5. Точное изображеніе точекъ пространства на плоскости.

Е. С. Федорова.

(Съ 20 фигурами въ текстѣ и таблицею).

(Доложено 2 апрѣля 1907 г.).

Въ выпущенномъ мною руководствѣ „Новая Геометрія какъ основа черченія“ обстоятельно развивается мысль полнаго параллелизма между рядомъ возможныхъ геометрій или геометрическихъ системъ. Въ основѣ каждой изъ нихъ находится опредѣленный геометрическій образъ какъ элементъ системы. Приводится доказательство, что мы можемъ послѣдовательно развить каждую такую геометрію, если только за элементъ примемъ такой геометрическій образъ, что изъ произвольно данныхъ двухъ такихъ образовъ мы можемъ однозначно вывести такую безконечную совокупность этихъ элементовъ, что она остается тождественною, какіе бы два изъ ея элементовъ ни были даны въ отдѣльности.

Въ частности, для геометріи точекъ такая совокупность называется прямою линіей. Поэтому, выражаясь образно, можно сказать, что геометрія какого-нибудь элемента возможна, если возможно опредѣлить прямую линію изъ этихъ элементовъ.

Въ руководствѣ показана приложимость этого принципа, помимо точекъ, къ лучамъ (исходящимъ изъ одного центра), къ плоскостямъ, къ кругамъ, къ шарамъ. И вотъ послѣдовательный рядъ теоремъ, выведенныхъ посредствомъ позиціонныхъ (построеній геометріи положенія, „Geometrie der Lage“) построеній, одинаково приложимъ для всего этого ряда геометрій, а это обстоятельство, конечно, въ высокой мѣрѣ усиливаетъ продуктивность геометрическаго мышленія.

Разнымъ элементамъ свойственны разныя ступени полной ихъ совокупности. Такъ геометрія точекъ на плоскости обнимаетъ совокупность второй, тоже въ пространствѣ третьей ступени, геометрія круговъ на плоскости обнимаетъ совокупность третьей ступени, геометрія шаровъ—четвертой ступени. Этимъ опредѣляются и предѣлы переносимости теоремъ изъ одной геометріи въ другую. Въ частности, видимъ переносимость теоремъ геометріи точекъ въ пространствѣ въ геометріи круговъ на плоскости.

Но если существуетъ такая интимная параллельность теоремъ геометріи точекъ въ пространствѣ и круговъ на плоскости, то сама собою возникаетъ идея о возможности точнаго изображенія точекъ (а слѣдовательно и получаемыхъ изъ точекъ другихъ образовъ) пространства кругами на плоскости.

Задача этой статьи и есть выработка наиболѣе совершеннаго и простого способа такого изображенія. Но она расширена въ томъ отношеніи, что для той же цѣли привлечены и двѣ новыя геометрическія системы, а именно система векторіальныхъ круговъ и система векторіальныхъ отрѣзковъ или просто векторовъ.

Пришлось выработать основы этихъ двухъ новыхъ геометрій, и вотъ подробное изслѣдованіе показало существенную разницу между геометріей круговъ обыкновенныхъ и круговъ векторіальныхъ. Наиболѣе же совершеннымъ орудіемъ для изображенія пространственныхъ образовъ на плоскости оказалась геометрія параллельныхъ векторовъ. Она привела къ столь простымъ и наглядымъ результатамъ, что оказалось возможнымъ приложить планъ реальнаго рудника (нарочно выбранъ планъ одного изъ наиболѣе запутанныхъ по выработкамъ рудниковъ) и показать нетолько наглядность изображе-

нія, но и простоту рѣшенія геометрическихъ вопросовъ, возникающихъ въ рудничномъ дѣлѣ.

Соотвѣтственно этимъ тремъ системамъ статья раздѣляется на три главы.

Чрезвычайная простота изображенія на плоскости этимъ способомъ точекъ пространства сейчасъ же вызываетъ идею тѣмъ же способомъ изображать въ пространствѣ точки и образы геометріи четвертаго измѣренія (или ступени, что одно и то же). Практическая сторона этого дѣла состоитъ въ томъ, чтобы сдѣлать доступнымъ наглядному изображенію образы (функціи) четырехъ независимыхъ перемѣнныхъ. Профессоръ Н. С. Курнаковъ съ своей стороны подчеркнулъ важность для цѣлей физической химіи выработать такой способъ изображенія. Но, послѣ всего изложеннаго, не оказалось нужды въ особой выработкѣ этого способа, такъ какъ онъ непосредственно и логически вытекаетъ изъ всего предъидущаго. Поэтому осталось лишь вкратцѣ охарактеризовать сущность этого способа и дать наглядный примѣръ его примѣненія. Съ этою цѣлью въ концѣ статьи приложено изображеніе въ пространствѣ (по методу начертательной геометріи) круга четвертаго измѣренія.

1. Изображеніе точекъ обыкновенными кругами.

Система круговъ на плоскости образуетъ терцію то есть совокупность той же ступени, что и точки пространства. Но нетолько обѣ эти совокупности одной и той же ступени, но между соотвѣтственными элементами обѣихъ (то есть кругами на плоскости и точками въ пространствѣ) можетъ быть установлена однозначная проективность то есть коррелятивность. Для этого необходимо и достаточно [1]) произвольно взять въ пространствѣ пять точекъ (лишь бы никакія четыре изъ нихъ не находились въ одной плоскости) и принять имъ коррелятивными пять круговъ на плоскости (лишь бы никакіе четыре изъ этихъ круговъ не входили въ составъ линейной секунды); тогда каждой точкѣ пространства будетъ коррелятивенъ одинъ опредѣленный кругъ на плоскости чертежа.

