4. Системы отрѣзковъ и паръ лучей на плоскости.

Е. С. Федорова.

(Доложено 16 сентября).

Въ прежнихъ своихъ работахъ я разсмотрѣлъ рядъ геометрическихъ системъ, элементы которыхъ состоятъ изъ паръ точекъ. Простѣйшая и важнѣйшая изъ нихъ система параллельныхъ векторовъ [1]), затѣмъ системы гармоническихъ отрѣзковъ и векторовъ [2]), наконецъ система среднихъ точекъ гармоническихъ паръ [3]).

Но во всѣхъ этихъ разсмотрѣнныхъ системахъ вводится нѣкоторое ограниченіе или въ видѣ векторіальности или въ видѣ особаго параметра системы.

Здѣсь я имѣю въ виду разсмотрѣть систему такихъ элементовъ, данныхъ безъ всякаго ограниченія, то есть представляю себѣ, что элементомъ системы на плоскости можетъ быть произвольная пара ея точекъ, которая вмѣстѣ съ тѣмъ составитъ и отрѣзокъ.

Что такая система на плоскости нетолько существуетъ, но и просто воспроизводится, вытекаетъ изъ свойства равносторонних гиперболъ какъ тетраприм, то есть кривыхъ, вполнѣ и однозначно опредѣляемыхъ произвольными четырьмя точками.

Слѣдовательно, если даны два произвольные отрѣзка, то вмѣстѣ съ тѣмъ даны и двѣ пары ихъ концовъ, то есть четыре точки, чрезъ которыя мы можемъ провести равностороннюю гиперболу, и только одну, какъ тетраприму. Съ другой стороны прямыя или лучи, на которыхъ находятся эти отрѣзки, пересѣкаются въ одной точкѣ C, и вотъ линейная прима отрѣзковъ, вполнѣ и однозначно опредѣляемая этими двумя отрѣзками, получится, если пересѣчемъ тетраприму лучами изъ C въ парахъ точекъ.

Существованіе системы доказано.

По ея опредѣленію это система четвертой ступени, то есть полная совокупность ея элементовъ есть линейная кварта. Въ числѣ ея линейныхъ совокупностей можетъ быть прима, секунда и терція.

Построеніе линейной примы уже приведено. Теперь ближе разсмотримъ ея свойства.

Если изъ C проведемъ всѣ лучи, то въ томъ случаѣ, когда C есть внѣшняя точка тетрапримы, необходимо имѣются двѣ касательныя, которыя отдѣляютъ въ линейной примѣ вещественные отрѣзки отъ мнимыхъ; отрѣзки на касательныхъ лучахъ есть отрѣзки точечные.

Итакъ въ линейной примѣ системы отрѣзковъ имѣется два точечные отрѣзка, которые раздѣляютъ вещественные отъ мнимыхъ въ случаѣ, если общій центръ C отрѣзковъ есть точка внѣшняя по отношенію къ тетрапримѣ, опредѣленной какими-нибудь двумя парами концовъ данныхъ отрѣзковъ. Если же точка C есть внутренняя точка тетрапримы, то всѣ отрѣзки линейной примы вещественны.

Послѣднее заключеніе вытекаетъ изъ свойствъ кривыхъ 2-го порядка вообще.

Отсюда заключаемъ о существованіи линейныхъ примъ двухъ разрядовъ: къ первому разряду отнесемъ примы съ парою точечныхъ отрѣзковъ, ко второму разряду тѣ, въ которыхъ всѣ отрѣзки вещественны.

На всякомъ лучѣ изъ C мы находимъ двѣ пары гармонически-сопряженныхъ точекъ, если построимъ поляру λ этой точки; одну пару составляютъ концы отрѣзковъ линейной примы, а другая пара принадлежитъ точкѣ C и ея полярѣ.

Въ примѣ перваго разряда поляра точки C вещественно пересѣкаетъ тетраприму въ парѣ точечныхъ отрѣзковъ. Слѣдовательно, точечные отрѣзки этой примы есть вещественныя двойныя точки поляры точки C.

Въ примахъ второго разряда поляра вещественно не пересѣкается тетрапримой, но послѣдняя вызы-

[1]) Это Записки I 75. [2]) Тамъ же I 147. [3]) Тамъ же I 319.

ваетъ на ней инволюцію съ двумя двойными мнимыми точками, которыя поэтому можно назвать мнимою парою точечныхъ отрѣзковъ.

Какъ въ линейныхъ примахъ перваго разряда по двумъ касательнымъ и находящимся на нихъ точечнымъ отрѣзкамъ, какъ точкамъ касанія, мы можемъ построить только одну тетраприму, которая и опредѣлитъ эту линейную приму отрѣзковъ, такъ въ линейныхъ примахъ второго разряда по двумъ мнимымъ касательнымъ и находящимся на нихъ мнимымъ точечнымъ отрѣзкамъ мы также можемъ построить одну тетраприму, которая также опредѣлитъ искомую линейную приму отрѣзковъ.

Итакъ, для этихъ построеній могутъ служить и частныя заданія въ видѣ паръ касательныхъ съ парою точечныхъ отрѣзковъ.

Если изъ точки C мы проведемъ лучи, параллельные ассимптотамъ тетрапримы, то онѣ пересѣкутъ ее въ парѣ точекъ, изъ коихъ одна есть экстраточка, а оба такихъ луча взаимноперпендикулярны.

