6. Выводъ одной изъ основныхъ формулъ ученія о симметріи.

Е. С. Федорова.

(Доложено 2 апрѣля 1907 г.).

Формула, о которой здѣсь идетъ рѣчь, есть логическое слѣдствіе двухъ уже извѣстныхъ формулъ, которыя и были приведены въ полномъ изложеніи авторомъ ученія о симметріи, а именно въ той части, которая вышла подъ заглавіемъ „Симметрія конечныхъ фигуръ“ [1]).

Первою выведена формула Браве въ его извѣстномъ сочиненіи Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique [2]). Если означимъ величину симметріи совмѣщенія чрезъ S, число осей наименованія p чрезъ P, наименованіе q чрезъ Q и наименованія r чрезъ R, то получимъ

$$S-1=P(p-1)+Q(q-1)+R(r-1) \qquad 1).$$

Эту формулу можно считать непосредственно очевидною, такъ при данной произвольной точкѣ, каждая ось наименованія p выводитъ всего p равныхъ точекъ то есть прибавляетъ $(p-1)$ равныхъ точекъ къ одной данной. То же имѣетъ мѣсто и для осей наименованія q и r. Число же всѣхъ, выводимыхъ изъ одной, равныхъ точекъ и есть то число, которое называется величиною симметріи совмѣщенія то есть S.

Здѣсь нужно только замѣтить, что вся группа осей опредѣляется двумя произвольными неравными осями, и тогда равнодѣйствующая ось отличается отъ обѣихъ данныхъ и образуетъ третью подгруппу равныхъ осей, входящую въ составъ полной группы осей.

Второю была выведена формула Кюри [3]). Она имѣетъ въ основаніи выводъ числа равныхъ осей въ подгруппѣ.

Возьмемъ симметрическій многогранникъ, характеризующійся опредѣленною группою осей симметріи и грани котораго перпендикулярны къ осямъ одной подгруппы. Величина симметріи S совмѣщенія есть число возможныхъ вращеній совмѣщенія около осей симметріи. Возьмемъ одну изъ осей упомянутой подгруппы. При всякомъ совмѣщеніи эта ось совпадетъ непремѣнно съ одною изъ равныхъ осей подгруппы. Поэтому число S сложится изъ двухъ множителей, одинъ изъ которыхъ есть число P' равныхъ осей (наименованія p) подгруппы, а второй наименованіе p этихъ осей, такъ какъ при всякомъ вращеніи около нихъ самихъ положеніе ихъ не измѣнится, а число такихъ совмѣщеній дается ихъ наименованіемъ.

Если къ осямъ наименованія p въ составѣ группы имѣются перпендикулярныя къ нимъ двойныя оси (или вообще оси четнаго наименованія), то ось приходитъ въ совмѣщеніе также при поворотѣ на 180^0 около этихъ осей, и потому для такихъ осей P' нужно принимать вдвое большимъ, чѣмъ P. Поэтому такія оси симметріи называются парными.

Если въ группѣ имѣется подгруппа непарныхъ осей, то эта же подгруппа есть и подгруппа другихъ непарныхъ осей; иначе двѣ подгруппы осей совпадаютъ и получается всего двѣ подгруппы.

Пусть p есть наименованіе непарной оси. Такія оси образуютъ подгруппу. Такъ какъ теорема эта вообще имѣетъ смыслъ только въ томъ случаѣ, когда эта ось присутствуетъ не одна, а есть и какія-нибудь другія оси, такъ какъ при присутствіи другихъ

---

1) Записка И. СПБ. Минералогическаго Общества часть XXV.

2) Она вошла въ составъ сборнаго посмертнаго изданія Études cristallographiques (1866).

3) Sur les questions d'ordre. Bulletin de la Soeiété minéralogique de France 1884.

осей получаются и равнодѣйствующія, а въ числѣ послѣднихъ непремѣнно присутствуетъ подгруппа двойныхъ осей симметріи, то мы должны принять и присутствіе нѣсколькихъ таковыхъ какъ особой подгруппы.

Въ симметрическомъ многогранникѣ, грани коего перпендикулярны къ осямъ p, не имѣется параллельныхъ граней, потому что присутствіе таковыхъ именно и обозначало бы, что ось p есть парная. Но если присоединимъ (въ центрѣ симметріи) центръ обратнаго равенства, то число граней удвоится, благодаря появленію параллельныхъ граней, но многогранникъ останется симметрическимъ, такъ какъ останутся тѣ же оси симметріи, и къ нимъ лишь присоединятся элементы прямой симметріи.

