5. Теорема, относящаяся къ системѣ круговъ.

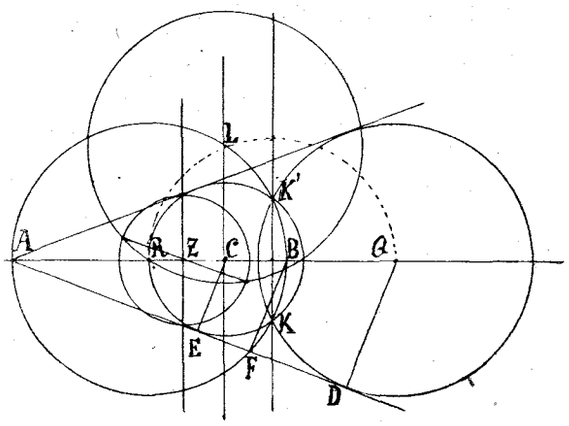
Е. С. Федорова.

(Доложено 16 сентября).

Эта теорема состоитъ въ слѣдующемъ: центру круга, принадлежащаго линейной примѣ двухъ данныхъ равныхъ круговъ и проходящаго чрезъ центръ одного изъ нихъ, реципроченъ центръ другого равнаго круга по отношенію къ первому.

Пусть даны два равные круга Q и R.

12053.



Изъ конца A діаметра второго круга проведемъ къ первому касательную AD, а чрезъ точки K и K' пересѣченія равныхъ круговъ [1]) проведемъ кругъ, также касающійся прямой AD въ точкѣ E и имѣющій центромъ точку C.

Ясно, что точка A есть центръ прямого подобія круга Q и вновь построеннаго; всякій лучъ изъ A пересѣчетъ круги въ сопряженныхъ точкахъ; точки самосопряженныя есть точки круга реципрочнаго преобразованія; онъ пройдетъ чрезъ пару KK' [1]) и будетъ имѣть центръ въ точкѣ A; оба построенные круга реципрочно преобразуются другъ въ друга; при этомъ радикальная ось KK' линейной примы преобразуется въ кругъ, имѣющій центръ R и проходящій чрезъ центръ A круга преобразованія.

Если E есть точка касанія круга C прямою AD, то въ инволюціи на этой общей касательной пара точекъ D и E составляетъ вещественныя двойныя точки, а каждый кругъ линейной примы, въ томъ числѣ и кругъ R, пересѣкаетъ эту касательную въ парѣ сопряженныхъ точекъ инволюціи A и F; отсюда слѣдуетъ, что и эти двѣ пары гармоническихъ точекъ параллельными лучами DQ, FB и EC проектируются въ парахъ гармонически-сопряженныхъ точекъ A съ B и C съ Q.

Остается доказать, что кругъ C проходитъ чрезъ центръ R.

Примемъ кругъ R за кругъ реципрочнаго преобразованія.

По отношенію къ нему радикальная ось линейной примы KK' преобразуется въ тотъ кругъ линейной примы, который проходитъ чрезъ центръ R круга преобразованія, и, слѣдовательно, согласно теоремѣ, именно и долженъ быть кругомъ C.

Чтобъ увидѣть, что это дѣйствительно тотъ самый кругъ C, воспользуемся понятіемъ о реципрочности самихъ преобразованій.

Послѣдовательно принимаемъ за центры круговъ реципрочнаго преобразованія тотъ, который 1) имѣетъ центромъ экстраточку; самъ кругъ преобразованія совпадетъ съ радикальною осью KK', которая поэтому преобразуется сама въ себя, а кругъ R—въ равный кругъ Q, 2) имѣетъ центромъ точку A; тогда кругъ Q преобразуется въ кругъ C, а ось KK' въ кругъ R. Экстраточкѣ по отношенію къ кругу R

[1]) Выражаясь общнѣе, проведемъ кругъ той же линейной примы, потому что круги Q и R могутъ и не имѣть вещественныхъ точекъ пересѣченія, но въ такомъ случаѣ они имѣютъ пары мнимыхъ точекъ пересѣченія, общихъ и проводимому кругу той же линейной примы.

[1]) Новая геометрія какъ основа черченія стр. 89.

реципроченъ его центръ, которую мы и примемъ за центръ третьяго реципрочнаго преобразованія, слагающагося изъ двухъ первыхъ. Такъ какъ при первомъ преобразованіи ось KK′ преобразовалась сама въ себя, а кругъ R въ равный кругъ Q, а при второмъ преобразованіи кругъ Q преобразовался въ кругъ C, то значитъ послѣ суммированія двухъ преобразованій ось KK′ преобразуется въ кругъ C, который, слѣдовательно, и проходитъ чрезъ центръ R третьяго преобразованія.