Въ частности, всѣмъ точкамъ какой-угодно плоскости въ пространствѣ, въ томъ числѣ и плоскости чертежа, будетъ коррелятивна нѣкоторая линейная секунда круговъ.

Для этой плоскости мы можемъ задаться и такими тремя точками (не находящимися на одной прямой), чтобы имъ на плоскости были коррелятивны круги, имѣющіе эти точки своими центрами. Тогда получимъ *согласное* положеніе точекъ и круговъ секунды на плоскости, и въ этомъ случаѣ для полнаго опредѣленія коррелятивности достаточно трехъ соотвѣтствій 1). Тремя кругами вполнѣ опредѣляется линейная секунда круговъ, а каждой произвольной точкѣ на плоскости будетъ также коррелятивенъ кругъ, имѣющій эту точку своимъ центромъ, но принадлежащій линейной секундѣ.

Понятно, что при этомъ каждой линейной примѣ круговъ коррелятивна линейная прима точекъ то есть прямая, а именно прямая, соединяющая центры двухъ произвольно взятыхъ круговъ секунды, потому что эта прямая и есть геометрическое мѣсто центровъ круговъ примы.

Если за плоскость чертежа мы примемъ такую, въ которой точки есть центры коррелятивныхъ круговъ секунды, то всякая прима концентрическихъ круговъ будетъ коррелятивна примѣ точекъ, въ составъ которой входитъ общій центръ круговъ то есть прямая, проходящая чрезъ этотъ центръ.

Ничто намъ не препятствуетъ принять коррелятивною нѣкоторой примѣ Pc концентрическихъ круговъ прямую Dv, перпендикулярную къ плоскости чертежа, и на этой прямой установить коррелятивность между безконечно-удаленною точкою и концентрическимъ кругомъ безконечно-большого діаметра.

Такъ какъ для такихъ круговъ всѣ точки на конечныхъ разстояніяхъ могутъ быть приняты за центры, то ясно, что соединивъ центръ какой угодно примы концентрическихъ круговъ съ этою безконечно-удаленною точкою то есть проведя чрезъ этотъ центръ прямую, перпендикулярную къ плоскости чертежа, мы найдемъ, что именно этой прямой и будетъ коррелятивна сама прима круговъ.

Въ этомъ случаѣ получится согласіе между точками и коррелятивными кругами нетолько для плоскости чертежа, но и для всѣхъ параллельныхъ ей плоскостей.

Такое частное соотношеніе между точками пространства и кругами на плоскости характеризуется особою наглядностью. Имѣя кругъ, мы непосредственно видимъ, на какой вертикальной линіи проектируется точка, коррелятивная этому кругу; имѣя точку, мы знаемъ, что коррелятивный кругъ будетъ имѣть ее своимъ центромъ.

Теперь обратимся къ соотношеніямъ общаго характера.

---

[1]) Н. Г. II 24. При ссылкахъ на сочиненіе „Новая Геометрія какъ основа черченія“ я буду сокращенно отмѣчать Н. Г.

[1]) Н. Г. IV 23.

Установивъ коррелятивность между точками пространства и кругами на плоскости, мы найдемъ, въ частности, что какимъ-угодно прямымъ коррелятивны линейныя примы круговъ, какимъ-угодно плоскостямъ коррелятивны линейныя секунды круговъ.

Мы различаемъ линейныя примы двоякаго рода: 1) всѣ круги примы (центры коихъ составляютъ прямую) пересѣкаютъ прямоугольно одинъ и тотъ же кругъ (ортогональный) и 2) всѣ круги примы пересѣкаются въ двухъ постоянныхъ точкахъ. Какъ переходный между ними выдѣляется частный случай 3), когда всѣ круги примы касаются другъ къ другу въ одной и той же точкѣ.

Въ первомъ случаѣ точки пересѣченія ортогональнаго круга съ централью есть два точечные круга примы; третій особый есть лишь тотъ частный случай, когда оба точечные круга сливаются въ одинъ.

Во второмъ случаѣ точечныхъ круговъ вовсе не имѣется, но изъ всѣхъ круговъ примы наименьшій діаметръ имѣетъ тотъ, для котораго обѣ данныя точки и есть концы діаметра. Ясно, что если эти двѣ точки, сближаясь, будутъ доведены до совмѣщенія, то мы опять получимъ особый частный случай 3) съ однимъ точечнымъ кругомъ.

Точно также и линейныя секунды круговъ двоякаго рода: 1) всѣ круги секунды прямоугольно пересѣкаютъ ортогональный кругъ, и 2) всѣ круги секунды проходятъ чрезъ концы діаметровъ мнимаго ортогональнаго круга. Промежуточный между этими двумя есть случай 3) секунды изъ всѣхъ круговъ, проходящихъ чрезъ одну точку.

Въ первомъ случаѣ всѣ точки ортогональнаго круга есть точечные круги; третій особый есть тотъ частный случай, когда ортогональный кругъ становится точечнымъ.

Во второмъ случаѣ точечныхъ круговъ вовсе нѣтъ; но если мнимый ортогональный кругъ становится точечнымъ, то онъ и будетъ единственнымъ точечнымъ кругомъ всей секунды.

Какъ двѣ прямыя въ пространствѣ въ общемъ случаѣ не пересѣкаются, такъ не пересѣкаются вообще и двѣ линейныя примы круговъ то есть между ними вообще нѣтъ ни одного общаго круга. Но прямая съ плоскостью необходимо пересѣкается въ одной точкѣ. Слѣдовательно, и всякая секунда круговъ необходимо имѣетъ съ каждой примой единственный общій кругъ (если только сама прима не входитъ въ составъ секунды, какъ прямая можетъ входить въ составъ плоскости).

