3. Симметрическія гексапримы.

Е. С. Федорова.

(Доложено 16 сентября).

Главнѣйшія разряды гексапримъ, или того, что принято называть пространственными кривыми 3-го порядка, были выведены Зейдевицемъ и приводятся въ извѣстномъ руководствѣ Рейе подъ названіями 1) пространственная гипербола, 2) пространственный эллипсъ, 3) параболическая гипербола и 4) пространственная парабола [1]).

Эта замѣтка явилась результатомъ заданія: можно ли построить гексаприму, обладающую симметріей? Терминъ гексаприма означаетъ такую приму точекъ, которая вполнѣ и однозначно опредѣляется шестью точками, а пространственная кривая 3-го порядка и есть именно такая кривая.

Мы знаемъ, что ее можно опредѣлить двумя конусами, имѣющими общій лучъ. Въ самомъ дѣлѣ, если изъ одной A, а затѣмъ изъ другой данной точки B мы проведемъ по пяти лучей чрезъ всѣ остальныя данныя точки, то каждыми такими пятью лучами вполнѣ и однозначно опредѣляется по конусу, а оба конуса будутъ имѣть общій лучъ AB.

Чрезъ этотъ лучъ мы можемъ провести приму плоскостей, и каждая изъ нихъ пересѣчетъ каждый конусъ еще въ одномъ лучѣ, а оба луча пересѣкутся въ точкѣ гексапримы.

Изъ этого построенія вытекаетъ, что можно получить и гексапримы, обладающія симметріей, а именно: 1) центромъ обратнаго равенства, 2) плоскостью симметріи и 3) двойною осью симметріи. Для этого достаточно взять произвольный конусъ и 1) принять одну изъ его точекъ за центръ обратнаго равенства, 2) провести чрезъ нее перпендикулярно къ лучу плоскость симметріи и 3) провести чрезъ нее перпендикулярно къ лучу двойную ось симметріи. По элементу симметріи строимъ симметричный конусъ, и получаемъ таковыхъ два съ однимъ общимъ лучомъ.

Получаемъ три построенія, приводящія къ гексапримамъ трехъ видовъ симметріи.

Однако ближайшее разсмотрѣніе результатовъ приводитъ къ заключенію, что получаемыя такимъ образомъ гексапримы уже не представляютъ таковыхъ въ буквальномъ смыслѣ слова, а лишь спеціальныя разности. Именно, благодаря присутствію элемента симметріи, пары лучей двухъ конусовъ пересѣкаются въ точкахъ одной плоскости и въ результатѣ кромѣ общаго луча получается коноприма, пересѣкающая этотъ лучъ—совокупность, представляющая спеціальную пространственную кривую 3-го порядка.

Въ случаѣ обратнаго равенства лучи, опредѣляющіе точки кривой параллельны и слѣдовательно сама коноприма находится на экстраплоскости, и центръ обратнаго равенства становится неопредѣленнымъ: имъ можетъ быть любая точка общаго луча. Въ случаѣ плоскости симметріи именно въ ней находится коноприма, а общій лучъ перпендикуляренъ къ этой плоскости и проходитъ черезъ одну изъ точекъ конопримы. Въ случаѣ двойной оси симметріи, эта ось есть одна изъ осей конопримы, а общій лучъ проходитъ чрезъ одну вершину такой оси перпендикулярно къ этой оси.

Такимъ образомъ дѣйствительно удалось получить три симметрическія разности гексапримъ, которыя поэтому можно назвать соотвѣтственно: 1) симметрически-центральная, 2) симметрически-плоскостная и 3) симметрически-осевая гексапримы.

Эти три симметрическія гексапримы относятся къ извѣстному уже спеціальному разряду гексапримъ, характеризующихся распадомъ на коноприму и лучъ, проходящій чрезъ одну изъ ея точекъ.

---

[1]) Reye. Geometrie der Lage II 203. Въ первомъ случаѣ экстраплоскость пересѣкаетъ кривую въ трехъ точкахъ, во второмъ—въ одной вещественной точкѣ, въ третьемъ то же, что въ первомъ, но двѣ экстраточки сливаются въ одну двойную, въ четвертомъ экстраплоскость есть плоскость кривизны.

Онѣ составляютъ тотъ спеціальный разрядъ, который можетъ быть опредѣленъ шестью точками, изъ коихъ четыре находятся въ одной плоскости.

Въ самомъ дѣлѣ, проведя при такомъ заданіи прямую чрезъ остальныя двѣ точки, мы опредѣлимъ въ пересѣченіи съ особою плоскостью пятую точку въ ней, а по пяти точкамъ составимъ въ этой плоскости коноприму, чрезъ одну изъ точекъ которой пройдетъ упомянутый лучъ.

Какъ извѣстно, каждыя двѣ точки гексапримы могутъ быть приняты за центры двухъ коллинеарныхъ линейныхъ секундъ лучей (и плоскостей); въ частномъ случаѣ, когда лучамъ нѣкоторой плоскости гомологичны лучи другой секунды, находящейся въ той же плоскости, мы именно и получаемъ такую спеціальную гексаприму, и тогда конечно эта плоскость въ системѣ будетъ особою.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ особой плоскости спеціальной гексапримы мы возьмемъ на конопримѣ двѣ точки, которыя мы примемъ за центры гомологичныхъ линейныхъ секундъ лучей, то каждому лучу въ этой особой плоскости гомологиченъ лучъ находящійся въ этой же плоскости; эта гомологичность опредѣляется конопримою, въ точкахъ которой пересѣкаются оба гомологичные луча. Всѣ же остальные гомологичные лучи пересѣкаются въ прямой, проходящей чрезъ коноприму и вмѣстѣ съ нею составляющей гексаприму или уже не пересѣкаются.