Итакъ, въ каждой линейной примѣ отрѣзковъ имѣется два взаимно-перпендикулярные отрѣзка безконечно-большой длины. Каждый изъ нихъ проходитъ чрезъ особую точку тетрапримы.

Съ особыми точками тетрапримы въ перспективномъ положеніи находятся и особые лучи линейной примы C. На каждомъ изъ этихъ лучей отрѣзки имѣютъ безконечно-большую длину, а потому особая точка тетрапримы на такомъ лучѣ дѣлитъ пополамъ отрѣзокъ между C и ея полярою.

Если намъ дана пара особыхъ и пара экстраточекъ, то особые лучи, проходящіе чрезъ особыя точки, сами собою опредѣляютъ своимъ пересѣченіемъ центръ C лучей, а этимъ тетраприма вполнѣ опредѣлена, потому что даны нетолько двѣ пары ея точекъ (въ томъ числѣ пары экстраточекъ, соотвѣтствующихъ прямому углу, а потому напередъ опредѣляющихъ одну изъ тетраримъ), но также и центръ C съ его полярою по отношенію къ тетраримѣ.

Но если по отношенію къ какой-нибудь конопримѣ дана нѣкоторая точка и ея поляра, то первая есть центръ, а вторая ось инволюторной коллинеаціи, которыя преобразуютъ кривую самое въ себя, а прямая, параллельная оси и проходящая посединѣ между осью и центромъ коллинеаціи, есть ось инволюціи, точки которой коллинеарно преобразуются въ экстраточки.

И такъ прямоугольнымъ трехугольникомъ, гипотенуза котораго соединяетъ обѣ особыя точки тетрапримы, а вершина прямого угла C есть центръ лучей линейной примы, вполнѣ и однозначно опредѣляется сама тетраприма, а центръ C и его поляра по отношенію къ тетраримѣ есть соотвѣтственно центръ и ось коллинеаціи, преобразующей тетраприму самое въ себя; оба катета трехугольника составляютъ пару особыхъ лучей (съ безконечно большими отрѣзками).

Эта теорема одинаково приложима къ линейнымъ примамъ какъ перваго, такъ и второго разряда. Въ частности, отсюда слѣдуетъ, что прямая, параллельная гипотенузѣ и проходящая чрезъ вершину C прямого угла, пересѣкаетъ тетраприму въ отрѣзкѣ, раздѣляемомъ точкою C пополамъ.

Вопросъ о составленіи линейныхъ примъ отрѣзковъ по двумъ даннымъ вещественнымъ отрѣзкамъ исчерпанъ.

Но при рѣшеніи этой задачи мы увидѣли, что въ составъ линейныхъ примъ (перваго разряда) входятъ и мнимые отрѣзки, которыми конечно также можно задаваться, какъ и отрѣзками вещественныии.

Чтобы видѣть, что задача весьма просто разрѣшается и въ томъ случаѣ, когда одинъ или оба данные отрѣзка есть отрѣзки мнимые, обратимъ вниманіе на то, что наше заданіе оказывается тождественнымъ съ рѣшеніемъ, полученнымъ Штейнеромъ для составленія линейныхъ примъ конопримъ по двумъ даннымъ (лишь бы послѣднія были вещественныя). Результатомъ его обширнаго труда именно и было полученіе по двумъ даннымъ конопримамъ двухъ инволюцій на парѣ лучей, пересѣкающихся въ нѣкоторой точкѣ C. Имѣя ихъ, мы путемъ простыхъ операцій можемъ воспроизвести линейную приму конопримъ, въ составѣ которыхъ данная пара лучей есть лишь особая коноприма.

Въ данномъ случаѣ именно такая пара инволюцій на парѣ лучей входитъ въ составъ заданія, причемъ обѣ заданныя пары точекъ играютъ роль двойныхъ точекъ инволюціи, а точка C пересѣченія лучей и есть центръ спеціальной конопримы, представленной лучами.

Но каждая изъ инволюцій на лучахъ совершенно независима и можетъ быть какъ гиперболическою (съ вещественными двойными точками), такъ и эллиптическою (съ мнимыми двойными точками). Это какъ разъ и соотвѣтствуетъ возможнымъ заданіямъ отрѣзковъ: 1) оба отрѣзка вещественны, 2) одинъ изъ нихъ мнимый, 3) оба мнимы.

Непосредственно пользуясь результатами Штей-

нера, мы получимъ для этихъ трехъ случаевъ соотвѣтственно: 1) линейную приму конопримъ, пересѣкающихся въ обѣихъ парахъ точекъ, 2) только въ одной вещественной парѣ, и 3) вовсе не имѣющихъ общихъ вещественныхъ точекъ пересѣченія. Но такъ какъ во всѣхъ случаяхъ получается линейная прима конопримъ, то всегда на всякой прямой въ плоскости опредѣляется принадлежащая ей инволюція. Пару точекъ этой инволюціи всегда даетъ заданная пара лучей какъ спеціальная коноприма; вообще же по каждой точкѣ мы легко по Штейнеру находимъ сопряженную ей точку [1]).

