7. Новая интерпретація лучей.

Е. С. Федоровъ.

(Доложено 16 Декабря).

Въ статьѣ „Системы, коихъ линейныя примы опредѣляются тремя элементами“ [1]) къ этимъ системамъ я отнесъ систему лучей на томъ основаніи, что три луча есть наименьшее ихъ число, которымъ опредѣляется совокупность лучей.

При этомъ конечно отмѣчена совершенная оригинальность такой системы, совершенно выдѣляющейся отъ всѣхъ другихъ и, что особенно важно, получается такая система, къ которой никакія теоремы вообще не переносятся изъ другихъ системъ; получается тотъ результатъ, что даже двѣ линейныя примы могутъ пересѣкаться въ двухъ элементахъ, какъ это имѣетъ мѣсто только для сфероримъ, и что поэтому находится въ противорѣчіи съ самымъ понятіемъ линейныхъ совокупностей вообще.

Тогда же было указано, что это противорѣчіе было бы устранено, если бы совокупность, опредѣляемая тремя элементами, была признана за сфероприму, результатомъ чего была бы необходимость переименовать линейныя секунды въ сферосекунды, а линейныя терціи въ сферотерціи. Основанія для того, что упомянутая совокупность не была признана за сфероприму, состояли въ томъ, что тремя лучами однозначно опредѣляется прима лучей, но не опредѣляется никакая ихъ секунда.

Но достаточно замѣтить, что линейныя совокупности системы имѣютъ свойства сферическихъ, чтобы могла прійти въ голову мысль, что эта система можетъ быть не самостоятельною и что за элементы слѣдуетъ признать не лучи, а напр. ихъ (гармоническія) пары, чтобы сдѣлать попытку привести и эту систему въ соотвѣтствіе съ извѣстными уже системами.

Эта попытка достигла цѣли при допущеніи за элементы системы тѣхъ паръ лучей, которыя являются сопряженными въ нулевой системѣ.

Какъ извѣстно, нулевая система опредѣляется нѣкоторою осью вращенія h и нѣкоторымъ угломъ ρ такимъ, что всякая точка, отстоящая отъ оси на разстояніи r, есть нулевая точка плоскости, если величина $r.\ tang\ \rho$ будетъ постоянною k для всей системы. Въ частности, если $r=0$, $\rho=\pi/_2$ то есть точки самой оси есть нулевыя для проходящихъ чрезъ нихъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ оси, и если $r=\infty$, $\rho=0$, то есть для всѣхъ плоскостей, проходящихъ чрезъ ось, нулевыми точками являются экстраточки.

Извѣстно, что два сопряженные луча нулевой системы таковы, что одинъ представляетъ совокупность нулевыхъ точекъ, въ то время какъ другой есть общее ребро коррелятивныхъ плоскостей, откуда слѣдуетъ, что всякая прямая, пересѣкающая двѣ сопряженныя прямыя, есть лучъ нулевой системы, и всякій лучъ, проходящій чрезъ какую-нибудь прямую, проходитъ и чрезъ сопряженную прямую.

Но если всѣ прямыя, пересѣкающія двѣ сопряженныя прямыя, есть лучи нулевой системы (то есть двойныя прямыя или прямыя самосопряженныя), то если будетъ дана произвольная третья прямая, то всѣ прямыя, пересѣкающія двѣ первыя и эту третью, есть также лучъ нулевой системы и онъ же долженъ пересѣкать и четвертую прямую, сопряженную третьей; въ такомъ случаѣ всѣ четыре должны принадлежать одной совокупности прямыхъ, составляющихъ производящія гиперболоида.

Отсюда видимъ, что если нулевую систему лучей примемъ за параметръ системы, а за элементъ системы — пару сопряженныхъ прямыхъ, изъ которыхъ одна задана произвольно, то дѣйствительно пара такихъ элементовъ опредѣляетъ линейную приму системы, и какъ разъ эта линейная прима совпа-

[1]) Эти Записки III, 309.

