2. Сферическія совокупности конопримъ.

Е. С. Федоровъ.

(доложено 4 сентября).

К самымъ первымъ началамъ новой геометріи относится теорема, по которой проективность на примахъ (линейныхъ и квадратныхъ) устанавливается соотвѣтствіемъ трехъ элементовъ.

Поэтому, если на плоскости даны четыре произвольныя прямыя, то каждая изъ нихъ въ пересѣченіи съ тремя другими даетъ три точки, и этого достаточно, чтобы установить проективность точекъ на всѣхъ этихъ прямыхъ, потому что на каждой изъ нихъ имѣемъ по три соотвѣтственныя точки.

Означимъ данныя прямыя буквами a, b, c, d; на первой имѣемъ точки пересѣченія Ab, Ac, Ad; на второй Bc, Bd, Ba и т. д. Но какъ точка Ab, такъ и точка Ba есть точки пересѣченія прямыхъ a и b, то есть въ сущности одна и та же точка, а потому нетолько имѣемъ соотвѣтствіе $\left\{\begin{matrix} Ab & Ac & Ad \\ Ba & Bd & Bc \end{matrix}\right\}$; но и перспективное положеніе соотвѣтственныхъ точекъ, а слѣдовательно и центръ перспективы $AB=CD$, который опредѣляется пересѣченіемъ прямыхъ Ac, Bd съ Ad, Bc.

Три центра перспективы, каждый для двухъ паръ данныхъ прямыхъ, есть вершины полярнаго трехугольника, получающагося, если четыре данныя прямыя принять за стороны полнаго четырехугольника, и стороны этого трехугольника есть діагонали послѣдняго.

Такимъ образомъ по произвольно взятой точкѣ на одной изъ прямыхъ напр. Pa легко получить остальныя три гомологичныя точки Pb, Pc и Pd; для этого Pa проектируемъ чрезъ центръ AB на прямую b и получаемъ точку Pb, или чрезъ центръ AC на прямую c и получаемъ точку Pc и наконецъ чрезъ центръ AD на прямую d и получаемъ точку Pd.

Геометрическое значеніе этихъ четырехъ точекъ также извѣстно изъ элементовъ новой геометріи: это точки касанія нѣкоторой конопримы къ даннымъ четыремъ прямымъ или лучамъ [1]). Но такъ какъ на каждой прямой имѣется линейная прима точекъ, а изъ каждой выводится коноприма, касательная къ даннымъ четыремъ прямымъ, то такимъ образомъ непосредственно выводится линейная прима такихъ конопримъ то есть конопримъ лучей (Kegelschnitt schaar по прежнимъ обозначеніямъ).

Если изъ этой линейной примы остановимся на какихъ-нибудь двухъ конопримахъ, то, такъ какъ каждая изъ нихъ касается ко всѣмъ четыремъ даннымъ прямымъ, то на каждой получаемъ по двѣ точки, а всего восемь точекъ, про которыя извѣстно, что чрезъ нихъ проходитъ одна коноприма точекъ [1]).

Если означимъ эти конопримы К и K_1, то получимъ линейную приму конопримъ точекъ, каждая изъ которыхъ проходитъ чрезъ четыре точки касанія на К и линейную приму конопримъ точекъ, каждая изъ которыхъ проходитъ чрезъ четыре точки касанія на K_1, а коноприма пересѣченія этихъ двухъ линейныхъ примъ есть та, которая проходитъ чрезъ всѣ восемь точекъ.

Такъ какъ эти двѣ линейныя примы пересѣкаются въ одномъ элементѣ, то значитъ обѣ вмѣстѣ принадлежатъ одной линейной секундѣ конопримъ точекъ. Отдавая себѣ отчетъ въ составѣ этой линейной секунды, мы легко поймемъ, что она состоитъ изъ совокупности всѣхъ линейныхъ примъ конопримъ, опредѣляемыхъ каждыми четырьмя гомологичными точками, или иначе: она состоитъ изъ конопримъ, проходящихъ чрезъ каждыя двѣ четверки гомологичныхъ точекъ [2]).

Какую бы изъ четверокъ мы ни положили въ основаніе разсужденій, всегда можемъ опредѣлить нѣкоторую коноприму по ней и безконечно-близкой къ ней четверкѣ. Тогда коноприма, принадлежащая разсматриваемой линейной секундѣ, имѣетъ всѣ дан-

[1]) Для справки можно сослаться напр. на Reye. Geometrie der Lage I. 103.

[1]) Понятіе такой „четверки“ (какъ точекъ, такъ и лучей) впервые введено Staudt'омъ подъ терминомъ «Wurf».