Теперь мы видимъ, что совершенно независимо отъ того, будутъ ли даны вещественные или мнимые отрѣзки, мы легко воспроизведемъ ихъ линейную приму, то есть въ сущности ту тетраприму, которая ее опредѣляетъ. Въ самомъ дѣлѣ, какъ мы только что видѣли, мы во всѣхъ случаяхъ можемъ воспроизвести линейную приму конопримъ; но въ составѣ этой линейной примы тетраприма представлена единично какъ таковая [2]) и какъ экстраэлементъ линейной примы. Задача сводится къ ея выдѣленію изъ остальныхъ конопримъ. Для этого же намъ достаточно найти пару ея особыхъ точекъ.

Но, какъ доказано выше, эта пара принадлежитъ оси инволюціи системы, то есть прямой, параллельной полярѣ точки C и находящейся посрединѣ между этою точкою и ея полярою. Всѣмъ ея, какъ оси инволюціи, точкамъ гомологичны экстраточки и значитъ всѣ конопримы, проходящія чрезъ пары точекъ ея инволюціи, есть гиперболы съ различными углами между ассимптотами, и та пара точекъ, которая совмѣстно съ точкою C даетъ прямоугольный трехугольникъ съ вершиною прямого угла въ точкѣ C, принадлежитъ равносторонней гиперболѣ, то есть искомой тетраримѣ.

Если линейная прима задана двумя точечными отрѣзками, то есть двумя лучами съ точками касанія на нихъ, то, принявъ прямую, соединяющую точечные отрѣзки, за ось, а точку C пересѣченія лучей за центръ инволюторной коллинеаціи, находимъ сначала находящуюся посрединѣ ось инволюціи, а изъ ея средней точки (между точками ея пересѣченія обоими лучами), какъ изъ центра, проводимъ кругъ чрезъ точку C. Концы діаметра этого круга на оси инволюціи и есть особыя точки тетрапримы, потому что какъ точка C, такъ и центръ проведеннаго круга, находятся на діаметрѣ тетрапримы, сопряженномъ съ хордами, параллельными прямой точечныхъ отрѣзковъ.

Умѣя въ самомъ общемъ случаѣ по двумъ отрѣзкамъ построить ихъ линейную приму, мы можемъ по тремъ изъ нихъ построить линейную секунду и по четыремъ построить линейную терцію, все равно, будутъ ли всѣ отрѣзки вещественны, или нѣкоторые изъ нихъ мнимы или даже всѣ мнимы.

Но прежде, чѣмъ перейти къ выводу линейныхъ секундъ, замѣтимъ, что между точкою C и соотвѣтствующею ей тетраримою не имѣется рѣшительно никакой внутренней связи. Совершенно очевидно, что при данной тетраримѣ мы можемъ взять совершенно произвольную точку C на плоскости и провести чрезъ нея два произвольные же луча, которые пересѣкутъ тетраприму въ двухъ отрѣзкахъ, вещественныхъ или мнимыхъ; принявъ эти отрѣзки за данныя, мы получимъ эту тетраприму какъ рѣшающую задачу проведенія линейной примы по двумъ даннымъ отрѣзкамъ.

Если данъ третій отрѣзокъ, то имъ, совмѣстно съ двумя данными раньше, опредѣлится линейная секунда отрѣзковъ. Каждой линейной примѣ, входящей въ составъ этой секунды, соотвѣтствуетъ съ одной стороны нѣкоторая тетраприма, а съ другой—нѣкоторая точка на плоскости; поэтому мы получаемъ обыкновенную проективность, то есть коррелятивность между тетраримами и точками на плоскости; а такъ какъ въ линейной секундѣ заключается линейная секунда линейныхъ примъ, то мы получимъ съ одной стороны всѣ точки плоскости, а съ другой—коррелятивныя имъ тетраримы.

Эту коррелятивность мы можемъ установить слѣдующимъ образомъ. Сначала по двумъ отрѣзкамъ составляемъ тетраприму, и ей коррелятивна точка C пересѣченія обоихъ отрѣзковъ. Затѣмъ будемъ послѣдовательно брать по отрѣзку полученной линейной примы и составлять тетраприму, принимая въ расчетъ третій отрѣзокъ на лучѣ *c*, какъ постоянный; такимъ образомъ всякій разъ получимъ тетраприму и коррелятивную ей точку на лучѣ *c*, какъ точку пересѣченія съ тѣмъ лучомъ изъ C, на которомъ взяли отрѣзокъ. Въ результатѣ получаемъ нѣкоторую приму тетраримъ, непремѣнно проходящихъ чрезъ пару точекъ отрѣзка на лучѣ *c*, и каждой составной ея тетраримѣ коррелятивна точка на этомъ лучѣ, а всѣмъ тетраримамъ этой примы коррелятивны всѣ точки луча *c*.

Итакъ, въ линейной секундѣ отрѣзковъ имѣемъ коррелятивность между точками

---

[1]) Отчасти способъ Штейнера воспроизведенъ въ этихъ Запискахъ I, стр. 306.

[2]) Конечно имѣется спеціальный случай, когда всѣ конопримы линейной примы есть тетраримы; это спеціальная линейная прима экстраэлементовъ линейной секунды.

одного и того же луча и нѣкоторою примою тетраприм; каждая изъ нихъ проходитъ чрезъ отрѣзокъ на лучѣ c, а въ составѣ лучей этой тетрапримы, несущихъ отрѣзки, всегда имѣется одинъ такой, который проходитъ чрезъ нѣкоторую точку C, и тогда отрѣзокъ на немъ тождественъ съ тѣмъ, который получится и въ тетрапримѣ, коррелятивной точкѣ C.

