ЛЕНИНГРАДСКИЙ ... ГОРНЫЙ ИНСТИТУТ

7. Замѣтка объ остаточномъ членѣ ряда Тэйлора.

И. П. Долбни.

(Доложено 1 мая 1907 г.).

§ 1. Желая принести пользу начинающимъ, я долженъ войти въ такія предварительныя подробности, которыя были бы излишни въ спеціальномъ математическомъ журналѣ.

Даны двѣ функціи

$$y = \varphi(x)\ ,\ z = \psi(x),$$

конечныя и непрерывныя въ промежуткѣ отъ x до $x+h$; $h>o$, $h=\triangle x$. Имѣемъ

$dy = \varphi'(x)\,dx$; $dz = \psi'(x)\,dx$; значитъ

$$(1) \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Съ другой стороны

$$\frac{\triangle y}{\triangle z} = \frac{\varphi(x+\triangle x)-\varphi(x)}{\psi(x+\triangle x)-\psi(x)}.$$

По теоремѣ Лагранжа, разсматривая y какъ функцію z, можемъ написать

$$\frac{\triangle y}{\triangle z} = \left(\frac{dy}{dz}\right) z+\delta\triangle z,$$

гдѣ $$O<\delta<1.$$

Но значенію $z+\delta\triangle z$ соотвѣтствуетъ значеніе x, опредѣляемое формулой:

$$x+\theta\triangle x\ ,\quad O<\theta<1.$$

Поэтому, пользуясь (1), имѣемъ

$$\frac{\varphi(x+\triangle x)-\varphi(x)}{\psi(x+\triangle x)-\psi(x)} = \frac{\varphi'(x+\theta\triangle x)}{\psi'(x+\theta\triangle x)}.$$

§ 2. Даны двѣ функціи

$$F(x),\ f(x),$$

конечныя и непрерывныя, равно какъ и n ихъ послѣдовательныхъ производныхъ, въ промежуткѣ отъ x_0 до x_0+h.

Пусть при $x=x_0$ будетъ:

$$F(x_0) = F'(x_0) = \cdots = F^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

$$f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Легко доказать, что, при этихъ условіяхъ,

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F^{(n)}(x_0+\theta h)}{f^{(n)}(x_0+\theta h)}.$$

Въ самомъ дѣлѣ

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)-F(x_0)}{f(x)-f(x_0)} = \frac{F'(x_0+\theta h)}{f'(x_0+\theta h)}$$

Если $\theta h = h_1 < h$, то

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F'(x_0+h_1)-F'(x_0)}{f'(x_0+h_1)-f'(x_0)} = \frac{F''(x_0+\theta_1 h_1)}{f''(x_0+\theta_1 h_1)}.$$

Называя

$$\theta_1\ h_1 = h_2 < h_1 < h,$$

имѣемъ

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F''(x_0+h_2)-F''(x_0)}{f''(x_0+h_2)-f''(x_0)} = \frac{F'''(x_0+\theta_2 h_2)}{f'''(x_0+\theta_2 h_2)}.$$

Ясно, что такимъ образомъ дойдемъ до равенства

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F^{(n)}(x_0+\theta_{n-1} h_{n-1})}{f^{(n)}(x_0+\theta_{n-1} h_{n-1})}.$$

Называя

$$\theta_{n-1}\ h_{n-1} = h_n < h_{n-1} < h_{n-2} < \ldots < h,$$
$$h_n = \delta\ h,$$

имѣемъ

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)} = \frac{F^{(n)}(x_0+\delta h)}{f^{(n)}(x_0+\delta h)},$$
$$O<\delta<1.$$

§ 3. Имѣемъ

$$f(x+h) = f(x) + h\ f'(x+\theta h),$$

или въ болѣе неопредѣленной формѣ

$$f(x+h) = f(x) + h\varphi(h)$$

Дифференцируя это равенство по h, полагая x независящимъ отъ h, имѣемъ

$$f'(x+h) = \varphi(h) + h\xi(h),$$

гдѣ знакомъ ξ обозначена функція, которой въ данномъ ближе намъ нѣтъ надобности знать.
Полагая

$$h=0,$$

имѣемъ

$$\varphi(0) = f'(x).$$

А такъ какъ

$$\varphi(h) = \varphi(0) + h\,\varphi_1(h),$$

то

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + h^2\varphi_1(h)$$

Дифференцируя это равенство по h два раза, получимъ

$$f''(x+h) = 1.2.\,\varphi_1(h) + h\xi_1(h);$$

отсюда

$$\varphi_1(0) = \frac{1}{1.2}f''(x).$$

А такъ какъ

$$\varphi_1(h) = \varphi_1(0) + h\varphi_2(h),$$

то

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + h^3\varphi_2(h).$$

Ясно, что такимъ путемъ дойдемъ до равенства

$$(2)\quad f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2.\ldots.(n-1)}f^{(n-1)}(x) + h^n\psi(h),$$

гдѣ $\psi(h)$ нужно опредѣлить.

Изъ (2) имѣемъ

$$(3)\quad \psi(h) = \frac{f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \ldots - \frac{h^{n-1}}{1.2.\ldots.(n-1)}f^{(n-1)}(x)}{h^n}$$

Такъ какъ числитель и знаменатель правой части (3) обращается въ нуль при $h=0$ и, кромѣ того, при $h=0$ обращаются въ нуль всѣ производныя числителя и всѣ производныя знаменателя до $(n-1)$-го порядка включительно, то (§ 2)

$$(4)\quad \psi(h) = \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{1.2.\ldots.n.}$$

Это форма остаточнаго члена, найденная Лагранжемъ.

§ 4. Уравненіе (3) напишется такъ

$$(5)\quad h^{n-p}\,\psi(h) = \frac{f(x+h) - f(x) - \frac{h^{n-1}}{1.2.\ldots.(n-1)}f^{(n-1)}(x)}{h^p}.$$

Числитель и знаменатель (5) обращаются въ нуль при $h=0$ вмѣстѣ со всѣми своими производными до $(p-1)$-го порядка, а потому по § 2 можно написать

$$h^{n-p}\,\psi(h) = \frac{f^{(p)}(x+h_1) - f^{(p)}(x) - \ldots - \frac{h_1^{n-p-1}}{1.2.3\ldots(n-p-1)}f^{(n-1)}(x)}{1.2.3\ldots.p.},$$

$$h_1 = \theta h.$$

Но

$$f^{(p)}(x+h_1) - f^{(p)}(x) - \ldots - \frac{h_1^{n-p-1}}{1.2\ldots(n-p-1)}\frac{d^{n-p-1}}{dx^{n-p-1}}f^{(p)}(x) = \frac{h_1^{n-p}\,f^{(n)}(x+\delta h_1)}{1.2.\ldots.n-p.}.$$

Слѣдовательно

$$h^{n-p}\,\psi(h) = \frac{\theta^{n-p}\,h^{n-p}\,f^{(n)}(x+\delta\theta h)}{1.2.\ldots.p.\,1.2.\ldots.(n-p)},$$

$$\psi(h) = \frac{\theta^{n-p}\,f^{(n)}(x+\delta\theta h)}{1.2.\ldots.p.\,1.2.\ldots.(n-p)}.$$

Поэтому

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \ldots\ldots + \frac{\theta^{n-p}\,h^n\,f^{(n)}(x+\delta\theta h)}{1.2.\ldots.p.\,1.2.\ldots.(n-p)},$$

$$0 < \delta < 1.$$

Получили, такимъ образомъ, новую форму остаточнаго члена.