въ другіе ея же круги, такъ что въ совокупности эта прима всегда преобразуется сама въ себя, а такъ какъ при реципрочномъ преобразованіи углы между соотвѣтственными и безконечно-малыми элементами сферическихъ примъ сохранятся, то отсюда и вытекаетъ равенство всѣхъ вообще угловъ пересѣченія круговъ примы главною нормалью.

[1]) По этой особенности такія системы не будутъ родственными въ точномъ смыслѣ слова и названы полуродственными. Значеніе этого ограничительнаго понятія будетъ видно изъ дальнѣйшаго.

Если, напр., даны два векторіальные круга на на сферѣ одинаковой или противоположной векторіальности, но такихъ, что одинъ находится внутри другого, то построеніе линейной примы требуетъ отысканія такой нормали, которая пересѣкаетъ оба круга подъ равными углами.

Разница въ обоихъ случаяхъ состоитъ въ томъ, что въ одномъ случаѣ собственно равные напр.— острые углы находятся по одну сторону главной нормали, и тогда по другую сторону находятся дополнительные тупые углы, въ другомъ случаѣ съ обѣихъ сторонъ нормали находятся по одному острому и одному дополнительному тупому углу.

Несмотря на родственность системъ съ параметромъ въ видѣ постоянной точки на плоскости и на сферѣ въ коррелятивныхъ понятіяхъ той и другой системы приходится признать глубокое различіе, но лишь въ обычныхъ представленіяхъ, а не по ходу логики.

На плоскости имѣются параллельныя прямыя, и въ обычномъ представленіи это такія прямыя, которыя не имѣютъ общихъ точекъ въ предѣлахъ какого-угодно большаго чертежа. Родственныя имъ линейныя примы на сферѣ есть малые круги, проходящіе чрезъ общую точку O′ и притомъ имѣющіе въ этой общей точкѣ общую касательную.

Если бы каждой экстраточкѣ на плоскости была родственна своя экстраточка на сферѣ, то только параллельныя прямыя одного направленія соотвѣтствовали кругамъ, имѣющимъ общую экстраточку, а прямыя другого направленія соотвѣтствовали бы кругамъ, имѣющимъ другую общую точку. Въ этомъ существенное различіе между родственными и полуродственными системами [1]), и теперь ясно, что системы съ параметромъ — постоянною точкою — на плоскости и на сферѣ дѣйствительно родственны, тогда какъ обыкновенная система точекъ, какъ особый спеціальный случай предъидущей системы, уже только полуродственна съ соотвѣтственною системою на сферѣ.

Съ понятіемъ о параллельности на плоскости связывается извѣстнымъ образомъ понятіе о подобіи. Это понятіе можно перенести и на системы нетолько родственныя, но и полуродственныя, но какъ становятся различны представленія, связанныя съ примѣненіемъ этихъ понятій. Изложеніе этихъ различій въ деталяхъ потребовало бы много мѣста въ изложеніи, но по существу оно весьма понятно.

Этимъ задача построенія линейной примы исчерпана.

Но этимъ же предрѣшается и задача построенія линейной секунды векторіальныхъ круговъ на сферѣ. Ясно, что таковая обладаетъ особою осью, какъ совокупностью точечныхъ круговъ или центровъ проходящихъ чрезъ нее линейныхъ примъ. Для полнаго опредѣленія линейной секунды можетъ быть еще данъ уголъ между общими вещественными касательными этихъ линейныхъ примъ (съ центральными, перпендикулярными къ оси секунды); это относится къ секундамъ перваго разряда. Въ секундахъ же второго разряда всѣ круги пересѣкаютъ ось подъ однимъ и тѣмъ же угломъ то есть представляютъ совокупность круговъ, *изогональныхъ* по отношенію къ этой оси. Иначе, эта постоянная сводится къ углу между двумя мнимыми касательными.

Что касается сферопримъ и сферосекундъ векторіальныхъ круговъ на сферѣ, то онѣ вполнѣ опредѣляются реципрочнымъ преобразованіемъ линейныхъ примъ и секундъ.

Мы можемъ сказать, что сфероприма векторіальныхъ круговъ на сферѣ есть совокупность, ограниченная двумя кругами, вещественными или мнимыми, и что вообще каждая такая сфероприма сопровождается другою, совокупность круговъ которой выполняетъ ту часть сферы, которая остается незанятою кругами первой части.

Аналогія между системами векторіальныхъ круговъ на плоскости и на сферѣ идетъ такъ далеко, что можно даже выдѣлить *особую* сфероприму, въ которой обѣ сопровождающія другъ друга совокупности круговъ совмѣстимо равны. Изъ двухъ, ограничивающихъ круги этой примы, круговъ, также какъ на плоскости, одинъ представляетъ сферическую прямую, діаметрально разсѣкающую другой кругъ.

Совершенно аналогично мы получаемъ и сферосекунду векторіальныхъ круговъ на сферѣ, какъ совокупность концентрическихъ круговъ, точки которыхъ есть центры равныхъ круговъ. Существенная разница со сферопримами на плоскости состоитъ въ томъ, что на сферѣ, конечно, не имѣется круговъ безконечно-большого діаметра или экстракруговъ.