Отсюда слѣдуетъ дальше каждому лучу плоскости коррелятивенъ находящійся на немъ отрѣзокъ, про который можно сказать, что онъ находится съ нимъ въ перспективномъ положеніи.

Съ точки зрѣнія теоріи конопримъ полученныя примы тетраприм не есть примы линейныя, потому что линейныя есть тѣ, которыя имѣютъ пару общихъ отрѣзковъ, вещественныхъ или мнимыхъ, а въ данномъ случаѣ имѣется только одна такая общая пара (на лучѣ c).

Полное число тетраприм, проходящихъ чрезъ постоянную пару точекъ, есть линейная секунда (хотя и спеціальная). Слѣдовательно, искомая прима тетраприм входитъ въ составъ такой линейной секунды.

Если мы зададимся вопросомъ, сколько тетраприм нужно для опредѣленія полученной примы то получимъ ясный отвѣтъ: три.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣя три, мы по двумъ изъ нихъ можемъ составить линейную приму, то есть получить пару лучей съ инволюціями на нихъ; такъ какъ одинъ изъ этихъ лучей пары есть постоянный лучъ c, то получаемъ одинъ новый, положимъ a; по второй парѣ составимъ другую линейную приму съ постояннымъ лучомъ c и вторымъ лучомъ b; на каждомъ изъ лучей a и b также опредѣлится инволюція, то есть пара двойныхъ точекъ. Лучи a и b пересѣкаются въ нѣкоторой точкѣ C, и слѣдовательно, мы опредѣлили два луча изъ C и на каждомъ коррелятивную пару точекъ, а значитъ можемъ построить тетраприму, коррелятивную точкѣ C.

Слѣдовательно, найденная прима тетраприм есть сфероприма.

Замѣтимъ, что приведенное построеніе даетъ однозначные результаты, и, слѣдовательно, полученная такимъ образомъ точка C есть та самая исходная точка и полученная коррелятивная тетраприма есть та самая исходная тетраприма, изъ которой мы выходили при построеніи сферопримы.

Но при заданіи мы не вводили никакихъ ограничивающихъ частныхъ условій и значитъ выводы имѣютъ совершенно общее значеніе, то есть:

Каждой точкѣ на плоскости коррелятивна нѣкоторая тетраприма, а совокупности точекъ на прямой коррелятивна спеціальная сфероприма тетраприм; эта сфероприма однозначно связана съ нѣкоторой тетраримой, не входящей въ составъ этой совокупности, а слѣдовательно и съ коррелятивной ей точкою C; отсюда устанавливается однозначная то есть коррелятивная связь луча c съ точкою C для всѣхъ точекъ и для всѣхъ лучей плоскости.

Установивъ, по общимъ правиламъ новой геометріи эту связь (по четыремъ коррелятивнымъ парамъ элементовъ), напр. найдя коноприму, выражающую полярность между этими элементами, мы найдемъ съ одной стороны ту тетраприму, а съ другой ту пару точекъ, которыя соотвѣтственно коррелятивны полюсу и полярѣ, а по нимъ легко построимъ сфероприму тетраприм коррелятивную совокупности точекъ на полярѣ.

Что полученная сфероприма есть спеціальная (а не общаго характера) видно изъ того, что ея тетраримамъ коррелятивны точки на прямой, а таковыхъ лишь линейная секунда, тогда какъ полная совокупность сфероприм въ линейной секундѣ есть линейная терція.

Построеніе сферопримы тетраприм съ установленіемъ коррелятивности этихъ тетраприм съ точками одной прямой напр. луча c вполнѣ достаточно для полнаго вывода всѣхъ отрѣзковъ линейной секунды.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ про извольную точку A, и найдемъ коррелятивную ей тетраприму, то есть опредѣлимъ линейную приму отрѣзковъ этой линейной секунды, лучи которыхъ исходятъ изъ этой точки.

Для этого проведемъ чрезъ A два луча и опредѣлимъ точки ихъ пересѣченія съ лучомъ c; каждой изъ этихъ точекъ коррелятивна одна изъ тетраприм сферопримы, а на обоихъ данныхъ лучахъ такимъ образомъ опредѣляются коррелятивныя имъ пары точекъ. По двумъ же парамъ точекъ строимъ тетраприму, которая и есть искомая, коррелятивная точкѣ A.

Такъ какъ полная совокупность точекъ на плоскости есть линейная секунда, то такимъ образомъ мы можемъ воспроизвести секунду тетраприм, которая и будетъ полною совокупностью.

Но эта совокупность тетраприм, коррелятивная полной совокупности точекъ на плоскости, не есть ихъ линейная секунда.

Это мы можемъ доказать слѣдующимъ образомъ.

Въ числѣ отрѣзковъ имѣются и точечные; какъ мы видѣли, таковыхъ по два въ каждой линейной примѣ перваго разряда.

Если бы таковой точечный отрѣзокъ мы приняли за данный третій отрѣзокъ на лучѣ c, то всѣ тетрапримы построенной сферопримы оказались бы касательными къ этому лучу. На немъ же была бы одна точка общаго касанія.