Но тотъ же результатъ мы получимъ, если прибавимъ двойную ось симметріи r, перпендикулярную къ плоскости двухъ равныхъ осей p, и тогда число равныхъ двойныхъ осей симметріи будетъ то же, что число плоскостей, въ коихъ находятся двѣ равныя оси подгруппы p. Теперь кромѣ подгруппы осей p, равнодѣйствующихъ двойныхъ осей, бывшихъ раньше, присоединяется еще подгруппа осей r. Такъ какъ можетъ существовать только три подгруппы осей, то значитъ подгруппа осей p осталась та же, и равнодѣйствующія бывшихъ раньше двойныхъ осей и осей p, не составляютъ новой подгруппы, что и требовалось доказать.

Отсюда слѣдуетъ, что во всѣхъ случаяхъ

$$Pp + Qq + Rr = \frac{3S}{2} \qquad 2)$$

и значитъ (изъ формулы 1)

$$P + Q + R - 1 = S/2 \qquad 3)$$

Итакъ, эта формула, приложимая къ какой-угодно группѣ осей симметріи (виду симметріи совмѣщенія), но конечно не приложимая къ одной оси, взятой въ отдѣльности, даетъ возможность прямо по числу осей симметріи вывести величину симметріи. Изъ нея, между прочимъ слѣдуетъ, что величина симметріи совмѣщенія непремѣнно четная (что и понятно, въ виду обязательнаго присутствія въ совокупностяхъ двойныхъ осей симметріи), а слѣдовательно величина симметріи тѣхъ видовъ, гдѣ кромѣ осей симметріи входятъ и элементы прямой симметріи, непремѣнно дѣлится на четыре.

Получивъ этотъ результатъ, я сообщилъ о немъ, какъ о весьма интересномъ соотношеніи между числомъ осей симметріи и величиною симметріи А. К. Болдыреву и предложилъ ему, не сообщая своего доказательства, дать свое въ надеждѣ, что его соображенія приведутъ къ другому ходу доказательства, зная по опыту, что независимые выводы дѣлаются разными путями.

И дѣйствительно онъ нашелъ другой, и какъ мнѣ кажется, болѣе простой и изящный выводъ той же формулы.

Въ основѣ его соображеній лежитъ слѣдующее.

Если проведемъ чрезъ оси симметріи, взятые попарно плоскости симметріи, то величина симметріи удвоится и эта двойная величина $2S$ представляетъ частное изъ $4d$ то есть суммѣ всѣхъ гоноэдровъ около одной точки на величину одного гоноэдра.

Если означимъ сумму двугранныхъ его угловъ чрезъ B, то его величина, какъ тригоноэдра (три грани есть плоскости симметріи, пересѣкающіяся въ ближайшихъ осяхъ симметріи) есть $\frac{B}{2} - d$ то есть

$$2S = \frac{4d}{\frac{B}{2} - d}, \text{ откуда } BS = 4d + 2dS.$$

Но та же величина BS есть не что иное, какъ сумма всѣмъ двугранныхъ угловъ всѣхъ гоноэдровъ то есть равна $(P+Q+R)\ 4d$, и значитъ

$$P + Q + R = 1 + \frac{S}{2},$$

что и требовалось доказать.

Примѣняя эту формулу для всѣхъ видовъ симметріи, опредѣляемыхъ однѣми осями симметріи, найдемъ:

I. Для правильныхъ системъ.

1. Тетартоэдрическій (тригонально-пентагонъ-изоэдрическій) в. с. Имѣется 4 тройныхъ и 3 двойныхъ, всего 7 осей. Отсюда $S=2(7-1)=12$.

2. Гироэдрическій (тетрагонально-пентагонъ-изоэдрическій) в. с. Имѣется 3 четверныхъ, 4 тройныхъ и 6 двойныхъ, всего 13 осей. Отсюда $S = 2(13-1) = 24$.

3. Пентагонально - пентагонъ - изоэдрическій в. с. Имѣется 6 пятерныхъ, 10 тройныхъ и 5 двойныхъ, всего 31 ось. Отсюда $S=2(31-1)= 60$.

II. Для рядовыхъ системъ.

1. n-гонально - трапецоэдрическій в. с. Имѣется 1 ось наименованія n и n осей двойныхъ, всего $n+1$. Отсюда $S = 2[(n+1)-1] = 2n$.

Въ частности, для простѣйшаго, ромбосфеноэдрическаго в. с. $n=2$, и потому величина симметріи S равна 4 (всего 3 двойныхъ оси).