Какъ двѣ плоскости необходимо пересѣкаются въ прямой, такъ двѣ секунды круговъ необходимо имѣютъ общею линейную приму круговъ.

Въ связи съ этимъ возникаетъ необходимость рѣшенія ряда задачъ, которыя могутъ быть представлены и въ формѣ обыкновенныхъ геометрическихъ задачъ, но вся простота которыхъ подчеркивается при употребленіи терминовъ Новой Геометріи, особенно если для этого спеціальнаго случая мы вмѣсто линейная прима или секунда круговъ прямо будемъ говорить прямая и плоскость круговъ, кривая круговъ, шаръ круговъ и т. п. то есть употреблять тѣ самые термины, которые приняты въ геометрической системѣ точекъ.

Начнемъ съ задачи опредѣленія прямой круговъ, въ которой пересѣкаются двѣ плоскости круговъ.

Ясно, что для рѣшенія этой задачи достаточно найти два круга, общіе обѣимъ плоскостямъ, потому что прима, опредѣляемая этими кругами, и есть искомая прямая круговъ.

Въ рѣшеніи этой задачи различаемъ слѣдующіе случаи:

1) обѣ плоскости круговъ представлены секундами съ мнимыми ортогональными кругами,

2) обѣ плоскости круговъ представлены секундами съ вещественными ортогональными кругами,

3) одна плоскость представлена секундою съ вещественнымъ, а другая секундою съ мнимымъ ортогональнымъ кругомъ.

Первую задачу, какъ обыкновенную геометрическую, мы можемъ формулировать такимъ образомъ:

Даны два круга O_1 и O_2; найти два какихъ либо круга, проходящихъ чрезъ концы діаметровъ обоихъ данныхъ.

За одинъ изъ такихъ круговъ мы можемъ считать центральную прямую O_1O_2, какъ кругъ безконечно-большого діаметра, такъ какъ онъ дѣйствительно проходитъ чрезъ концы діаметровъ въ обоихъ данныхъ (фиг. 1).

Проведя изъ O_1 перпендикулярный къ централи діаметръ a_1b_1 и изъ O_2 такой же діаметръ a_2b_2, мы легко найдемъ кругъ, одновременно проходящій чрезъ эти концы. Для этого достаточно изъ средины a отрѣзка a_1a_2 провести перпендикуляръ къ a_1a_2 до пересѣченія съ централью въ точкѣ Z. Ясно, что Z и есть центръ искомаго круга.

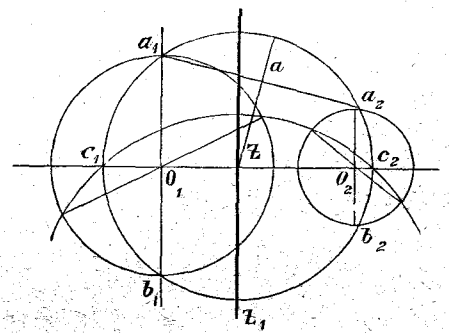
Получивъ два круга, опредѣляющіе прямую круговъ, мы видимъ, что послѣдняя состоитъ изъ круговъ, проходящихъ чрезъ точки c_1 и c_2 пересѣченія двухъ первыхъ, а централь примы этихъ круговъ, есть перпендикуляръ, возставленный къ прямой O_1O_2 въ точкѣ Z. Взявъ на этомъ перпендикулярѣ произ-

вольную точку Z_1 и принявъ ее за центръ круга, проходящаго чрезъ точки c_1 и c_2, мы имѣемъ въ послѣднемъ одинъ изъ круговъ прямой (примы).

Вторая задача распадается на двѣ, смотря потому, пересѣкаются или не пересѣкаются оба данные круга.

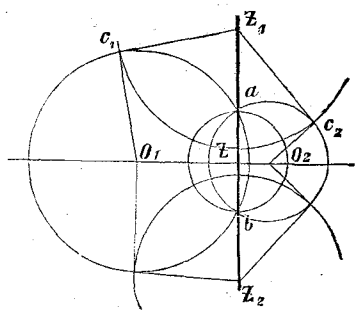
Даны два пересѣкающіеся въ точкахъ a и b круга O_1 и O_2; найти какіе-либо два круга, прямоугольно пересѣкающіе оба данные.

Фиг. 1.



Одинъ изъ искомыхъ круговъ есть очевидно централь O_1O_2 какъ кругъ безконечно-большого діаметра, прямоугольно пересѣкающій оба данные. Сюда же относятся и обѣ точки a и b какъ точечные круги, которые мы также можемъ разсматривать какъ прямоугольно пересѣкающіе оба данные (фиг. 2).

Фиг. 2.

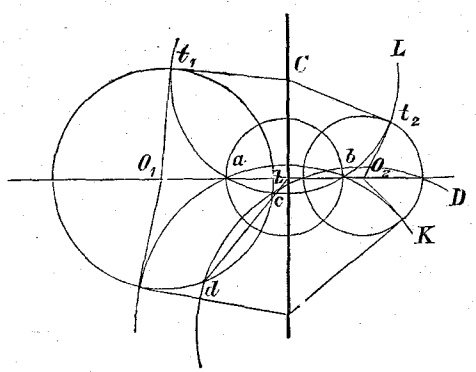


Итакъ, искомая прямая круговъ есть въ данномъ случаѣ прима съ двумя точечными кругами a и b. Всѣ круги этой примы прямоугольно пересѣкаютъ нетолько два данные круга, но и вообще всѣ круги, проходящіе чрезъ точки a и b. Взявъ произвольную точку Z_1 на прямой ab и изъ нея касательныя Z_1c_1 и Z_1c_2, найдемъ, что къ этой примѣ относится и кругъ, имѣющій Z_1 центромъ и Z_1c_1 или Z_1c_2 своимъ радіусомъ. Тоже получимъ и для каждой другой точки Z_2.