Въ линейной же примѣ конопримъ вообще совокупность точекъ, представляющихъ общія точки касанія есть точки кривой Якоби и нѣтъ другихъ точекъ, въ коихъ касались хотя бы двѣ конопримы линейной секунды; общія касательныя есть спеціальныя конопримы секунды (одинъ парный лучъ) и на нихъ имѣемъ двѣ точки общаго касанія конопримъ и вовсе нѣтъ касательныхъ съ одною общею точкою касанія; таковыя же необходимо имѣются въ линейной секундѣ отрѣзковъ.

Но если секунда тетрапримъ не есть линейная, то такъ какъ, согласно вышеприведенному, каждая линейная секунда пересѣкаетъ ее въ сферопримахъ (такъ какъ сфероприма именно находится въ линейной секундѣ), то значитъ секунда тетрапримъ, коррелятивныхъ полной совокупности точекъ плоскости, есть сферосекунда.

Теперь зададимся совокупностью точечныхъ отрѣзковъ.

Для этой цѣли мы по имѣющимся даннымъ выведемъ хоть одинъ такой отрѣзокъ и примемъ его лучъ за постоянный лучъ c.

Легко видѣть, что искомая совокупность должна быть кривая 3-го порядка и во всякомъ случаѣ не ниже, такъ какъ мы можемъ задаться такими тремя точечными отрѣзками на одной прямой, лишь бы эта прямая не была ихъ лучомъ и во всякомъ случаѣ лучомъ не больше чѣмъ одного изъ нихъ и лишь бы лучи этихъ отрѣзковъ не пересѣкались въ одномъ центрѣ. Въ послѣднемъ случаѣ этотъ центръ былъ бы общимъ полюсомъ прямой, и мы получили бы линейную приму касательныхъ въ точкахъ одной сѣкущей тетрапримъ, а точечными отрѣзками стали бы всѣ точки прямой, то есть кривая 3-го порядка выродилась бы въ прямую. Въ общемъ же случаѣ прямая пересѣкаетъ кривую въ трехъ точкахъ (не меньше, хотя пары точекъ могутъ быть и мнимыми).

Проведемъ три тетрапримы сферопримы, касательныя къ лучу c въ точечномъ отрѣзкѣ; эти тетрапримы построены по тремъ отрѣзкамъ на лучахъ изъ С; эти три луча пересѣкаютъ лучъ c въ трехъ точкахъ, представляющихъ собою полюсы тѣхъ сѣкущихъ тетрапримы, которыя соединяютъ общій точечный отрѣзокъ на c со вторымъ точечнымъ отрѣзкомъ на каждой изъ тетрапримъ. Такимъ образомъ кривая точечныхъ отрѣзковъ получается пересѣченіемъ двухъ проективныхъ примъ лучей — одной линейной, имѣющей центръ въ точечномъ отрѣзкѣ на c, другой, проходящей чрезъ упомянутые полюсы на лучѣ c и огибающей нѣкоторую кривую. Эти огибающіе перспективно связаны въ полюсахъ съ лучами изъ С, а слѣдовательно лучи упомянутой линейной примы (съ точечнымъ отрѣзкомъ въ качествѣ центра) проективно связаны нетолько съ огибающими лучами, но и съ тѣми другими лучами паръ, которые съ послѣдними связаны перспективностью.

Для установленія гомологичности между лучами линейной примы и огибающими, мы имѣемъ три данныя соотвѣтствія. Полная совокупность огибающихъ лучей есть совокупность лучей съ точечными отрѣзками. Къ нимъ относятся, слѣдовательно, и лучъ c, а также лучъ, соединяющій точечный отрѣзокъ на c съ точкою С; этими пятью огибающими вполнѣ опредѣлена коноприма лучей и вмѣстѣ съ тѣмъ установлена коррелятивность между ними и лучами линейной примы, а, слѣдовательно и точечными отрѣзками на этихъ лучахъ.

Совокупность точекъ пересѣченія двухъ гомологичныхъ примъ лучей, одной линейной, а другой квадратичной, есть кривая 3-го порядка. Изъ тѣхъ конопримъ сферопримы, которыя мы получаемъ по одному отрѣзку на лучѣ изъ С и по точечному отрѣзку на лучѣ c, коноприма, получаемая по отрѣзку на лучѣ изъ С, проходящемъ чрезъ точечный отрѣзокъ, вырождается въ прямую. Точкою, коррелятивною этой спеціальной конопримѣ, будетъ точечный отрѣзокъ. Тѣ отрѣзки линейной примы, которые мы получимъ изъ точки на лучѣ c, въ данномъ случаѣ вырождаются въ пары точекъ инволюціи, причемъ для ея опредѣленія имѣемъ одинъ обыкновенный отрѣзокъ, вещественный или мнимый, и двойную точку въ видѣ точечнаго отрѣзка; по этимъ двумъ даннымъ легко получаемъ другую двойную точку, которая и будетъ точечнымъ отрѣзкомъ на этомъ лучѣ то есть на выродившейся конопримѣ. Слѣдовательно, и эта точка также принадлежитъ кривой 3-го порядка.

Эти кривую 3-го порядка мы можемъ получить, имѣя коноприму лучей съ точечными отрѣзками непосредственно, такъ какъ, зная принадлежность отрѣзковъ на лучахъ данной линейной секундѣ, мы на каждомъ изъ нихъ можемъ найти коррелятивный отрѣзокъ, въ данномъ случаѣ точечный.

