1. Коллинеарное преобразованіе мнимыхъ паръ лучей.

Е. С. Федорова.

(Доложено 16 сентября).

Инволюторно-коллинеарное преобразованіе относится къ самымъ элементарнымъ операціямъ новой геометріи. Но при этомъ всегда имѣется въ виду преобразованіе вещественныхъ геометрическихъ образовъ. Задача преобразованія мнимыхъ образовъ, напр. мнимыхъ круговъ, какъ кажется, и не была ставима, и представляется непонятной.

Но при изслѣдованіи системы паръ лучей эта задача представилась во всей ея реальности въ слѣдующемъ видѣ. Если даны двѣ пары лучей, мы принимаемъ ихъ за двѣ пары касательныхъ къ параболѣ, которую легко и строимъ, и такимъ образомъ, находимъ, линейную приму паръ лучей, центры которыхъ составляютъ прямую, а сами пары лучей—пары касательныхъ къ параболѣ. Пока эти центры находятся внѣ параболы, мы имѣемъ вещественныя пары касательныхъ, и эти пары коллинеарно преобразуются другъ въ друга, если эту прямую принять за ось коллинеаціи, а ея полюсъ по отношенію къ параболѣ за центръ коллинеаціи. Но этотъ рядъ вещественныхъ паръ заканчивается на касательной, проведенной изъ полюса, самоколлинеарнымъ лучомъ то есть лучомъ двойнымъ, а дальше начинаются мнимыя касательныя и вмѣстѣ съ тѣмъ мнимыя пары лучей.

Если бы мы приняли во вниманіе только вещественную половину паръ лучей, могли бы сказать; что вообще всѣ пары коллинеарно преобразуются другъ въ друга, а по отношенію къ мнимымъ парамъ и является тотъ вопросъ, который разбирается въ этой замѣткѣ. При этомъ теорема, именно какъ теорема новой геометріи, должна сохранить свою общность то есть напередъ можно выразить ее такъ: пары касательныхъ вещественныхъ или мнимыхъ, проведенныя изъ точекъ оси коллинеаціи къ параболѣ (да и вообще къ конопримѣ), самоколлинеарны, и собственно задача сводится къ рѣшенію вопроса, въ чемъ состоитъ самоколлинеація мнимыхъ паръ?

Въ данномъ случаѣ мнимыя пары лучей есть пары мнимыхъ касательныхъ то есть представляютъ пару лучей, соединяющихъ внутреннюю точку поляры съ парою двойныхъ мнимыхъ точекъ на полярѣ этой точки, а пара мнимыхъ двойныхъ точекъ есть просто та исключительная пара сопряженныхъ точекъ на прямой, разстояніе которыхъ наименьшее, и по отношенію къ которой всѣ остальныя пары сопряженныхъ располагаются въ симметричныя пары. Конечно, къ такимъ парамъ непримѣнимы общія операціи коллинеарнаго преобразованія прямыхъ линій за исключеніемъ именно мнимой двойной пары лучей, которые коллинеарно преобразуются другъ въ друга.

Въ самомъ дѣлѣ для каждой внутренней точки поляры, какъ центра паръ лучей, мы имѣемъ кромѣ мнимой двойной пары, еще пару лучей, состоящую изъ самой поляры и луча, проходящаго чрезъ полюсъ. Если спроектируемъ эти обѣ пары на обратной оси коллинеаціи (то есть на прямой, параллельной оси коллинеаціи—полярѣ—и проходящей чрезъ центръ коллинеаціи—полюсъ), то поляра спроектируется экстраточкой, а потому центръ коллинеаціи раздѣлитъ пополамъ отрѣзокъ, отмѣчаемый мнимыми двойными лучами, какъ это имѣетъ мѣсто и для всѣхъ вещественныхъ паръ лучей. Самоколлинеарными, то есть сопряженными, парами мнимыхъ лучей будутъ тѣ, которыя въ проекціи на обратную ось коллинеаціи принадлежатъ парамъ инволюціи, опредѣленнымъ двумя уже отмѣченными парами. То же самое имѣетъ мѣсто и по отношенію къ вещественнымъ парамъ лучей съ тою разницею, что для послѣднихъ центръ коллинеаціи и экстраточка на обратной оси коллинеаціи составляютъ пары двойныхъ точекъ инволюціи, а не просто пару сопряженныхъ точекъ; поэтому для нихъ центръ коллинеаціи всегда дѣлитъ пополамъ отрѣзокъ, отмѣчаемый сопряженными парами точекъ.