Даны два не пересѣкающіеся круга O_1 и O_2; найти какіе-либо два круга, прямоугольно пересѣкающіе оба данные (фиг. 3).

Одинъ изъ искомыхъ круговъ есть очевидно централь O_1O_2 какъ кругъ безконечно большого діаметра, прямоугольно пересѣкающій оба данные. Затѣмъ опредѣляемъ радикальную ось Zc обоихъ круговъ (напримѣръ точка Z на централи находится проведеніемъ произвольнаго круга D чрезъ концы діаметра круга O_2 и общей хорды cd пересѣченія этого круга и круга O_1). Каждый кругъ, имѣющій центромъ точку C на радикальной оси и проходящій чрезъ точку t_1 касанія прямой Ct_1 къ кругу O_1 или соотвѣтственную точку t_2 касанія его къ кругу O_2, есть искомый кругъ. Всѣ такіе круги пройдутъ чрезъ двѣ постоянныя точки a и b на централи.

Фиг. 3.



Въ сущности рѣшеніе этой задачи приводитъ къ тому же результату, что и предъидущей. Все различіе въ томъ, что тамъ даны два пересѣкающіеся, а искомые есть круги, имѣющіе точки пересѣченія точечными кругами примы, а здѣсь даны два круга примы, имѣющей точечными кругами точки a и b' а искомые всѣ круги, проходящіе чрезъ эти точечные круги.

Наконецъ третью задачу мы можемъ формулировать слѣдующимъ образомъ:

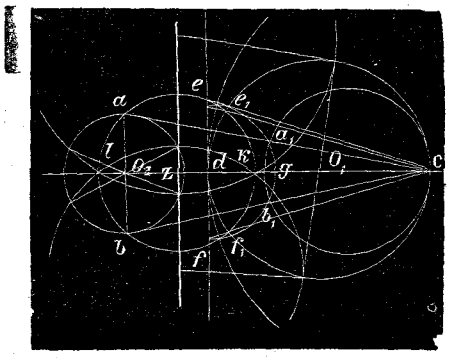
Даны два круга O_1 и O_2; найти какіе-либо два круга, которые одновременно проходили бы чрезъ діаметрально противоположныя точки круга O_2 и пересѣкали прямоугольно кругъ O_1 (фиг. 4).

Одинъ изъ искомыхъ круговъ есть очевидно централь O_1O_2 какъ кругъ безконечно-большого діа-

метра, проходящій чрезъ діаметрально противоположныя точки круга O_2 и прямоугольно пересѣкающій кругъ O_1.

Другой кругъ выберемъ такой, чтобы его центръ находился на прямой O_1O_2.

Фиг. 4.



Произведемъ преобразованіе обратными радіусами, принявъ за центръ преобразованія точку c пересѣченія круга O_1 съ централью, а за радіусъ преобразованія діаметръ cd круга O_1.

Кругъ O_1 преобразуется въ касательную cdf, и обратно, эта касательная въ кругъ O_1, діаметръ ab преобразуется въ кругъ, имѣющій діаметромъ cg, а точки a и b этого діаметра въ точки a_1, b_1. Ясно, что преобразованный искомый кругъ есть кругъ, имѣющій центромъ точку d и проходящій чрезъ точки a_1 и b_1.

При обратномъ преобразованіи кромѣ точекъ a и b, имѣемъ еще точки e_1 (на прямой ec) и f_1 (на прямой cf) какъ точки, находящіяся на искомомъ кругѣ.

И если Z есть центръ, а kl концы діаметра круга на централи, то и вся прима круговъ, опредѣляемая постоянными точками k и l, удовлетворяетъ условіямъ задачи. Ясно, что центры этихъ круговъ находятся на перпендикулярѣ къ централи, возставленномъ изъ точки Z.

Если одинъ изъ данныхъ круговъ, или оба, есть круги точечные, то рѣшеніе задачи упрощается, такъ какъ всякій кругъ, проходящій чрезъ такую точку, есть одновременно и кругъ, проходящій чрезъ концы діаметра точечнаго круга и кругъ, пересѣкающій его прямоугольно.

Точно также рѣшеніе задачи упрощается, если одинъ изъ данныхъ круговъ есть кругъ безконечно-большого діаметра то есть прямая.

Всѣ круги, пересѣкающіе ихъ прямоугольно, имѣютъ на этихъ прямыхъ свои центры; всѣ круги, проходящіе чрезъ діаметрально противоположныя точки, есть прямыя, параллельныя данной.

Задача становится особенною, если оба круга представлены прямыми, и нужно найти круги, перпендикулярные или проходящіе чрезъ концы ихъ діаметровъ. Какъ по отношенію къ одному изъ нихъ, такъ и по отношенію къ другому одинаково удовлетворяютъ заданію только прямыя безконечно-удаленныя.

Итакъ, мы въ самомъ полномъ видѣ рѣшили задачу пересѣченія двухъ плоскостей круговъ.

