

8. О предѣльныхъ случаяхъ P функціи Римана *).

М. И. Акимова.

(Доложено 30 апрѣля 1907 г.).

Предложимъ себѣ изслѣдовать предѣльные случаи функціи Римана

$$P\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}, \quad \alpha'+\alpha''+\beta'+\beta''+\gamma'+\gamma''=1,$$

когда двѣ или всѣ три особенныя точки ея совпадаютъ въ одну, образуя существенно особенную точку.

Тогда показатели функціи P, соотвѣтствующіе совпадающимъ точкамъ, опредѣленнымъ образомъ безпредѣльно растутъ.

1. Возьмемъ дифференціальное уравненіе P функціи

$$\frac{d^2P}{dx^2}+\left\{\frac{1-\alpha'-\alpha''}{x-a}+\frac{1-\beta'-\beta''}{x-b}+\frac{1-\gamma'-\gamma''}{x-c}\right\}\frac{dP}{dx}+$$

$$+\left\{\frac{\alpha'\alpha''(a-b)\ (a-c)}{x-a}+\frac{\beta'\beta''(b-a)\ (b-c)}{x-b}+\frac{\gamma'\gamma''(c-a)\ (c-b)}{x-c}\right\}\frac{P}{(x-a)\ (x-b)\ (x-c)}=0 \qquad (1)$$

и разсмотримъ функціи

$$P\begin{pmatrix} 0 & \infty & k \\ m & k_1+p & k_1+n & x \\ -m & k_2+p & k_2-n \end{pmatrix} (2),\quad P\begin{pmatrix} 0 & \infty & \lambda \\ m & \lambda_1 & \lambda_1 & x \\ -m & \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} (3),\quad P\begin{pmatrix} 0 & 2\lambda & -2\lambda \\ m & \lambda_1 & \lambda_1 & x \\ -m & \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} (4),$$

$$P\begin{pmatrix} -\mu & \infty & \mu \\ \mu_1+m & 2\mu_1 & \mu_1+m & x \\ \mu_2-m & 2\mu_2 & \mu_2-m \end{pmatrix} (5),\quad P\begin{pmatrix} \nu & \rho\nu & \rho^2\nu \\ \nu_1 & \nu_1 & \nu_1 & x \\ \nu_2 & \nu_2 & \nu_2 \end{pmatrix} (6),$$

гдѣ $2(k_1+k_2+p)=2(\lambda_1+\lambda_2)=4(\mu_1+\mu_2)=3(\nu_1+\nu_2)=1$ и $\rho=e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Полагая $k=\lambda=\mu=\nu=\infty$ и принимая въ соображеніе условія

$$\text{пред.}\ \frac{k_1}{k}=\text{пред.}\left(-\frac{k_2}{k}\right)=\text{пред.}\ \frac{\lambda_1}{\lambda}=\text{пред.}\left(-\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)=\text{пред.}\ \frac{2\mu_1}{\mu^2}=\text{пред.}\left(-\frac{2\mu_2}{\mu^2}\right)=\text{пред.}\ \frac{(2\nu_1)^2}{\nu^3}=\text{пред.}\ \frac{(2\nu_2)^2}{\nu^3}=1,$$

*) F. Klein. Vorlesung über die hypergeometrische Function.
R. Olbricht. Studien über die Kugel-und Cylinderfunctionen. (Acta Leopoldina, 52).
F. Schilling. Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarz' schen s—Function (Mathematische Annalen, 44).

изъ уравненія (1) получаемъ для функцій

$$\underset{k=\infty}{P}\begin{pmatrix} 0 & \infty & k \\ m\,k_1 & +p\,k_1+n & x \\ -m\,k_2 & +p\,k_2-n & \end{pmatrix}(7),\quad \underset{\lambda=\infty}{P}\begin{pmatrix} 0 & \infty & \lambda \\ m & \lambda_1 & \lambda_1\,x \\ -m & \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix}=\underset{\lambda=\infty}{P}\begin{pmatrix} 0 & 2\lambda & -2\lambda \\ m & \lambda_1 & \lambda_1\,x \\ -m & \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix}(8),$$

$$\underset{\mu=\infty}{P}\begin{pmatrix} -\mu & \infty & \mu \\ \mu_1+m & 2\mu_1 & \mu_1+m\,x \\ \mu_2-m & 2\mu_2 & \mu_2-m \end{pmatrix}(9),\quad \underset{\nu=\infty}{P}\begin{pmatrix} \nu & \rho\nu & \rho^2\nu \\ \nu_1 & \nu_1 & \nu_1\,x \\ \nu_2 & \nu_2 & \nu_2 \end{pmatrix}(10)$$