[2]) Соотвѣтственная теорема приводится въ томъ же руководствѣ на стр. 253 (№ 129).

ныя четыре прямыя своими касательными, а совокупность такихъ конопримъ есть совокупность всѣхъ конопримъ, касательныхъ къ четыремъ даннымъ прямымъ то есть линейная прима конопримъ лучей, о которой упомянуто выше. Слѣдовательно, въ составъ разсматриваемой линейной секунды конопримъ точекъ входитъ и линейная прима конопримъ лучей, если мы ихъ будемъ разсматривать какъ конопримы точекъ то есть въ ея представленіи огибающіе лучи замѣнимъ огибаемыми точками.

Но эта прима, такъ разсматриваемая, уже не есть линейная, а квадратичная прима конопримъ точекъ, и она входитъ въ составъ линейной секунды конопримъ. Что она есть прима квадратичная, непосредственно очевидно изъ расположеніи центровъ конопримъ; намъ извѣстно, въ линейной примѣ конопримъ точекъ совокупность точекъ есть также коноприма, тогда какъ центры въ примѣ конопримъ лучей образуютъ прямую линію, которая, слѣдовительно, пересѣкаетъ первую небольше чѣмъ въ двухъ точкахъ, и значитъ только двѣ конопримы могутъ быть общими. Но какія бы двѣ конопримы мы ни выбрали изъ линейной примы конопримъ лучей то есть квадратичной примы конопримъ точекъ, всегда только эти двѣ являются общими для нея съ опредѣляемою ими линейною примою конопримъ точекъ.

Теперь разсмотримъ коноприму K, на которой имѣется четыре опредѣленныя точки, какъ точки касанія четырехъ общихъ касательныхъ съ конопримою K_1; построимъ по этимъ четыремъ точкамъ линейную приму конопримъ точекъ и произведемъ полярное преобразованіе всѣхъ этихъ конопримъ по отношенію къ конопримѣ K_1. По смыслу полярныхъ преобразованій линейная прима конопримъ точекъ должна преобразоваться въ линейную же приму конопримъ лучей. Такъ какъ въ первой примѣ общими являются четыре точки, то во второй общими должны быть четыре поляры этихъ точекъ то есть тѣ четыре касательныя къ конопримѣ K, которыя и являются данными прямыми то есть преобразованная прима и есть та линейная прима конопримъ лучей, которая опредѣляется конопримами K и K_1.

Итакъ всякая линейная прима конопримъ точекъ преобразуется по отношенію къ одной изъ ея конопримъ въ квадратичную приму конопримъ точекъ.

Не трудно обобщить эту теорему и на совокупности высшихъ ступеней, и непосредственно утверждать, что линейная секунда конопримъ точекъ преобразуется по отношенію къ одной изъ входящихъ въ нея конопримъ въ квадратичную секунду конопримъ точекъ, линейная терція преобразуется въ квадратичную терцію и т. д.

Но сколько должно быть дано конопримъ, чтобы изъ нихъ вывести линейную секунду? какъ извѣстно, три. Если теперь по тремъ конопримамъ K, K_1 и K_2 выведемъ линейную секунду конопримъ точекъ, а эту секунду полярно преобразуемъ въ квадратичную секунду, которая будетъ заключать въсебѣ въ тѣ же три конопримы, то ясно, что въ пересѣченіи квадратичной и линейной секундъ получимъ квадратичную приму, заключающую три данныя конопримы и слѣдовательно только ими и опредѣляемую.

Но такая квадратичная прима, которая опредѣляется тремя изъ ея элементовъ есть сфероприма. Слѣдовательно, всѣ тѣ квадратичныя совокупности, для которыхъ мы получили опредѣленное общее построеніе, есть совокупности сферическія, хотя и спеціальныя.

Наконецъ, въ виду того, что выведенныя здѣсь теоремы есть теоремы позиціонныя, онѣ переносятся рѣшительно во всѣ геометрическія системы [1]), въ частности, и въ сферическія системы, а потому можемъ сказать, что линейныя совокупности конопримъ лучей на сферѣ, если мы будемъ имѣть въ виду только совокупности огибаемыхъ, есть совокупности сферическія въ системѣ конопримъ точекъ хотя и спеціальныя.

Но отъ этого пріема воспроизведенія сферопримъ мы можемъ перейти къ еще болѣе общему способу воспроизведенія сферическихъ совокупностей конопримъ, если воспользуемся понятіемъ о мнимыхъ конопримахъ и тѣмъ пріемомъ воспроизведенія линейныхъ совокупностей по конопримамъ нетолько вещественнымъ, но и мнимымъ, который изложенъ въ замѣткѣ „Практическое рѣшеніе задачи о проведеніи линейной примы конопримъ по двумъ даннымъ“ [2]) и примѣненъ въ статьѣ „О мнимыхъ конопримахъ и коносекундахъ“ [3]).