Изъ этого рѣшенія, какъ частный случай, вытекаетъ рѣшеніе задачи пересѣченія произвольной плоскости и произвольной прямой круговъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если данная плоскость круговъ есть P_1, а прямая D_1, имѣющая централью прямую d_1, то стоитъ присоединить къ D_1 еще одинъ произвольный кругъ, и мы получимъ, другую плоскость круговъ P_2, которая въ пересѣченіи съ плоскостью P_1 даетъ прямую круговъ D_2, коей централь есть d_2. Ясно, что искомый кругъ пересѣченія есть тотъ кругъ прямой D_1, коего центръ есть точка пересѣченія централей d_1 и d_2.

Умѣя рѣшать задачи, относящіяся къ прямымъ и плоскостямъ, и установивъ коррелятивность между кругами на плоскости и точками въ пространствѣ, мы можемъ въ сущности всѣ рѣшительно построенія въ пространствѣ перенести въ построенія на плоскости, если будемъ рѣшать по точкамъ.

Конечно, при этомъ мы должны различать построенія двоякаго рода: одни, которыя воспроизводятся только чрезъ посредство замѣны точекъ пространства коррелятивными имъ кругами, и другія, общаго характера, которыя могутъ производиться независимо отъ коррелятивности круговъ, съ которыми мы оперируемъ, и коррелятивныхъ имъ точекъ пространства. Первыя мы могли бы назвать *построенія по точкамъ*; вторыя есть построенія *позиціонныя* [1].

Если дана плоскость и точка, и изъ этой точки нужно провести къ плоскости перпендикуляръ, то мы можемъ, построеніемъ по точкамъ, найти рѣшеніе и для системы круговъ. Но дать общее опредѣленіе для перпендикулярности плоскости и прямой круговъ мы не можемъ.

Напротивъ того, если даны три точки a, b, c на прямой и нужно найти четвертую гармоническую d на той же прямой, то мы можемъ рѣшить ее и для трехъ произвольныхъ круговъ примы, не прибѣгая къ построенію по точкамъ. И рѣшеніе это сводится къ тому, что на этой примѣ круговъ мы находимъ четвертую гармоническую точку, по отношеніи къ даннымъ тремъ центрамъ круговъ данной примы.

Пусть напримѣръ круги примы проходятъ чрезъ

[1] Н. Г., I, 11.

двѣ постоянныя точки k и l. Соединивъ прямыми соотвѣтственные центры трехъ круговъ съ одною изъ этихъ точекъ, напримѣръ k и проведя чрезъ k перпендикуляры къ этимъ прямымъ, мы найдемъ три касательныя къ кругамъ въ этой точкѣ, и четвертая гармоническая касательная, какъ лучъ примы, имѣющей центръ въ точкѣ k, опредѣляетъ четвертый гармоническій кругъ.

Но если и круги примы не пересѣкаются, во всякомъ случаѣ свойство четырехъ гармоническихъ то есть такихъ, коихъ центры есть четыре гармоническія точки, есть свойство общее; это видно изъ того, что какому бы преобразованію обратными радіусами мы ихъ ни подвергли, въ результатѣ преобразованія все-таки получили бы четыре гармоническіе круга примы. И для того, чтобы по тремъ даннымъ кругамъ линейной примы построить четвертый, намъ вовсе не нужно находить коррелятивныя точки пространства и по нимъ находить искомый кругъ.

Имѣя пять произвольныхъ круговъ одной плоскости, мы легко воспроизведемъ кривую второго порядка круговъ построеніемъ, аналогичнымъ тому, какимъ по пять точкамъ воспроизводимъ произвольную шестую точку кривой. Существенная разница для системы круговъ состоитъ въ томъ, что теперь мы воспроизводимъ эту кривую въ видѣ безконечной квадратичной совокупности (примы) круговъ пространственно, тогда какъ для точекъ мы исходили изъ предположенія, что кривую мы вычерчивали въ ея собственной плоскости. Для изображенія же на плоскости кривой двоякой кривизны мы до сихъ поръ не имѣли никакихъ способовъ, а напримѣръ пользовались не менѣе чѣмъ двумя ортогональными проекціями на двухъ плоскостяхъ, кои и приводили мысленно къ совмѣщенію съ плоскостью чертежа.

Теперь же ясно, что мы дѣйствительно имѣемъ возможность на плоскости чертежа изображать фигуры пространственно, не прибѣгая ни къ какимъ условностямъ и раздвоенію изображенія.

Такъ какъ въ задачу этой статьи не входитъ дальнѣйшее развитіе Новой Геометріи вообще и системы круговъ или шаровъ въ частности, а только вопросъ изображенія пространственныхъ фигуръ на плоскости, то ясно, что первенствующее значеніе для нашей задачи имѣетъ возможное упрощеніе этого изображенія. Доказанная выше возможность согласія точекъ пространства и изображающихъ ихъ круговъ, для которыхъ эти точки являются центрами, есть очевидное условіе упрощенія такихъ изображеній.

Согласіе это выражаетъ, что всякая точка при такомъ изображеніи, представится на чертежѣ въ видѣ опредѣленнаго круга, причемъ основаніе вертикально-проектирующаго точку луча будетъ центромъ этого круга; слѣдовательно, видя положеніе точки въ планѣ, мы должны еще видѣть по радіусу круга ея превышеніе (положительное или отрицательное) надъ чертежемъ.

Изъ числа всѣхъ возможныхъ линейныхъ секундъ круговъ выдѣляется по простотѣ какъ особый случай секунда круговъ, проходящихъ чрезъ одну и ту же точку.