слѣдующія дифференціальныя уравненія

$$\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dP}{dx}-\frac{m^2+2nx+x^2}{x^2}P=0,$$

$$\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dP}{dx}-\left(1+\frac{m^2}{x^2}\right)P=0,$$

$$\frac{d^2P}{dx^2}-(4\,m+x^2)\,P=0,$$

$$\frac{d^2P}{dx^2}-\frac{9}{4}\,x\,P=0.$$

Второе и третье изъ этихъ уравненій суть уравненія функцій кругового и параболическаго цилиндровъ. Изъ указанныхъ же далѣе раціональныхъ преобразованій разсматриваемыхъ P функцій слѣдуетъ, что функція (10) легко выражается при помощи одной спеціальной функціи кругового цилиндра, а функція (7) представляетъ обобщеніе функцій кругового и параболическаго цилиндровъ.

2. Функціи (3), (4), (5) и (6) обладаютъ тѣмъ особеннымъ свойствомъ, что въ трехъ первыхъ изъ нихъ двѣ разности показателей, отвѣчающихъ однимъ и тѣмъ же особеннымъ точкамъ, а въ послѣдней всѣ три эти разности равны. Примѣнимъ къ этимъ функціямъ указанныя Риманномъ раціональныя преобразованія, получаемъ

$$\underset{\lambda=\infty}{P}\begin{pmatrix} 0 & 2\lambda & -2\lambda \\ m & \lambda_1 & \lambda_1\,x \\ -m & \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix}=\underset{\lambda=\infty}{P}\begin{pmatrix} 0 & \infty & 4\lambda^2 \\ \frac{m}{2} & \frac{1}{2} & \lambda_1\,x^2 \\ -\frac{m}{2} & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$\underset{\mu=\infty}{P}\begin{pmatrix} -\mu & \infty & \mu \\ \mu_1+m & 2\mu_1 & \mu_1+m\,x \\ \mu_2-m & 2\mu_2 & \mu_2-m \end{pmatrix}=\underset{\mu=\infty}{P}\begin{pmatrix} 0 & \infty & \mu^2 \\ \frac{1}{2}\mu_1 & \mu_1+m & x^2 \\ 0 & \mu_2 & \mu_2-m \end{pmatrix}=x^{\frac{1}{2}}\underset{\mu=\infty}{P}\begin{pmatrix} 0 & \infty & \mu^2 \\ \frac{1}{4}\mu_1+\frac{1}{4} & \mu_1+m & x^2 \\ -\frac{1}{4}\mu_2+\frac{1}{4} & \mu_2-m & \end{pmatrix},$$

$$\underset{\nu=\infty}{P}\begin{pmatrix} \nu & \rho\nu & \rho^2\nu \\ \nu_1 & \nu_1 & \nu_1\,x \\ \nu_2 & \nu_2 & \nu_2 \end{pmatrix}=\underset{\nu=\infty}{P}\begin{pmatrix} 0 & \infty & \nu^3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\nu_1 & x^3 \\ 0 & 0 & \nu_2 \end{pmatrix}=x^{\frac{1}{2}}\underset{\nu=\infty}{P}\begin{pmatrix} 0 & \infty & \nu^3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2}\nu_1' & x^3 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \nu_2' \end{pmatrix},\quad \nu_1'+\nu_2'=\tfrac{1}{2}\ \text{и пред.}\ \frac{(2\nu_1')^2}{\nu^3}=1.$$

Пользуясь затѣмъ равенствомъ

$$P\begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}x=x^{\alpha'}(1-x)^{\gamma'}F(\alpha'+\beta'+\gamma',\ \alpha'+\beta''+\gamma',\ 1+\alpha'-\alpha'',x)$$

$$=Const.\ x^{\alpha'}(1-x)^{\gamma'}\left\{1+\frac{(\alpha'+\beta'+\gamma')\ (\alpha'+\beta''+\gamma')}{1\,.\,(1+\alpha'-\alpha'')}x+\frac{(\alpha'+\beta'+\gamma')(\alpha'+\beta'+\gamma'+1)(\alpha'+\beta''+\gamma')(\alpha'+\beta''+\gamma'+1)}{1\,.\,2\ (1+\alpha'-\alpha'')\ (2+\alpha'-\alpha'')}x^2+\cdots\right\},$$

нетрудно установить разложенія функцій (7), (8), (9) и (10) въ ряды, принадлежащіе къ основнымъ системамъ для ихъ особенныхъ точекъ.