Значеніе этой теоремы для системы круговъ состоитъ въ томъ, что она даетъ возможность легко найти ту линейную приму круговъ, въ предѣлахъ данной линейной секунды, которая преобразуется въ сфероприму круговъ, равныхъ кругу преобразованія R. Централь этой линейной примы есть прямая CL, перпендикулярная къ централи RZ, если R кругъ реципрочнаго преобразованія, а Z центръ ортогональнаго круга линейной секунды; она преобразуется въ центральный кругъ сферопримы, проходящій чрезъ центръ R.

Въ самомъ дѣлѣ, сразу находимый кругъ C преобразуется въ Q, равный кругу R, принимаемый за кругъ реципрочнаго преобразованія. При этомъ безразлично, будетъ ли кругъ Z вещественный или мнимый ортогональный кругъ линейной секунды.

На приложенной фигурѣ взятъ именно послѣдній случай, и слѣдовательно кругъ C долженъ быть проведенъ чрезъ центръ R и чрезъ концы діаметра круга O.

Получивъ два равныхъ круга сферопримы съ центрами R и Q, мы сразу видимъ, что центральный кругъ этой сферопримы есть тотъ, коего діаметръ есть отрѣзокъ RQ. Слѣдовательно, ту же величину, что R и Q долженъ имѣть и кругъ, имѣющій центромъ точку L пересѣченія централи сферопримы и круга реципрочности R; а такъ какъ круги, имѣющіе центрами точки на кругѣ реципрочности въ системѣ обыкновенныхъ круговъ преобразуются сами въ себя, то тотъ же кругъ принадлежитъ и линейной примѣ CL и значитъ ея централь пересѣкается въ той же точкѣ L; какъ кругъ линейной примы, этотъ кругъ принадлежитъ и данной линейной секундѣ, а слѣдовательно проходитъ чрезъ концы діаметра круга *Z*.

Всякій центральный кругъ сферопримы равныхъ круговъ имѣетъ своимъ центромъ центръ сферосекунды; отсюда видимъ, что выведенная теорема даетъ возможность просто найти этотъ центръ, независимо отъ того, преобразуется ли линейная секунда съ вещественнымъ или съ мнимымъ ортогональнымъ кругомъ.

Такимъ образомъ, эта теорема даетъ общее рѣшеніе задачи нахожденія центра сферосекунды для случая мнимыхъ ортогональныхъ круговъ линейной секунды [1]).

Но конечно въ тѣхъ случаяхъ, когда прямая *cd* вещественно не пересѣкаетъ круга R, въ преобразуемой линейной примѣ нѣтъ общихъ круговъ съ кругами сферопримы, равными кругу преобразованія.

Понятно, что въ сферосекундѣ круговъ, полученной реципрочнымъ преобразованіемъ линейной секунды съ мнимымъ ортогональнымъ кругомъ (второго разряда) вовсе нѣтъ точечныхъ, а слѣдовательно и мнимыхъ круговъ, почему такая сферосекунда и относится ко второму разряду: если бы точечные круги имѣлись, то обратное преобразованіе дало бы точечные круги и въ преобразуемой линейной секундѣ, а, слѣдовательно, она не была бы секундою второго разряда.

Какъ видимъ, эта теорема весьма просто разрѣшаетъ задачу, которую можно слѣдующимъ образомъ формулировать какъ задачу элементарной геометріи; даны два круга R и Z; найти круги, равные R и имѣющіе центры на его окружности, которые пересѣкали бы кругъ Z въ концахъ его діаметра.

Несмотря на всю простоту рѣшенія ея какъ задачи въ системѣ круговъ она едва ли разрѣшима на основаніи теоремъ элементарной геометріи.

Понятно, что эту теорему можно непосредственно перенести въ систему шаровъ, замѣнивъ въ ней слова „кругъ“ словами „шаръ“. Для доказательства же достаточно принять централь Q R, за ось вращенія. Такимъ образомъ въ самомъ общемъ видѣ разрѣшается и задача нахожденія центровъ сферотерціи шаровъ, которая раньше была разрѣшена посредствомъ формулъ [2]).

---

[1]) Если ортогональный кругъ преобразуемой линейной секунды есть кругъ вещественный, то непосредственное реципрочное преобразованіе даетъ сфероприму точечныхъ круговъ, центръ которой и есть центръ сферосекунды.

[2]) Эти Записки I стр. 125 и слѣд. Въ означенной статьѣ сферопримы еще были названы циклами, а сферотерціи мегасферами.