Если изъ какой-нибудь точки гексапримы проведемъ лучи чрезъ всѣ остальныя, то получимъ квадратичный конусъ; и такъ какъ каждой точкѣ гексапримы соотвѣтствуетъ такой конусъ, то всею гексапримою опредѣляется прима конусовъ, изъ коихъ каждые два имѣютъ общій лучъ. Вся эта прима можетъ быть опредѣлена двумя такими конусами, потому что ими опредѣляется сама гексаприма [1]).

Въ самомъ дѣлѣ, если чрезъ общій лучъ двухъ такихъ конусовъ проведемъ линейную приму плоскостей, то въ каждой изъ нихъ конусы, кромѣ общаго луча, пересѣкутся еще въ одномъ лучѣ, а два такіе луча пересѣкутся въ точкѣ гексапримы.

Хотя эта прима вполнѣ и однозначно опредѣляется двумя такими конусами, но все таки она не есть ихъ линейная прима, такъ какъ построеніе ея связано съ ограниченіемъ: каждые два конуса примы имѣютъ общій лучъ (при этомъ условіи линейныя секунды уже не воспроизводятся).

[1]) Если даны шесть точекъ, изъ коихъ никакія четыре не находятся въ одной плоскости, то можемъ любыя двѣ изъ нихъ принять за центры конусовъ и для каждаго, проводя лучи чрезъ остальныя точки, получимъ 5 лучей, чего вполнѣ достаточно для опредѣленія конусовъ.

Совокупность лучей всѣхъ конусовъ примы то есть всѣхъ хордъ гексапримы есть секунда, но не линейная; нѣмецкіе геометры называютъ Strahlen-Congruenz erster Ordnung und dritter Klasse то есть секунда перваго порядка (потому что чрезъ любую точку проходитъ только одинъ ея лучъ) и третьяго класса (потому что въ любой плоскости находятся три ея луча, хотя пара изъ нихъ можетъ быть мнимою).

Совокупность лучей тѣхъ спеціальныхъ гексапримъ, о которыхъ была рѣчь въ этой замѣткѣ, называется соотвѣтственно Strahlencongruenz erster Ordnung und zweiter Classe то есть секундою лучей перваго порядка (по той же причинѣ) и второго класса (потому что произвольная плоскость содержитъ два луча, соединяющіе точки конопримы и особой прямой).

Обращу вниманіе на ту особенность спеціальныхъ гексапримъ, въ отличіе отъ гексапримъ общаго характера, что въ послѣднихъ хорды (то есть лучи примы конусовъ) можно вещественно провести не чрезъ всѣ точки пространства: касательныя въ непрерывныхъ рядахъ хордъ отдѣляютъ тѣ, которыя проходятъ чрезъ точки пространства вещественно, отъ тѣхъ, которыя пересѣкаются съ гексапримою въ парѣ мнимыхъ точекъ, или иначе хорды раздѣляются на гиперболическія и эллиптическія (по инволюціи паръ точекъ въ нихъ).

Въ спеціальныхъ гексапримахъ всѣ хорды есть хорды гиперболическія, то есть чрезъ каждую точку пространства проходитъ одинъ изъ лучей секунды, или иначе одинъ изъ лучей конусовъ примы, опредѣляемыхъ спеціальною гексапримою.

Если принять во вниманіе, что коноприма, пересѣкаемая лучомъ, можетъ быть гиперболою, эллипсомъ или параболою, то, сопоставляя съ главными разрядами гексапримъ, установленными Зейдевицемъ, найдемъ, что для двухъ послѣднихъ видовъ симметріи, когда коноприма есть гипербола, симметричная гексаприма составляетъ спеціальный видъ пространственной гиперболы, а когда первая есть эллипсъ,—спеціальный видъ пространственнаго эллипса Зейдевица. Гексаприма же съ центромъ обратнаго равенства соединяетъ въ себѣ свойства параболической гиперболы и пространственной параболы; плоскость кривизны есть экстраплоскость, ассимптоты безконечно-удалены (экстрапрямыя), но ассимптотныя плоскости дѣлаются неопредѣленными.

Въ виду того, что гексапримы опредѣляются какими-угодно шестью данными точками, можетъ казаться, что, подобравъ соотвѣтственнымъ образомъ расположеніе этихъ точекъ, можно получить и дру-

гіе, болѣе высокіе виды симметріи, но понятно, что гексапримы получатся еще болѣе спеціальныя.

Нельзя въ гексапримахъ не усмотрѣть аналогіи съ конопримами на плоскости, опредѣляемыми пятью точками. Въ частности, если три изъ точекъ находятся на прямой, получается спеціальный видъ конопримъ: пара прямыхъ.

Если пять точекъ расположены на одномъ кругѣ, то этотъ кругъ и будетъ опредѣляемою конопримою внѣ зависимости отъ расположенія точекъ на кругѣ. Но если данныя пять точекъ состоятъ изъ вершины квадрата и его центра, что подразумѣваетъ высокій видъ симметріи, то получаются двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя, дѣйствительно соотвѣтствующія этому виду симметріи.

Также, если въ пространствѣ шесть точекъ есть вершины правильнаго октаэдра, то мы имѣемъ три взаимно-перпендикулярныя плоскости, въ которыхъ находятся по четыре точки, образующія вершины квадрата; слѣдовательно, это должны быть особыя плоскости, въ которыхъ находится коноприма, и чрезъ эту конопримy долженъ проходить лучъ. Ясно, что эта коноприма представляетъ пару взаимно перпендикулярныхъ осей октаэдра, а третья ось есть лучъ, проходящій чрезъ эту спеціальную конопримy.