9. Новый выводъ формулы Валлиса.

Е. К. Миткевича-Волчасскаго.

(Доложено 1 мая 1907 г.)

Въ настоящей замѣткѣ разбирается выраженіе длины дугъ эллипса и гиперболы, посредствомъ безконечныхъ рядовъ.

Изъ уравненія эллипса $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ имѣемъ

$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$, откуда далѣе находимъ

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}\,dx \ldots . \quad (1)$$

Такъ какъ x измѣняется отъ $-a$ до $+a$, то можно положить $x=a\,\mathrm{Sin}\,\varphi$; опредѣляя изъ ур-нія эллипса соотвѣтствующее значеніе для y получимъ

$$y^2=b^2\cos^2\varphi.$$

Подставляя въ формулу (1) вмѣсто x и y принятыя для нихъ выраженія найдемъ

$ds=a\sqrt{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}\,d\varphi$, e—эксцентриситетъ эллипса.

Длина дуги четверти эллипса выразится опредѣленнымъ интеграломъ $a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}\,d\varphi$, такъ какъ при интегрированіи абсцисса x будетъ измѣнятся отъ o до a, что соотвѣтствуетъ измѣненію φ отъ o до $\frac{\pi}{2}$.

Итакъ $\frac{1}{4}\mathrm{S}=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}\,d\varphi$ или

$\mathrm{S}=4\,a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}\,d\varphi$, гдѣ буквой S обозначена длина дуги всего эллипса.

Предложенный интегралъ—эллиптическій, и для вычисленія его необходимо разложить подынтегральную функцію въ безконечный рядъ по формулѣ бинома Ньютона.

$$\sqrt{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}=(1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}e^2\mathrm{Sin}^2\varphi-$$

$$-\frac{1.1}{2.4}e^4\mathrm{Sin}^4\varphi-\frac{1.1\,3}{2.4.6}e^6\mathrm{Sin}^6\varphi-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}e^8\mathrm{Sin}^8\varphi-\ldots.-$$

$$-\frac{1.1.3\ldots.2m-3}{2.4.6\ldots.2m}e^{2m}\mathrm{Sin}^{2m}\varphi-\ldots.$$

Умножая всѣ члены полученнаго ряда на $a.d\varphi$ и интегрируя отъ o до $\frac{\pi}{2}$ найдемъ

$$\mathrm{S}=4\,a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi-$$

$$-\sum_{m=1}^{m=\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1.1.3\ldots.2m-3}{2.4.6\ldots.2m}e^{2m}\sin^{2m}\varphi\,d\varphi$$

Такъ какъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}\varphi\,d\varphi=\frac{1.3.5\ldots.2m-1}{2.4.6\ldots.2m}\cdot\frac{\pi}{2},$$ то для S получимъ слѣдующее выраженіе

$$S=2a\pi\left[1-\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1.1.3\,5\ldots.2m-3}{2.4.6.8\ldots.2m}\cdot\frac{1.3.5\ldots.2m-1}{2.4.6\ldots.2m}e^{2m}\right]$$

или

$$\mathrm{S}=2a\pi\left[1-\sum_{m=1}^{m=\infty}\left(\frac{1.3.5\ldots.2m-1}{2\,4.6\ldots.2m}\right)^2\frac{e^{2m}}{2m-1}\right]$$

Раскрывая знакъ Σ, представимъ длину дуги эллипса S въ видѣ безконечнаго ряда, расположен-

наго по возрастающимъ степенямъ эксцентриситета

$$S = 2a\pi\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{e^2}{1} - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \frac{e^6}{5} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 \cdot \frac{e^8}{7} - \ldots - \left(\frac{1.3.5 \ldots 2m-1}{2.4.6 \ldots 2m}\right)^2 \frac{e^{2m}}{2m-1} - \ldots\right] \ldots (I)$$

Длина дуги эллипса очевидно меньше периметра прямоугольника, построеннаго на осяхъ $2a$ и $2b$; поэтому имѣемъ неравенство

$$S < 4a + 4b \text{ или } S - 4a < 4b$$

Изъ послѣдняго неравенства слѣдуетъ, что при уменьшеніи полуоси b (a остается при этомъ неизмѣнной), разность $S-4a$ также будетъ уменьшаться, и, если b сдѣлается безконечно-малой величиной, то и разность $S-4a$ будетъ безконечно мала. Это показываетъ, что $\lim S = 4a$ при $b = 0$. Такъ какъ