Это разрѣшеніе поставленнаго вопроса вмѣстѣ

съ тѣмъ разрѣшаетъ вопросъ и объ инволюціи на обратной оси коллинеаціи, образующейся совокупностью самихъ двойныхъ точекъ непрерывнаго ряда предъидущихъ инволюцій.

Въ самомъ дѣлѣ, эти инволюціи есть инволюціи паръ лучей въ точкахъ на оси коллинеаціи (полярѣ), причемъ пары касательныхъ, вещественныхъ или мнимыхъ, есть двойные лучи этихъ инволюцій.

Но эти пары касательныхъ представляютъ изъ себя только спеціальныя конопримы, а ихъ разсматриваемая совокупность есть линейная прима такихъ спеціальныхъ конопримъ. Каждой парѣ лучей коррелятивенъ лучъ, гармоническій по отношенію къ общей полярѣ, а всѣ эти лучи пересѣкаются въ общемъ полюсѣ и слѣдовательно образуютъ линейную приму. Отсюда слѣдуетъ, что если въ томъ-же полюсѣ мы замѣнимъ эти одиночные лучи коррелятивными парами, то послѣднія представятъ линейную приму, то есть инволюцію паръ лучей, а въ этой инволюціи представлены и мнимыя пары лучей, а потому имѣются два вещественные двойные луча.

Поэтому мы можемъ взять нѣкоторую точку совершенно произвольно и изъ нея проводить пары лучей, вещественныхъ и мнимыхъ, параллельныя парамъ этой линейной примы, и мы получимъ инволюцію паръ лучей съ общимъ центромъ и притомъ, если есть мнимыя пары, непремѣнно съ двумя вещественными двойными лучами (гиперболическую), и эта послѣдняя есть не что иное, какъ пара касательныхъ въ концахъ хорды на полярѣ.

На какой бы прямой мы ни спроектировали эту инволюцію, мы можемъ пары точекъ принять за діаметры круговъ, все равно вещественныхъ или мнимыхъ, а вся вообще линейная прима этихъ круговъ вполнѣ и однозначно опредѣляется двумя точечными кругами и вмѣстѣ съ тѣмъ вещественнымъ ортогональнымъ кругомъ, имѣющимъ своимъ діаметромъ пару этихъ точечныхъ круговъ.

Пусть намъ даны хоть двѣ мнимыхъ двойныхъ пары лучей. Прямая, соединяющая ихъ центры, есть поляра; при каждомъ центрѣ этой прямой полярѣ мы находимъ сопряженный лучъ пары, а точка пересѣченія этихъ двухъ сопряженныхъ лучей есть искомый полюсъ найденной поляры по отношенію къ конопримѣ, а потому, параллельная полярѣ, проведенная чрезъ этотъ центръ, есть обратная ось коллинеаціи.

Пусть А есть центръ одной изъ мнимыхъ паръ; чрезъ него же проведемъ параллельныя лучамъ другой данной пары, а на обратной оси коллинеаціи будемъ имѣть двѣ пары діаметровъ мнимыхъ круговъ линейной примы; по нимъ легко найдемъ оба точечные круга примы, а отъ нихъ вернемся къ искомымъ касательнымъ, если изъ полюса проведемъ лучи параллельные лучамъ изъ А къ точечнымъ кругамъ.

Это дастъ намъ нетолько двѣ касательныя къ искомой параболѣ, но и точки касанія на нихъ, а теорема Паскаля даетъ легкое средство воспроизвести параболу, которая и есть тетраприма лучей, опредѣляющая линейную приму паръ лучей по двумъ даннымъ мнимымъ парамъ.