Напримѣръ, для существенно особенной точки $x=\infty$ получаемъ нормальные ряды

$$P\begin{pmatrix}0 & \infty & \frac{1}{\lambda}\\ \lambda_1 & m & \lambda_2\\ \lambda_2 & -m & \lambda_1\end{pmatrix}\frac{1}{x}\Big)_{\lambda=\infty} = \text{пред.}\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\lambda_1}\cdot\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{x}\right)^{\lambda_2}\cdot F\left(m+\tfrac{1}{2},-m+\tfrac{1}{2},1+\lambda_1-\lambda_2,\frac{\lambda}{x}\right)\right]_{\lambda=\infty}$$

$$=x^{-\frac{1}{2}}e^{x}\left\{1+\frac{\frac{1}{4}-m^2}{1}\cdot\frac{1}{2x}+\frac{\left(\frac{1}{4}-m^2\right)\left(\frac{9}{4}-m^2\right)}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{(2x)^2}+\ldots\right\}$$

и

$$P\begin{pmatrix}0 & \infty & \frac{1}{\mu^2}\\ \mu_1 & \frac{1}{2} & \mu_2-m\\ \mu_2 & 0 & \mu_1+m\end{pmatrix}\frac{1}{x^2}\Big)_{\mu=\infty} = \text{пред.}\left[\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\mu_1}\cdot\left(\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{x^2}\right)^{\mu_2-m}\cdot F\left(\tfrac{3}{4}-m,\tfrac{1}{4}-m,1+\mu_1-\mu_2,\frac{\mu^2}{x^2}\right)\right]_{\mu=\infty}$$

$$=x^{\frac{4m-1}{2}}\,e^{\frac{x^2}{2}}\left\{1+\frac{\left(\frac{3}{4}-m\right)\left(\frac{1}{4}-m\right)}{1}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{\left(\frac{3}{4}-m\right)\left(\frac{7}{4}-m\right)\left(\frac{1}{4}-m\right)\left(\frac{5}{4}-m\right)}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{x^4}+\ldots\right\}.$$

Здѣсь разности $\lambda_1-\lambda_2$ и $\mu_1-\mu_2$ могутъ быть цѣлыми числами и, слѣдовательно, къ основнымъ системамъ для точки $x=\infty$ принадлежатъ также ряды, содержащіе логарнѳмы.

3. Обратимся къ выраженію функціи

$$P\begin{pmatrix}a & b & c\\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\end{pmatrix}$$

въ видѣ опредѣленнаго интеграла

$$Const.\ (a-x)^{\alpha'}(b-x)^{\beta'}(c-x)^{\gamma'}\int_C(1-av)^{\alpha}(1-bv)^{\beta}(1-cv)^{\gamma}(1-xv)^{\delta}\,dv,$$

гдѣ $\alpha=-\alpha'-\beta''-\gamma''$, $\beta=-\alpha''-\beta'-\gamma''$, $\gamma=-\alpha''-\beta''-\gamma'$, $\delta=-\alpha'-\beta'-\gamma'$, а C означаетъ разсмотрѣнный далѣе криволинейный путь интегрированья въ комплексной области.

Легко получаемъ

$$P\begin{pmatrix}0 & 2\lambda & -2\lambda\\ m & \lambda_1 & \lambda_1 & x\\ -m & \lambda_2 & \lambda_2\end{pmatrix}=x^m\left(1-\frac{x}{2\lambda}\right)^{\lambda_1}\cdot\left(1+\frac{x}{2\lambda}\right)^{\lambda_1}\int_C(1-u)^{m-\frac{1}{2}}\cdot(1+u)^{m-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{xu}{2\lambda}\right)^{-2\lambda_1-m}\cdot du \qquad (11),$$