даетъ съ тою совокупностью, которая и раньше была принята за линейную приму, но съ тѣмъ ограниченіемъ, что произвольно задается всего лишь двѣ прямыя, а сопряженныя выводятся уже на основаніи параметра системы. Въ этомъ случаѣ получаемъ и такую же линейную секунду прямыхъ, какъ раньше, но съ произвольнымъ заданіемъ трехъ прямыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, линейная секунда выводится изъ линейной примы и еще одного произвольно заданнаго луча. Въ линейной секундѣ представлены всѣ лучи сопряженными парами. Мы можемъ получить полную совокупность прямыхъ секунды, выводя линейныя примы изъ всѣхъ сопряженныхъ паръ линейной примы и данной третьей прямой, и каждая, выводимая такимъ образомъ линейная прима, будетъ въ свою очередь составлять инволюцію паръ прямыхъ, въ которой двойными прямыми будутъ лучи нулевой системы; слѣдовательно, въ составѣ прямыхъ линейной секунды будетъ представлена линейная прима таковыхъ лучей.

Нетрудно видѣть, что полученная такимъ образомъ линейная терція лучей, опредѣляемая четырьмя произвольными лучами, составляетъ вторую нулевую систему, сопряженную по отношенію къ данной и составляющей параметръ разсматриваемой системы, и въ ней представлена линейная секунда лучей параметра.

Но если мы возвратимся къ разсмотрѣнію системы лучей, какъ самостоятельной, то найдемъ, что ея линейныя примы есть собственно сферопримы, какъ опредѣляемыя не двумя, а тремя элементами, также ея линейныя секунды есть сферосекунды, а совокупность лучей нулевой системы есть сферотерція.

Теперь мы видимъ, что полученная система есть лишь на одну ступень высшая система противъ той, которая была названа реципрочною системою точекъ и для которой въ качествѣ параметра былъ принятъ шаръ.

Но отъ системы паръ прямыхъ мы можемъ также перейти къ системѣ лучей собственно, какъ отъ системы гармоническихъ паръ точекъ мы можемъ перейти къ системѣ точекъ собственно. Какъ въ послѣдней всякая прима, опредѣляемая вполнѣ и однозначно тремя, есть кругъ, такъ въ системѣ лучей прима, опредѣляемая вполнѣ и однозначно тремя, есть сфероприма; какъ въ первой двѣ реципрочныя, по отношенію къ шару, точки образуютъ сопряженную пару, такъ во второй два луча, реципрочные по отношенію къ сферотерціи, сопряженны; какъ въ первой кругъ, проходящій чрезъ центръ шара, реципрично преобразуется въ прямую, такъ во второй сфероприма, проходящая чрезъ ось вращенія нулевой системы, реципрочно преобразуется въ линейную приму лучей, въ составъ которой необходимо войдетъ и экстралучъ. Такимъ образомъ мы получаемъ двѣ нетолько коррелятивныя, но и родственныя системы, потому что мы можемъ установить коррелятивность (въ предѣлахъ одной линейной терціи) между экстраточками и экстралучами, между кругами и сферопримами.

Что же представитъ изъ себя линейная прима лучей, опредѣляемая двумя произвольно данными? Отвѣтъ ясенъ. Въ составъ линейной примы необходимо войдетъ экстралучъ, сопряженный оси вращенія нулевой системы; а такъ какъ положеніе этой оси въ пространствѣ можетъ быть различно и опредѣляется линейною секундою различныхъ направленій, то и составъ линейныхъ примъ лучей не можетъ быть заданъ независимо, то есть сама система лучей не можетъ быть самостоятельною, а опредѣляется направленіемъ оси вращенія нулевой системы или, что все равно, нѣкоторымъ напередъ заданнымъ экстралучомъ, однимъ и тѣмъ же для всѣхъ линейной примы системы, имѣющей въ немъ свой ограничивающій параметръ.

Если же заданъ экстралучъ, опредѣляющій линейныя примы всей системы, то конечно всякими двумя произвольно данными лучами линейная прима опредѣляется вполнѣ и однозначно. Достаточно пересѣчь оба данные луча двумя параллельными плоскостями (то есть собственно пересѣкающимся въ экстралучѣ), чтобы получить на каждомъ двѣ гомологичныя точки; имѣя гомологичными еще экстраточки на нихъ, мы опредѣляемъ вполнѣ гомологичность точекъ на этихъ лучахъ, и каждая пара гомологичныхъ точекъ опредѣляетъ лучъ линейной примы. Ясно, что гиперболоидъ, составленный совокупностью такихъ лучей, есть гиперболическій параболоидъ: изъ двухъ его экстралучей одинъ постояненъ и составляетъ параметръ системы, а другой характеризуетъ данную линейную приму лучей.