На сферѣ и экстракругъ есть другой точечный кругъ.

Мы найдемъ и поймемъ глубокую аналогію между линейными и сферическими совокупности обыкновенныхъ и векторіальныхъ круговъ на плоскости и на сферѣ. Аналогія эта настолько глубока, что всѣ построенія, относящіяся къ перечисленнымъ совокупностямъ, сводятся только къ перефразировкѣ

---

[1]) Напр. въ родственныхъ мы отличаемъ параболы отъ гиперболъ, а въ полуродственныхъ эти понятія смѣшиваются.

въ примѣненіи къ разсматриваемой системѣ, и причина этой глубокой аналогіи вполнѣ ясна: какъ на плоскости, такъ и на сферѣ, системы точекъ и круговъ родственны, но между собою эти системы на плоскости и на сферѣ существенно различны, такъ какъ аналогичные образы не коррелятивны и не могутъ быть коррелятивны, такъ какъ въ первыхъ имѣются экстраэлементы, а во вторыхъ ихъ не имѣется.

Родственность между системами точекъ и круговъ на сферѣ устанавливается коррелятивностью ихъ сфероприм и отсутствіемъ экстраэлементовъ, что даетъ право переносить всѣ построенія и теоремы первой во вторую. При этомъ конечно имѣются въ виду построенія, связанныя съ совокупленіемъ элементовъ въ геометрическіе образы, но не тѣ, которыя связаны съ особенностью самихъ образовъ. Напр., нельзя рѣзко не различать вещественныхъ круговъ отъ мнимыхъ, почему родственныя операціи представляются различными. Между точками никакихъ мнимыхъ не имѣется, а потому и связанныя съ этимъ различія операцій съ одной системы на другую не переносятся.

Въ виду существованія глубокой аналогіи между системами круговъ на плоскости и на сферѣ, нѣтъ надобности распространяться о построеніяхъ послѣдней. Заслуживаетъ развѣ быть отмѣченнымъ то обстоятельство, что та же аналогія захватываетъ и отношенія вещественныхъ и мнимыхъ круговъ. Напр., на сфероприму круговъ на сферѣ можно смотрѣть какъ на пересѣченіе двухъ линейныхъ секундъ, изъ которыхъ одна есть обыкновенная линейная секунда круговъ, а другая та, которая получится, если мы составимъ линейную секунду по тѣмъ же тремъ кругамъ, но вещественные замѣнимъ мнимыми, а, сдѣлавъ это, въ полученной линейной секундѣ произведемъ обратное измѣненіе то есть опять мнимые примемъ за вещественные. Это показываетъ, что такъ полученныя секунды есть сферосекунды обыкновенныхъ круговъ.

Какъ извѣстно, на плоскости сферопримы векторіальныхъ круговъ представляютъ совокупности пересѣченія линейныхъ секундъ и сферосекундъ этихъ круговъ; но можно на нихъ смотрѣть и какъ на совокупности пересѣченія линейныхъ секундъ векторіальныхъ круговъ съ линейными же секундами обыкновенныхъ круговъ. Это происходитъ оттого, что линейныя совокупности обыкновенныхъ круговъ въ системѣ векторіальныхъ представляютъ уже сферосовокупности; это понять понятно потому, что совокупности векторіальныхъ круговъ тождественныхъ системою круговъ, огибаемыхъ сферопримами лучей, а таковыя образуютъ линейныя совокупности, которыя въ системѣ сфероприм точекъ (въ общемъ случаѣ это относится не только къ сферопримамъ, но и къ конопримамъ, составляютъ уже сферическія совокупности.

Мы увидимъ дальше, что всѣ эти соотношенія имѣютъ мѣсто и для системъ на сферѣ.

Теперь перейдемъ къ другой системѣ на сферѣ, у которой линейныя примы большіе круги. Эта система точекъ родственна съ линейною секундою лучей, исходящихъ изъ одного центра. Мы ихъ можемъ привести въ перспективное положеніе, если центръ второй системы помѣстимъ въ центрѣ сферы. Въ частности, конусамъ родственны пары діаметрально противоположныхъ конопримъ, а конусамъ вращенія—пары круговъ.

Для этихъ системъ реципрочное преобразованіе не имѣетъ мѣста. Мы это докажемъ методомъ приведенія къ нелѣпости.

Для доказательства вообразимъ, что нѣкоторый шаръ пересѣченъ плоскостью p въ кругѣ, а полюсъ этой плоскости есть точка P. Проведемъ на шарѣ произвольный кругъ R, а чрезъ него и точку P проведемъ конусъ, который пересѣчетъ шаръ въ нѣкоторой кривой, про которую мы именно и докажемъ, что это есть кругъ R′, реципрочно-преобразованный на шарѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, если P примемъ за центръ, а плоскость p за плоскость коллинеарнаго преобразованія, то шаръ окажется самоколлинеарнымъ, а плоскость круга R преобразуется въ плоскость круга R′, которая съ предыдущею пересѣкается въ прямой, находящейся въ плоскости коллинеаціи.