$$P\begin{pmatrix}0 & \infty & 4\lambda^2\\ \frac{m}{2} & \frac{1}{2} & \lambda_1 & x^2\\ -\frac{m}{2} & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=x^m\cdot\left(1-\frac{x^2}{4\lambda^2}\right)^{\lambda_1}\int_C u^{-m-1}\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{-\lambda_1+\frac{m}{2}}\left(1-\frac{x^2}{4u\lambda}\right)^{-\lambda_1-\frac{m+1}{2}}du \qquad (12),$$

$$P\begin{pmatrix}-\mu & \infty & \mu\\ \mu_1+m & 2\mu_1 & \mu_1+m & x\\ \mu_2-m & 2\mu_2 & \mu_2-m\end{pmatrix}=\left(1+\frac{x}{\mu}\right)^{\mu_1+m}\left(1-\frac{x}{\mu}\right)^{\mu_1+m}\int_C\left(1+\frac{u}{\mu}\right)^{-2\mu_2-\frac{1}{4}}u^{2m-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{u}{\mu}\right)^{-2\mu_2-\frac{1}{4}}\left(1-\frac{xu}{\mu^2}\right)^{-4\mu_1-2m}du \qquad (13),$$

$$P\begin{pmatrix}0 & \infty & \mu^2\\ \frac{1}{2}\mu_1 & \mu_1+m & x^2\\ 0 & \mu_2 & \mu_2-m\end{pmatrix}=x\left(1-\frac{x^2}{\mu^2}\right)^{\mu_1+m}\int_C u^{m-\frac{1}{4}}(1-u)^{-m-\frac{1}{4}}\left(1-\frac{x^2.u}{\mu^2}\right)^{-2\mu_1-m-\frac{1}{2}}du \qquad (14),$$

$$P\begin{pmatrix}\nu & \rho\nu & \rho^2\nu\\ \nu_1 & \nu_1 & \nu_1 & x\\ \nu_2 & \nu_2 & \nu_2\end{pmatrix}=$$

$$=\left(1-\frac{x}{\nu}\right)^{\nu_1}\left(1-\rho\frac{x}{\nu}\right)^{\nu_1}\left(1-\rho^2\frac{x}{\nu}\right)^{\nu_1}\int_C\left(1-\frac{u}{\nu_2^{\frac{1}{2}}}\right)^{-\nu_2-\frac{1}{3}}\left(1-\rho.\frac{u}{\nu_2^{\frac{1}{2}}}\right)^{-\nu_2-\frac{1}{3}}\left(1-\rho^2.\frac{u}{\nu_2^{\frac{1}{2}}}\right)^{-\nu_2-\frac{1}{3}}\left(1-\frac{xu}{\nu_2^{\frac{3}{2}}}\right)^{-3\nu_1}du \qquad (15).$$

Полагая $\lambda=\mu=\nu=\infty$, мы заставимъ совпасть послѣдовательно двѣ, три и всѣ четыре особенныя точки подъинтегральной функціи въ одну существенно особенную точку. Въ предѣлѣ имѣемъ

$$\underset{\lambda=\infty}{P}\begin{pmatrix} o & 2\lambda\text{-}2\lambda & \\ m & \lambda_1 & \lambda_1 x \\ -m & \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} = x^m \int_C (1-u^2)^{m-\frac{1}{2}} e^{ux}\, du \tag{16}$$

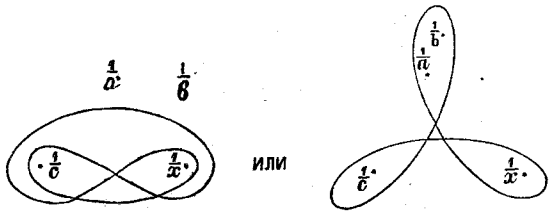
$$\underset{\lambda=\infty}{P}\begin{pmatrix} o & \infty & 4\lambda^2 \\ \frac{m}{2} & \frac{1}{2} & \lambda_1 \; x^2 \\ -\frac{m}{2} & o & \lambda_2 \end{pmatrix} = x^m \int_C u^{-m-1} e^{u+\frac{x^2}{4u}}\, du \tag{17}$$

$$\underset{\mu=\infty}{P}\begin{pmatrix} -\mu & \infty & \mu & \\ \mu_1+m & 2\mu_1 & \mu_1+m & x \\ \mu_2-m & 2\mu_2 & \mu_2-m & \end{pmatrix} = e^{\frac{x^2}{2}} \int_C u^{2m-\frac{1}{2}} e^{-u^2+2ux}\, du \tag{18}$$

$$\underset{\mu=\infty}{P}\begin{pmatrix} o & \infty & \mu^2 & \\ \frac{1}{2} & \mu_1 & \mu_1+m & x^2 \\ o & \mu_2 & \mu_2-m & \end{pmatrix} = xe^{\frac{x^2}{2}} \int_C u^{m-\frac{1}{4}} (1-u)^{-m-\frac{1}{4}} e^{ux^2}\, du \tag{19}$$