Итакъ, полная совокупность точечныхъ

отрѣзковъ линейной секунды есть кривая 3-го порядка. Ее сопровождаетъ коноприма, касательныя къ которой и есть лучи точечныхъ отрѣзковъ.

Если принять во вниманіе, что вся эта совокупность отрѣзковъ линейной секунды получается по тремъ изъ нихъ, заданнымъ произвольно, то значитъ совокупность точечныхъ отрѣзковъ линейной секунды есть ихъ сфероприма.

Если основа для опредѣленія сферопримы точечныхъ отрѣзковъ есть собственно нѣкоторая коноприма, касательныя которой и составляютъ лучи съ отрѣзками сферопримы, то это имѣетъ мѣсто и для сферопримъ вообще: для каждой изъ нихъ необходимо и достаточно знать соотвѣтствующую коноприму, потому что отрѣзки опредѣляются сами собою на каждомъ лучѣ.

Въ случаѣ точечныхъ отрѣзковъ для этого опредѣленія намъ были нужны три луча съ точками на нихъ. Это означаетъ, что такія данныя необходимы и достаточны для вывода всей совокупности лучей, собственно опредѣляемой пятью изъ нихъ; слѣдовательно положеніе точекъ на лучахъ вполнѣ замѣщаетъ недостатокъ еще двухъ лучей.

Въ общемъ случаѣ для опредѣленія сферопримъ отрѣзковъ намъ также дается три луча, но не съ точками, а съ нѣкоторыми опредѣленными отрѣзками, которые въ частномъ случаѣ могутъ быть и точечными.

Если даны три отрѣзка, лучи которыхъ пересѣкаются въ одномъ центрѣ C, то, составляя по нимъ линейныя примы, мы найдемъ, что во всѣхъ эта точка будетъ общимъ центромъ лучей, то есть что получается спеціальная линейная секунда съ однимъ общимъ центромъ C для лучей всѣхъ отрѣзковъ и здѣсь конечно коррелятивности между точками плоскости и тетрапримами не имѣется. Въ частности, и всѣ лучи съ точечными отрѣзками пересѣкаются въ томъ же центрѣ, и значитъ всѣ конопримы, коррелятивно связанныя со сферопримами отрѣзковъ, вырождаются въ одну единственную точку C.

Но въ этомъ случаѣ и другіе выведенные образы вырождаются въ болѣе простые.

Если даны три точечные отрѣзка, лучи которыхъ пересѣкаются въ одномъ центрѣ, а точки находятся на одной прямой, то общій центръ есть полюсъ этой прямой по отношенію ко всей линейной секундѣ тетрапримъ, касательныхъ къ лучамъ въ точкахъ этой прямой и значитъ получаемъ линейную приму точечныхъ отрѣзковъ на прямой, то есть тогда и всѣ точечные отрѣзки составляютъ прямую. Но такъ какъ это составляетъ спеціальный случай, то въ общемъ на одной прямой можетъ находиться не болѣе двухъ точечныхъ отрѣзковъ; это означаетъ, что кривая 3-го порядка вырождается въ коноприму, а потому въ линейной секундѣ отрѣзковъ съ общимъ центромъ лучей точечные отрѣзки составляютъ коноприму, а сопровождающая коноприма лучей есть центръ лучей.

Въ этой спеціальной линейной секундѣ на каждомъ лучѣ находится не одинъ отрѣзокъ, а цѣлая прима ихъ, такъ какъ та тетраприма, которая вообще изъ коррелятивной точки опредѣляетъ линейную приму отрѣзковъ на лучахъ, составляющихъ на ней инволюцію, здѣсь вырождается въ прямую, несущую инволюцію отрѣзковъ съ двумя вещественными или мнимыми точечными отрѣзками какъ двойными точками инволюціи.

Наконецъ мыслимъ еще спеціальный случай заданія такой пары отрѣзковъ, которые составляютъ въ своей совокупности трехугольникъ съ точкою его высотъ.

Въ этомъ случаѣ черезъ четыре такія точки проходитъ цѣлая линейная прима тетрапримъ, и мы по двумъ такимъ отрѣзкамъ сразу получаемъ линейную секунду отрѣзковъ съ общимъ центромъ лучей.

Если принять во вниманіе, что въ общемъ случаѣ по тремъ произвольнымъ отрѣзкамъ мы получаемъ сфероприму тетрапримъ, то станетъ понятнымъ, что въ томъ спеціальномъ случаѣ, когда всѣ три данные отрѣзка принадлежатъ одной линейной примѣ тетрапримъ, эта сфероприма вырождается въ спеціальный видъ линейной примы, и тогда дѣйствительно всѣ ея тетрапримы пересѣкаются въ двухъ парахъ точекъ, вещественныхъ или мнимыхъ, которыя и составляютъ заданные два отрѣзка.

Этотъ случай является спеціальнымъ и по отношенію къ предъидущему, такъ какъ теперь коноприма точечныхъ отрѣзковъ вырождается въ прямую.

Высшая линейная совокупность, кромѣ полной, то есть кварты, есть линейная терція отрѣзковъ. Для нея одной точкѣ плоскости коррелятивна не одна, а цѣлая совокупность тетрапримъ, а именно та спеціальная ихъ совокупность, для которой всѣ лучи отрѣзковъ имѣютъ одинъ общій центръ.