Если даны двѣ конопримы K и K_1, то мы можемъ разсматривать ихъ какъ вещественныя и мнимыя, и въ этихъ двухъ предположеніяхъ получимъ разныя линейныя примы, которыя будутъ имѣть общими по начертанію (но конечно не по существу, именно потому, что одну разсматриваемъ какъ ве-

---

[1]) Но конечно примѣнимы только къ системѣ ихъ конопримъ.

[2]) Эти Записки IV, 397.

[3]) Эти Записки IV 399.

щественную, а другую какъ мнимую) только эти двѣ конопримы.

Возьмемъ три конопримы K, K_1 и K_2 и опять таки построимъ двѣ различныя линейныя секунды, смотря потому, будемъ ли мы конопримы разсматривать какъ вещественныя или какъ мнимыя. Если мысленно перемѣнимъ значеніе одной изъ этихъ системъ, напр. всѣ мнимыя конопримы той секунды, которой принадлежатъ мнимыя же конопримы K, K_1 и K_2, будемъ считать вещественными, и наоборотъ вещественныя конопримы этой секунды будетъ считать мнимыми, то конечно эта секунда уже не будетъ секундою линейною. Легко доказать, что это будетъ сферосекунда конопримъ.

Въ самомъ дѣлѣ, всякія двѣ конопримы, первоначально принимавшійся за мнимыя, теперь принимаются уже вещественными, а потому въ составленной по нимъ линейной примѣ мы получимъ общими только двѣ конопримы, и значитъ эта секунда всякою линейною примою пересѣкается въ двухъ конопримахъ то есть она есть во всякомъ случаѣ секунда квадратичная; слѣдовательно, кромѣ трехъ элементовъ K, K_1 K_2 она пересѣкается съ линейною секундою въ квадратичной примѣ; въ свою очередь, эта квадратичная прима опредѣляется лишь тремя элементами то есть представляетъ сфероприму.

Побочнымъ слѣдствіемъ является то, что обѣ секунды входятъ въ составъ одной и той же линейной терціи.

Теперь уже не трудно обобщить полученный результатъ на всѣ высшія ступени, и мы получимъ самую общую теорему, относящуюся къ сферическимъ совокупностямъ конопримъ: тремя конопримами опредѣляются двѣ линейныя совокупности, смотря потому, будемъ ли мы ихъ разсматривать какъ вещественныя или какъ мнимыя; одна изъ этихъ секундъ, отнесенная къ другой системѣ, есть сферосекунда, а пересѣченіе обѣихъ секундъ есть сфероприма и для той, и для другой; четырьмя конопримами при тѣхъ же условіяхъ опредѣляются двѣ линейныя терціи; одна изъ нихъ, отнесенная къ другой системѣ, есть сферотерція, а пересѣченіе обѣихъ есть общая сферосекунда; пятью конопримами опредѣляются при тѣхъ же условіяхъ двѣ линейныя кварты; одна изъ нихъ, отнесенная къ другой системѣ, есть сферокварта, а пересѣченіе обѣихъ есть общая сферотерція. Какъ извѣстно, сферокварта пересѣкается линейною примою въ парѣ элементовъ, линейною секундою въ сфероприм, линейною терціею въ сферосекундѣ, и конечно линейною квартою въ сферотерціи.

Какъ видимъ, то, что мы сейчасъ вывели для конопримъ, можно разсматривать какъ широкое обобщеніе того, что было выведено для сферопримы круговъ въ статьѣ „Точное изображеніе точекъ пространства на плоскости„ [1]).

При примѣненіи этихъ теоремъ не нужно только забывать, что собственно мнимыми мы должны признавать только эллипсы (въ частности, конечно и круги); если же приходится разсматривать гиперболы за мнимыя, то мы замѣняемъ ихъ сопряженными вещественными гиперболами, имѣющими тѣ же ассимптоты. Построивъ требуемую линейную совокупность, мы всѣ полученныя гиперболы совокупности снова замѣняемъ сопряженными.

Если сферическія совокупности заданы частью вещественными, частью мнимыми конопримами, то по нимъ нужно строить двѣ линейныя совокупности одинаковой ступени, изъ которыхъ для одной нужно перемѣнить значеніе разряда конопримъ: вещественныя принять за мнимыя и обратно.

[1]) Эти Записки I 65 и слѣд.