Примемъ эту плоскость за плоскость чертежа, на которой, слѣдовательно, будетъ отмѣчена эта особая точка O. Такимъ образомъ изъ всѣхъ круговъ плоскости выдѣлится секунда круговъ, проходящихъ чрезъ эту точку, и всѣ эти круги будутъ изображеніями тѣхъ точекъ пространства, которыя находятся на плоскости чертежа и которыя будутъ совпадать съ центрами круговъ секунды.

Затѣмъ проведемъ двѣ плоскости, параллельныя плоскости чертежа, выше и ниже, на разстояніи r, а на плоскости чертежа проведемъ изъ точки O кругъ радіусомъ r.

Чтобы установить коррелятивность точекъ пространства и круговъ, возьмемъ на верхней (положительной) плоскости три точки, проектирующіяся въ точкахъ проведеннаго круга и примемъ ихъ за точечные круги соотвѣтственной секунды; наконецъ, на нижней (отрицательной) плоскости возьмемъ точку, проектирующуюся въ точкѣ O, а за коррелятивный кругъ примемъ тотъ, коего центръ есть O, а радіусъ равенъ r то есть тотъ же проведенный кругъ.

Этихъ пяти условій достаточно для однозначнаго установленія коррелятивности системъ точекъ и круговъ.

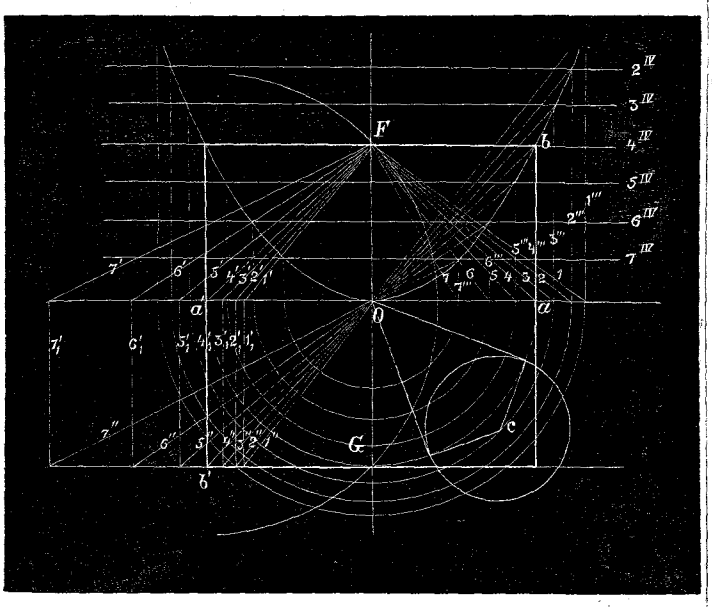
Изъ нихъ выводимъ, что на верхней плоскости всѣ точки круга abc проектируются въ точечныхъ же кругахъ. Отсюда слѣдуетъ, что для точекъ этой плоскости коррелятивная секунда будетъ имѣть кругъ радіусомъ r своимъ вещественнымъ ортогональнымъ кругомъ, и значитъ всѣ круги этой секунды пересѣкаютъ кругъ прямоугольно. Разстояніе изображаемыхъ точекъ отъ плоскости чертежа есть $+r$, а степень всѣхъ ихъ изображающихъ круговъ въ радикальномъ центрѣ то есть въ точкѣ O, есть также $+r$ $(=\sqrt{r^2}) = \sqrt{+P}$.

Если соединимъ какую-нибудь точку k ортогональнаго круга съ центромъ O на плоскости чертежа, то, по условію, обѣимъ точкамъ коррелятивны точечные круги то есть эти самыя точки на чертежѣ. Но двумя точками опредѣляется прямая, а

двумя точечными кругами прима круговъ. Слѣдовательно, всѣмъ точкамъ этой прямой въ пространствѣ (наклоненной подъ угломъ 45° къ плоскости чертежа) коррелятивны круги примы, централь которой есть ортогональная проекція пространственной прямой (фиг. 5).

Въ частности точкѣ k' діаметрально противоположной точкѣ k, если примемъ, что центры круговъ есть ортогональныя проекціи соотвѣтственныхъ точекъ прямой коррелятивенъ кругъ, проходящій чрезъ концы діаметра FG ортогональнаго круга, потому что если изъ точечнаго круга k[1]) проведемъ прямыя aF и aG, то эти прямыя касательны

Фиг. 5.



къ тому именно кругу, для котораго хорда, соединяющая точки касанія F и G, проходитъ чрезъ другой точечный кругъ O той же примы[2]); а такъ какъ это соображеніе одинаково примѣнимо для всѣхъ точекъ ортогональнаго круга, то ясно, что въ одномъ и томъ же кругѣ на чертежѣ проектируются какъ вещественный ортогональный кругъ на верхней плоскости, такъ и мнимый ортогональный кругъ на нижней плоскости.

Отсюда видимъ, что не было и надобности при опредѣленіи коррелятивности въ пятой точкѣ O на нижней плоскости, а достаточно и четырехъ остальныхъ данныхъ; во всѣхъ четырехъ принято согласіе между точками пространства и кругами на плоскости. Отсюда вытекаетъ согласіе и во всѣхъ остальныхъ точкахъ, а именно въ случаѣ согласія для опредѣленія достаточно четырехъ данныхъ [1]).