Но мы только-что видѣли, что такая совокупность есть линейная секунда отрѣзковъ, и всѣ точечные отрѣзки этой секунды составляютъ нѣкоторую коноприму, которая въ совокупности съ коррелятивною точкою, характеризуетъ данную линейную секунду.

Поэтому линейную терцію отрѣзковъ характеризуетъ корреляти́вное отношеніе нѣкоторой линейной секунды конопримъ и точекъ на плоскости. Имѣя эту коррелятивность, мы по отношенію къ каждой точкѣ находимъ коррелятивную коноприму какъ совокупность точечныхъ отрѣзковъ линейной секунды на лучахъ изъ этой точки.

Такъ какъ здѣсь мы имѣемъ секунду конопримъ общаго характера, то мы можемъ ее охарактеризовать кривою 3-го порядка Якоби и сопровождающею ее кривою лучей 3-го порядка Кэле, то есть такою, что въ каждой точкѣ прямой пересѣкаются три ея луча (касательныя или огибающія).

Въ особомъ спеціальномъ случаѣ коноприма точечныхъ отрѣзковъ вырождается въ прямую, и тогда характеристика линейной терціи отрѣзковъ сводится къ установленію коррелятивности между точками и прямыми плоскости, то есть къ такъ называемой полярной системѣ; кривая, выражающая эту полярность, есть вещественная или мнимая коноприма. Имѣя ее, мы по каждой точкѣ, какъ полюсу, получимъ ея поляру, и тогда получимъ прямую точечныхъ отрѣзковъ и вмѣстѣ съ тѣмъ линейную секунду отрѣзковъ на лучахъ, исходящихъ изъ одной точки.

Отъ системы отрѣзковъ или паръ точекъ нетрудно перейти къ коррелятивной системѣ паръ лучей.

Но такъ какъ система точекъ и система лучей не родственны, то аналогичныя, но не позиціонныя, построенія уже не есть построенія коррелятивныя.

И въ самомъ дѣлѣ, въ системѣ отрѣзковъ по двумъ парамъ точекъ мы строимъ нѣкоторую тетраприму, которая и опредѣляетъ линейную приму отрѣзковъ. Но построеніе тетрапримы не есть построеніе позиціонное (такъ какъ оно связано съ нахожденіемъ точекъ высотъ въ трехугольникѣ, а слѣдовательно съ проведеніемъ перпендикуляровъ), то линейную приму паръ лучей по двумъ даннымъ нельзя вывести коррелятивнымъ путемъ изъ предъидущей системы. Но все-таки оно аналогично, потому что и по двумъ парамъ лучей можно построить лишь одну тетраприму, а именно параболу, какъ огибаемую лучами линейной примы.

Если эта тетраприма-парабола построена, то линейная прима состоитъ изъ той совокупности паръ лучей, коихъ центры находятся на прямой, соединяющей центры двухъ данныхъ паръ, а оба луча есть касательныя къ параболѣ.

Отсюда мы заключаемъ, что и въ этой системѣ имѣется два разряда линейныхъ примъ: въ примахъ перваго разряда линія центровъ вещественно пересѣкаетъ параболу въ двухъ точкахъ, и эти точки являются центрами двойныхъ лучей, а эти двойные лучи раздѣляютъ въ линейной примѣ вещественныя пары отъ мнимыхъ; въ примахъ второго разряда линія центровъ находится внѣ параболы, и всѣ вообще пары лучей вещественны, хотя все-таки можемъ выдѣлить два мнимыхъ двойныхъ луча, соединяя полюсъ линіи центровъ съ мнимыми двойными точками инволюціи на линіи центровъ.

Вообще полюсъ и полярная ему линія центровъ представляютъ инволюторную коллинеацію, по отношенію къ которой сама парабола, а вмѣстѣ съ тѣмъ и всѣ пары лучей самоколлинеарны, то есть лучи пары гомологичны другъ другу въ этой коллинеаціи.

Рѣшеніе вопроса о томъ, какъ понимать коллинеарное преобразованіе мнимыхъ паръ лучей и какъ по двумъ мнимымъ парамъ построить линейную приму паръ лучей, я выдѣлилъ въ спеціальной замѣткѣ, какъ вопросъ гораздо болѣе общаго характера (ср. на стр. 1).

Такимъ образомъ является возможность построить линейную приму паръ лучей во всѣхъ случаяхъ, хотя бы одна или обѣ пары были мнимыя. Можно сказать, что система установлена.

Въ линейной примѣ этой системы имѣется одинъ, и только одинъ, безконечно-удаленный центръ пары лучей, то есть экстраэлементъ, и это обстоятельство сближаетъ эту систему съ системою точекъ.

Отсюда видимъ, что въ аналогичныхъ выраженіяхъ мы можемъ перенести всѣ выводы, относящіеся къ предъидущей системѣ, и къ этой.