Что это преобразованіе на поверхности сферы есть преобразованіе реципрочное, видно изъ того, что каждый лучъ конуса P даетъ четыре гармоническія точки, а, соединивъ эти точки пересѣченія и точку P съ центромъ шара, получимъ четыре гармоническіе радіуса, которыя и отмѣчаютъ на сферѣ четыре гармоническіе точки, именно и опредѣляющіе реципрочность преобразованія.

Но кривая реципрочности, какъ это очевидно въ данномъ случаѣ по проведеніи радіусовъ сферы чрезъ четвертыя гармоническія точки на плоскости p, есть уже не кругъ, а нѣкоторая коноприма, положеніе которой на сферѣ мѣняется вмѣстѣ съ положеніемъ реципрочно преобразуемыхъ круговъ, а это уже не составляетъ реципрочнаго преобразованія, что и тр. д.

Съ перваго раза представляется, будто на сферѣ системъ обыкновенныхъ круговъ и вовсе не имѣется; въ самомъ дѣлѣ, если даны два круга, то мы могли бы опредѣлить линейную приму ихъ ортогональнымъ кругомъ, вещественнымъ или мнимымъ. Но задача представляется неопредѣленною и допускаетъ два

различныхъ рѣшенія, такъ какъ на той же сферѣ представлены и круги діаметрально противоположныя.

Но мы могли бы стать на такую точку зрѣнія, чтобы вообще принимать во вниманіе изъ двухъ противоположныхъ круговъ только одинъ. Чтобы имѣть возможность сдѣлать это, мы также должны какъ-нибудь различить обѣ половины, а это совершенно соотвѣтствуетъ операціи приданія векторіальности. Существенное различіе отъ послѣдней только въ томъ, что по отношенію къ ней оба противоположные круга для насъ равноцѣнны, именно какъ круги противоположной векторіальности. При другой же точкѣ зрѣнія мы обращаемъ вниманіе только на одинъ отмѣченный кругъ, а противоположный для насъ какъ бы не существуетъ [1]). Въ этомъ смыслѣ круги на сферѣ, такъ понимаемыя, не могутъ быть названы векторіальными. Послѣдніе не представлены мнимыми разностями, тогда какъ обыкновенныя таковыми непремѣнно представлены.

Это побуждаетъ насъ считать такіе круги обыкновенными, но все-таки между парами противоположныхъ отличать *главные* и задаваться только ими.

Что въ сущности мы имѣемъ здѣсь дѣло не съ векторіальностью, можно видѣть изъ того, что тѣ же условія мы подразумѣваемъ и для точекъ на сферѣ. Если даны три точки, то конечно ими сферическій кругъ опредѣляется однозначно; но если одну изъ этихъ точекъ замѣнимъ противоположною, то получаемъ уже другой кругъ. То же, конечно, относится и къ тетрапримамъ и конопримамъ; всегда данныя точки нужно отличать отъ противоположныхъ и съ ними не смѣшивать.

[1]) Таже неопредѣленность имѣетъ мѣсто и по отношенію къ конусамъ вращенія, если ихъ задать тремя производящими лучами. Но неопредѣленность устранится, если придадимъ векторіальность этимъ лучамъ.

Принявъ эти условія, мы легко поймемъ воспроизведеніе совокупности въ этой сферической системѣ, представляющей систему самостоятельную.

Ея линейныя примы опредѣляются двумя точками, но въ составъ ея войдутъ и двѣ діаметрально-противоположныя точки. Тремя точками опредѣляются круги, но къ нимъ приходится присоединить и круги діаметрально-противоположныя, такъ что истинныя сферопримы въ этой системѣ состоятъ изъ паръ круговъ. Если данныя точки займутъ положеніе въ одной линейной примѣ (большомъ кругѣ), то полученная совокупность совпадаетъ съ совокупностью, діаметрально ей противоположною и получится обыкновенная линейная прима.

Всякая вообще совокупность круговъ не будетъ отличаться отъ совокупности круговъ предъидущей системы, но составитъ лишь половину совокупности этой системы, причемъ линейныя примы и секунды круговъ обыкновенныхъ останутся таковыми и для этой системы; но линейныя совокупности векторіальныхъ круговъ предъидущей системы уже не будутъ таковыми для этой системы, потому что касательныя линейныя примы предъидущей уже не есть линейныя примы этой системы.

Легко доказать, что въ этой системѣ совокупности векторіальныхъ круговъ и вообще отсутствуютъ; ими даже нельзя задаваться. Въ самомъ дѣлѣ, если я задамся напр. правымъ векторіальнымъ кругомъ, то діаметрально ему противоположный есть уже лѣвый векторіальный кругъ; получаются въ сущности два векторіальные круга, которыми вполнѣ и однозначно опредѣляется ихъ линейная прима на сферѣ; ясно, что въ ея присутствіи еще третьимъ произвольнымъ кругомъ задаваться нельзя; вообще, онъ бы уже не вошелъ въ составъ опредѣленной линейной примы.