Если же дѣйствительно имѣется это согласіе, то, какъ видимъ, всѣ круги проведенной примы (какъ и однородныхъ другихъ) имѣютъ центрами точки, находящіяся внѣ ортогональнаго круга, имѣющаго діаметромъ Oa. Такимъ образомъ устанавливается соотвѣтствіе для всѣхъ такихъ точекъ прямой и коррелятивныхъ круговъ. Точкамъ же, находящимся внутри этого ортогональнаго круга, нѣтъ коррелятивныхъ вещественныхъ круговъ.

Этотъ спеціальный случай былъ уже разсмотрѣнъ [2]), и для него пришлось принять мнимые круги, діаметръ коихъ есть хорда ортогональнаго круга, перпендикулярная къ централи примы.

Переходными между вещественными и мнимыми кругами являются точечные круги, а совокупностями такихъ круговъ всегда являются ортогональные круги секунды, и только для плоскости чертежа самъ ортогональный кругъ становится точечнымъ, почему въ ней, а равно и во всѣхъ параллельныхъ ей плоскостяхъ (для коихъ имѣется мнимый ортогональный кругъ) мнимыхъ круговъ уже не имѣется, и всѣ круги вещественны.

Въ этомъ изображеніи всѣ вертикальныя прямыя будутъ представлены примами концентрическихъ круговъ, и въ частности точка безконечно-удаленная изобразится безконечно же удаленною прямою, и значитъ такія точки (точнѣе направленія) не могутъ быть изображаемы непосредственно.

Для изображенія всѣхъ остальныхъ прямыхъ намъ достаточно имѣть двѣ точки пересѣченія каждой изъ нихъ съ какими-нибудь двумя горизонтальными плоскостями, напримѣръ уже отмѣченными верхнею и нижнею плоскостями, удаленными отъ плоскости чертежа на разстояніи r. Понятно, что проще принять для такихъ двухъ плоскостей единичныя разстоянія то есть взять $r=1$. Искомые два круга есть круги, имѣющіе данныя точки своими центрами, а главный кругъ проекціи (съ единичнымъ радіусомъ) верхняя — своимъ вещественнымъ, нижняя—своимъ мнимымъ ортогональнымъ кругомъ.

Пусть напримѣръ данная произвольная прямая пересѣкаетъ верхнюю плоскость въ точкѣ a, а нижнюю плоскость въ точкѣ b; главный кругъ есть кругъ O. Изъ фигуры 6 непосредственно видны по-

---

1) Точка k предполагается на плоскости выше чертежа (верхней), проектирующейся на плоскости чертежа въ точкѣ a; проведеніе же касательныхъ предполагается въ плоскости чертежа.

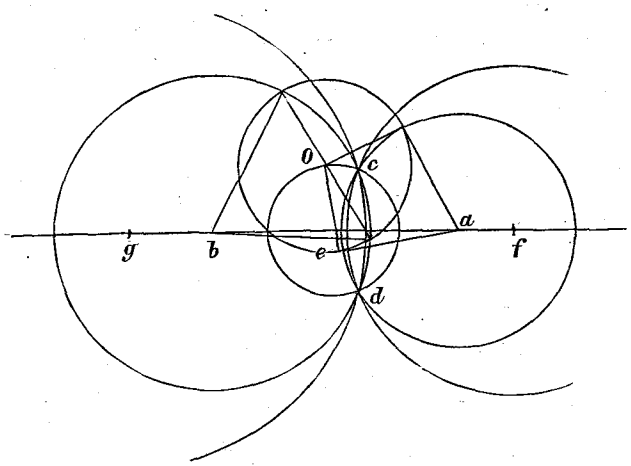
2) Н. Г., IV, 26.

1) Н. Г. IV, 26.

2) Н. Г., IV, 10.

строенія круговъ, коррелятивныхъ этимъ точкамъ. Эти два круга опредѣляютъ прииу круговъ, пересѣкающихся въ двухъ постоянныхъ точкахъ c и d.

Фиг. 6.



Если раздѣлимъ отрѣзокъ ab пополамъ въ точкѣ e, то ясно, что e есть точка въ самой плоскости чертежа, а потому ей коррелятивенъ кругъ, проходящей чрезъ центръ O; а такъ какъ этотъ кругъ принадлежитъ примѣ круговъ a и b, то онъ долженъ пройти и чрезъ точки c и d.

Мы видимъ, что весьма просто опредѣлить, относится ли данная точка въ пространствѣ къ данной прямой или нѣтъ, потому что для этого достаточно убѣдиться, принадлежитъ ли коррелятивный ей кругъ къ данной прямой (примѣ) круговъ или нѣтъ. Напримѣръ, ясно, что къ той же прямой относится точка f, если изображающій ее кругъ проходитъ чрезъ точки c и d; къ ней же, при соблюденіи того же условія относится и точка g. Въ частности, первая точка находится выше верхней плоскости, потому что центръ соотвѣтственнаго круга болѣе удаленъ отъ точки e, чѣмъ точка a, а точка g лежитъ ниже нижней плоскости потому что g также болѣе удалена отъ e, чѣмъ точка b; а что первая точка вообще находится въ верхней, а вторая въ нижней половинѣ пространства (считая эти половины раздѣляемыми плоскостью чертежа), видно изъ того, что центръ O находится внѣ перваго и внутри второго круга. Само превышеніе въ первомъ случаѣ и пониженіе во второмъ непосредственно дается отношеніями $\frac{ef}{ea}$ и $\frac{eg}{eb}$. Благодаря этому, изображеніе точекъ кругами получаетъ извѣстную наглядность, если только на прямой мы имѣемъ точки пересѣченія ея съ верхнею и нижнею единичными плоскостями, или точку пересѣченія ея съ плоскостью чертежа и одной изъ упомянутыхъ плоскостей.