$e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$, то, при $b=0$, $e=1$. Имѣя это въ

виду, можемъ опредѣлить предѣлъ S при $b=0$ съ помощью ряда (I), если вмѣсто e подставимъ его предѣльное значеніе—единицу. Сдѣлавъ это, получимъ

$$\lim_{b=o} S = 2a\pi\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} - \right.$$

$$- \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 \frac{1}{7} - \ldots\ldots -$$

$$\left. - \left(\frac{1.3.5 \ldots 2m-3}{2.4.6 \ldots 2m-2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2m-3} - \ldots\ldots\right]$$

Но мы нашли раньше, что $\lim_{b=0} S = 4a$; поэтому

$$4a = 2a\pi\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 \cdot \frac{1}{7} - \ldots - \left(\frac{1.3.5 \ldots 2m-3}{2.4.6 \ldots 2m-2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2m-3} - \ldots\right]$$

Раздѣляя обѣ части послѣдняго равенства на $2a\pi$, получимъ слѣдующую формулу

$$\frac{2}{\pi} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} - \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 \cdot \frac{1}{7} -$$

$$- \ldots\ldots - \left(\frac{1.3.5 \ldots 2m-3}{2.4.6 \ldots 2m-2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2m-3} - \ldots\ldots \text{ (II)}$$

Опредѣлимъ сумму m членовъ этого ряда; для этого найдемъ отношеніе $\frac{U_{m+1}}{U_m}$, гдѣ U_{m+1} и U_m суть $(m+1)$-ый и m-ый члены.

$$U_{m+1} = -\left(\frac{1.3.5 \ldots (2m-1)}{2.4.6 \ldots 2m}\right)^2 \cdot \frac{1}{2m-1}$$

$$U_m = -\left(\frac{1.3.5 \ldots 2m-3}{2.4.6 \ldots 2m-2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2m-3}$$

$$\frac{U_{m+1}}{U_m} = \frac{(2m-1)^2}{(2m)^2} \cdot \frac{2m-3}{2m-1} = \frac{(2m-3)(2m-1)}{(2m)^2} \text{ откуда}$$

$$(2m)^2 \; U_{m+1} = (2m-3)(2m-1) U_m = (4m^2 - 8m + 3) U_m = (2m-2)^2 U_m - U_m.$$

Итакъ связь между U_{m+1} и U_m выражается такъ:

$$(2m)^2 U_{m+1} = (2m-2)^2 U_m - U_m$$

Полагая въ этомъ равенствѣ $m = 1, 2, 3 \ldots m$ получимъ

$$(2m)^2 U_{m+1} = (2m-2)^2 U_m - U_m$$

$$(2m-2)^2 U_m = (2m-4)^2 U_{m-1} - U_{m-1}$$

$$(2m-4)^2 U_{m-1} = (2m-6)^2 U_{m-2} - U_{m-2}$$

. . . . . .

$$4^2 U_3 = 2^2 U_2 - U_2$$

$$2^2 U_2 = 0 \cdot U_1 - U_1.$$

Складывая всѣ эти равенства и произведя сокращенія получимъ

$$(2m)^2 U_{m+1} = -(U_m + U_{m-1} + \ldots + U_2 + U_1) = -\Sigma_m.$$

Отсюда опредѣлится Σ_m.

$$\Sigma_m = -(2m)^2 U_{m+1} = \frac{(1.3.5 \ldots 2m-1)^2}{(2.4.6 \ldots 2m)^2} \cdot \frac{1}{2m-1} (2m)^2$$

$$\Sigma_m = \left(\frac{1.3.5 \ldots 2m-3}{2.4.6 \ldots 2m-2}\right)^2 (2m-1)$$

Такъ какъ $\lim \Sigma_m$ при $m = \infty$ есть $\frac{2}{\pi}$, то

$$\frac{2}{\pi} = \lim\left(\frac{1.3.5 \ldots 2m-3}{2.4.6 \ldots 2m-2}\right)^2 (2m-1) \text{ при } m = \infty$$

Взявъ въ послѣднемъ равенствѣ обратныя дроби, получимъ слѣдующую формулу

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{(2.4.6 \ldots 2m-2)^2}{(1.3.5 \ldots 2m-3)^2} \cdot \frac{1}{2m-1} \text{ при } m = \infty,$$

которая есть не что иное, какъ формула Валлиса.

Тотъ же результатъ можно было бы получить посредствомъ нахожденія длины дуги гиперболы.