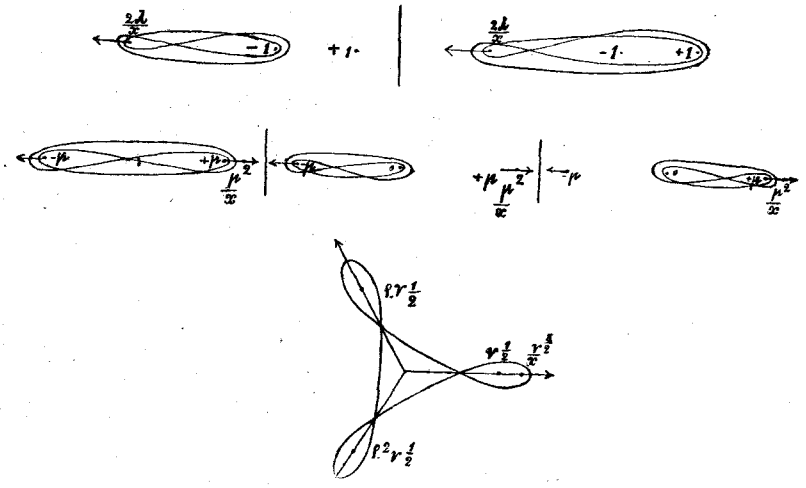
$$\underset{\nu=\infty}{P}\begin{pmatrix} \nu & \rho.\nu & \rho^2\nu & \\ \nu_1 & \nu_1 & \nu_1 & x \\ \nu_2 & \nu_2 & \nu_2 & \end{pmatrix} = \int_C e^{-\frac{u^3}{2}+\frac{3}{2}ux}\, du \tag{20}$$

И нетрудно представить себѣ, какъ измѣняется путь интегрированья C, имѣющій видъ кривой

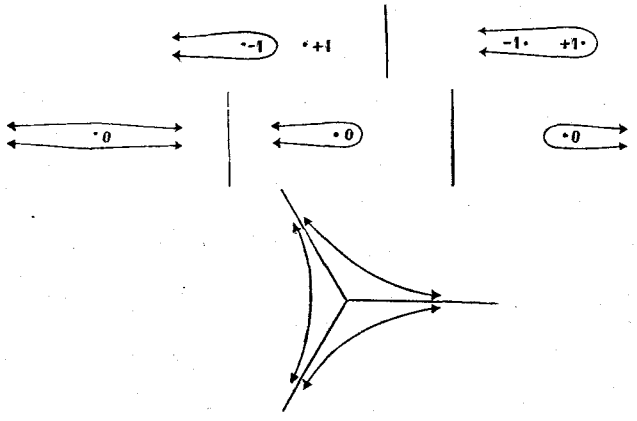


замкнутой на поверхности Риманна, отвѣчающей функціи $(1-a\,v)^{\alpha}(1-b\,v)^{\beta}(1-c\,v)^{\gamma}(1-x\,v)^{\delta}$, при совпаденіи нѣсколькихъ особенныхъ точекъ этой послѣдней въ одну.

По примѣру Римана мы представляемъ себѣ путь интегрированья въ видѣ гибкой, растяжимой и легко подвижной нити. При своемъ движеніи особенная точка деформируетъ этотъ путь, толкая его передъ собой и никогда не переступая его. При такомъ представленіи пути интегрированья изъ замкнутыхъ кривыхъ



соотвѣтствующихъ интегралamъ (11), (13), (15), для интегралovъ (16), (18), (20) получаемъ открытые пути



въ опредѣленныхъ направленіяхъ простирающіеся въ безконечность.

Замѣтимъ, что идеи Римана о „родственныхъ“ P функціяхъ, равно какъ и методъ его для разложенія въ непрерывную дробь отношенія двухъ P функцій, распространяются и на предѣльные случаи P функціи.