Какъ для системы родственной съ системою точекъ мы можемъ въ предѣлахъ линейной терціи переносить изъ послѣдней всѣ теоремы и построенія.

Итакъ, мы пришли къ тому заключенію, что и система лучей можетъ быть введена въ общій рядъ геометрическихъ системъ, и ее мы можемъ привести въ общую коррелятивную связь. Но только эта система относится уже не къ числу самостоятельныхъ, а къ числу системъ, ограниченныхъ опредѣленнымъ параметромъ, за каковой мы должны признать нѣкоторый экстралучъ, постоянный для всѣхъ линейныхъ примъ, подобно тому, какъ мы имѣемъ аналогичную систему точекъ съ параметромъ точкою,

входящею въ составъ всѣхъ линейныхъ примъ этой системы.

Такъ какъ въ составъ всѣхъ линейныхъ примъ входитъ экстралучъ, то всѣ онѣ представляютъ не однополые гиперболоиды общаго характера, а спеціальные, а именно гиперболическіе параболоиды. Но если два данные луча пересѣкаются, то ясно, что ихъ линейная прима есть совокупность лучей, пересѣкающихся въ той же точкѣ, и это составитъ спеціальный случай.

Какъ изъ круга мы легко выведемъ линейную секунду точекъ, если чрезъ каждую его точку и каждую другую будемъ проводить прямыя линіи, такъ по тремъ лучамъ опредѣленной ими сфероприме лучей мы выведемъ линейную секунду лучей, проводя параболоиды чрезъ каждые два луча гиперболоида и чрезъ экстралучъ системы. Это все равно, что мы опредѣлимъ эту секунду четырьмя лучами, изъ коихъ три опредѣляющіе, а четвертый—постоянный экстралучъ. Но каждая линейная прима лучей проективно связана съ линейною примою пересѣкающихъ лучей, и всѣ эти лучи необходимо проходятъ чрезъ экстралучъ системы; и это относится нетолько къ какой-либо одной, но ко всѣмъ линейнымъ примамъ секунды.

Отсюда для характеристики линейной секунды выведемъ: линейная секунда лучей съ постояннымъ экстралучомъ характеризуется тѣмъ, что всѣ ея сѣкущіе лучи проходятъ чрезъ этотъ экстралучъ и, слѣдовательно, необходимо имѣется пара вещественныхъ лучей, въ составъ которой входитъ лучъ e, представляющая оси, чрезъ которыя проходятъ всѣ сѣкущіе лучи.

Что эта пара вещественна, слѣдуетъ изъ того, что лучь e веществень, а пара не можетъ составиться изъ веществennаго и мнимаго луча.

Существенное различіе линейной терціи лучей отъ сферотерціи (нулевой системы), видно изъ того, что въ послѣдней имѣется линейная прима экстралучей (пересѣкающихся въ нулевой точкѣ экстраплоскости), тогда какъ въ линейной терціи имѣется только одинъ экстралучъ e.

По Мебіусу мы можемъ охарактеризовать нулевую систему примою сѣкущихъ (производящихъ) лучей нѣкотораго гиперболоида, въ которомъ эти лучи составляютъ инволюцію, и эта инволюція можетъ быть вещественною или мнимою. Переходя къ линейной терціи, мы должны этотъ гиперболоидъ замѣнить гиперболическимъ параболоидомъ, а инволюцію паръ сѣкущихъ лучей непремѣнно признать гиперболическою, и притомъ одинъ изъ вещественныхъ двойныхъ лучей этой инволюціи есть непремѣнно экстралучъ e. Этимъ различіе между линейными терціями и сферотерціями и будетъ строго установлено.

По странной прихоти исторіи для этой, сравнительно сложной, системы сферическія совокупности были открыты и изслѣдованы гораздо раньше, чѣмъ совокупности линейныя, и это конечно связано съ несамостоятельностью системы.