Если дана третья пара лучей, то по каждой парѣ линейной примы, имѣющей центромъ точку на прямой c и по третьей парѣ, имѣющей центръ въ точкѣ C мы можемъ составить тетраприму, а совокупность ихъ составитъ сфероприму тетраприм, каждая изъ которыхъ коррелятивна нѣкоторой прямой, проходящей чрезъ точку C, а именно той, которая проходитъ чрезъ центръ той пары лучей, находящейся на прямой C, изъ которой совмѣстно съ третьей парою мы составляемъ тетраприму. Съ одной стороны имѣемъ коррелятивность между точками и парами лучей, а съ другой между прямыми и тетрапримами лучей, откуда слѣдуетъ, что полная совокупность такихъ тетраприм есть секунда, а именно сферосекунда.

Полная совокупность двойныхъ лучей есть прима лучей 3-го порядка, а центры этихъ лучей находятся на нѣкоторой конопримѣ точекъ; изъ каждой точки ея можно провести три луча первой кривой,

изъ коихъ пара (касательныхъ къ огибающей) можетъ быть мнимая, а третій, непремѣнно вещественный и есть двойной лучъ, имѣющій точку своимъ центромъ. По парѣ такихъ лучей съ соотвѣтственными центрами можемъ составить тетраприму съ прямою центровъ, проходящею чрезъ центры обоихъ лучей. Эта кривая 3-го порядка есть сфероприма двойныхъ лучей.

Если три, опредѣляющія линейную секунду, пары лучей имѣютъ центры на прямой, то кривая лучей 3-го порядка вырождается въ коноприму лучей, а коноприма точекъ въ прямую, и тогда пара лучей первой конопримы, имѣющая центромъ точку на второй прямой, есть пара двойныхъ лучей, опредѣляющая инволюцію паръ лучей въ этой точкѣ.

Въ еще болѣе частномъ случаѣ, когда изъ двухъ паръ данныхъ лучей въ одной имѣется экстралучъ, ими опредѣляется линейная прима тетраприм (параболъ, какъ огибаемыхъ лучами), и вмѣстѣ съ тѣмъ спеціальная линейная секунда паръ лучей. Это соотвѣтствуетъ тому частному случаю, когда сфероприма тетраприм становится линейною примою. Въ этомъ спеціальномъ случаѣ коноприма двойныхъ лучей вырождается въ ихъ линейную приму (огибаемая кривая становится точкою).

Линейную терцію въ общемъ случаѣ можемъ составить изъ спеціальныхъ линейныхъ секундъ съ центрами паръ лучей на одной прямой, и построеніе линейной терціи сводится къ установленію коррелятивности между прямыми и конопримами лучей на плоскости.

Въ особомъ спеціальномъ случаѣ, когда конопримы вырождаются въ линейныя примы мы имѣемъ на плоскости коррелятивность между прямыми и точками, то есть обыкновенную полярную систему.

Примѣромъ родственности системъ, какъ извѣстно, могутъ служить система точекъ съ системою параллельныхъ векторовъ, системою круговъ и системою конопримъ. Отсюда заключаемъ, что родственными будутъ также (въ предѣлахъ ихъ линейныхъ секундъ) и система паръ точекъ, система паръ параллельныхъ векторовъ, система паръ круговъ, и система паръ конопримъ. Но отсюда можемъ дѣлать и безграничный рядъ другихъ заключеній о родственности системъ, напр. родственными будутъ также система паръ конопримъ или система пара конопримъ параллельныхъ векторовъ и т. д. и т. д.

Но система паръ точекъ не родственна системѣ точекъ (въ предѣлахъ одинаковыхъ ступеней совокупностей), а потому напр. и система сферопримъ паръ точекъ не родственна системѣ паръ сферопримъ точекъ.

Двѣ системы, составленныя изъ однихъ и тѣхъ же элементовъ (и потому представляющихъ системы одинаковой ступени) мы назовемъ конгруентными. Таковыми будутъ напр. съ одной стороны система отрѣзковъ (или паръ точекъ), а съ другой система, коррелятивная системѣ паръ лучей, если установимъ коррелятивность между лучами и точками. На эти двѣ системы мы можемъ смотрѣть какъ на коллинеарно-преобразуемыя другъ въ друга, и значитъ линейнымъ совокупностямъ одной изъ нихъ гомологичны линейныя совокупности другой. И тѣмъ не менѣе въ преобразованной системѣ мы не можемъ составить линейной примы непосредственно по двумъ ея элементамъ; чтобы это сдѣлать, нужно, чтобы была дана коррелятивность (изъ системы лучей) напр. въ видѣ нѣкоторой конопримы или были данныя опредѣляющія коллинеарное преобразованіе,

Въ первоначальной же системѣ отрѣзковъ мы можемъ опредѣлить по двумъ совершенно независимо отъ какихъ-либо другихъ данныхъ.

Мы можемъ назвать такія системы съ независимымъ построеніемъ всѣхъ ея совокупностей системами самостоятельными. Отъ нихъ, слѣдовательно, существенно отличаются системы, связанныя и обусловленныя извѣстными параметрами, какъ это имѣетъ мѣсто для разсматриваемыхъ здѣсь коррелятивныхъ или коллинеарно-преобразованныхъ системъ.

Какъ видимъ, изъ двухъ конгруентныхъ системъ только одна самостоятельна, а другая связана опредѣленнымъ параметромъ [1]).

[1]) Объ раньше трактовалось въ статьѣ „Возможность разныхъ геометрическихъ системъ при одной и той же полной совокупности элементовъ“ въ этихъ Запискахъ I, 319.