Если же данъ одинъ кругъ, то хотя и наглядно виденъ центръ, представляющій коррелятивную точку, но опредѣленіе ея превышенія надъ плоскостью чертежа требуетъ болѣе или менѣе сложнаго построенія.

Слѣдующій пріемъ, основанный на изученіи расположенія въ системѣ точечныхъ круговъ, дѣлаетъ рѣшеніе вопроса довольно простымъ и наглядным.

Каждая вертикальная прямая изображается примою концентрическихъ круговъ, и въ этой примѣ имѣется одинъ, и только одинъ, точечный кругъ. Нужно для каждой такой прямой опредѣлить то превышеніе точки, которому въ изображеніи соотвѣтствуетъ этотъ точечный кругъ.

Когда мы рѣшимъ этотъ вопросъ мы найдемъ нѣкоторую поверхность, которая каждою вертикальною прямою пересѣкается въ одной единственной точкѣ. Поверхность эта есть конечно поверхность вращенія, такъ какъ вся система опредѣляется точечнымъ кругомъ въ плоскости чертежа и кругомъ точечныхъ круговъ (ортогональнымъ), соотвѣтственныя точки которыхъ находятся въ верхней единичной плоскости, параллельной плоскости чертежа, и для всѣхъ этихъ точекъ, перпендикуляръ, возставленный изъ первой точки къ плоскости чертежа, есть ось вращенія; слѣдовательно, эта ось есть ось вращенія и для всей системы, въ частности, и для поверхности, представляющей совокупность точечныхъ круговъ (точнѣе точекъ пространства, коррелятивныхъ этимъ точечнымъ кругамъ).

Кривая поверхность есть нетолько поверхность вращенія, но и поверхность второго порядка, потому что всякая прямая пересѣкаетъ ее въ двухъ точкахъ, и не болѣе. Это слѣдуетъ изъ того, что всякой такой прямой коррелятивна прима круговъ, а въ таковой не можетъ быть больше двухъ точечныхъ круговъ.

Въ частности, перпендикуляры къ плоскости чертежа какъ упомянуто, пересѣкаютъ поверхность только въ одной точкѣ. Если возьмемъ разрѣзъ этой поверхности плоскостью чрезъ ось вращенія, то кривая второго порядка этого разрѣза не есть ни эллипсъ, ни гипербола, и слѣдовательно есть парабола. И въ такомъ случаѣ вертикальныя прямыя и есть ея діаметры.

Итакъ, искомая поверхность есть параболоидъ вращенія, имѣющій осью вращенія прямую общаго

направленія діаметровъ, проходящую чрезъ точечный кругъ на плоскости чертежа.

Для воспроизведенія параболы въ разрѣзѣ чрезъ ось вращенія мы можемъ употребить слѣдующій пріемъ.

Возьмемъ на одномъ изъ діаметровъ точку a, и примемъ, что она находится на верхней плоскости и что, слѣдовательно, она представляетъ основаніе перпендикуляра, опущеннаго отъ соотвѣтственной точки b пространства, а сама есть точечный кругъ, входящій въ составъ окружности главнаго круга. Противоположная точка b' на нижней плоскости проектируется въ точкѣ a' на плоскости чертежа и изображается кругомъ, имѣющимъ радіусомъ $a'F$; ясно, что прямыя aF и Fa' взаимно-перпендикулярны.

Такимъ образомъ на томъ же діаметрѣ мы можемъ взять рядъ точекъ, а изъ нихъ провести къ точкѣ F рядъ прямыхъ 1, 2, 3... и къ нимъ перпендикулярныхъ прямыхъ $1'$, $2'$, $3'$..., и точки пересѣченія этихъ прямыхъ съ прямою aa' есть центры круговъ, коимъ коррелятивцы точки на нижней плоскости, проектирующіяся соотвѣтственно перпендикулярными лучами $1_1'$, $2_1'$, $3_1'$... Эти точки коррелятивны кругамъ, имѣющимъ центры въ пересѣченіи прямыхъ $1'$, $2'$, $3'$... съ прямою aa' и проходящимъ чрезъ точку F; поэтому примы круговъ, коррелятивныхъ прямымъ $1''$, $2''$, $3''$... опредѣляются, каждая, кругомъ проходящимъ чрезъ F и точечнымъ кругомъ O, на общей общей хордѣ OF—полярѣ начальныхъ точекъ на радіусѣ Oa.

Слѣдовательно, соотвѣтственныя точки пересѣченія $1''$ съ $1'''$, $2''$ съ $2'''$, $3''$ съ $3'''$ и т. д. и есть искомые точечные круги то есть точки искомой параболы.

Что полученная такимъ образомъ кривая есть кривая второго порядка и при томъ именно парабола, видно изъ гомологичности двухъ примъ лучей, изъ коихъ центръ одной есть точка O, а центръ другой точка на перпендикулярѣ OF, находящаяся въ безконечности, которой соотвѣтствуютъ параллельные лучи $1'''$, $2'''$, $3'''$..., перпендикулярные къ прямой aa'. Пересѣченіе гомологичныхъ лучей примы даетъ кривую второго порядка, а въ данной кривой имѣется всего одна безконечно-удаленная точка.

Если теперь пересѣчемъ эту параболу рядомъ равно отстоящихъ прямыхъ, параллельныхъ прямой aa', то получимъ рядъ точекъ кривой, которыя опредѣляютъ рядъ круговъ пересѣченія параболоида вращенія равно-отстоящими горизонтальными плоскостями, и эти круги есть ортогональные круги секундъ, коррелятивныхъ параллельнымъ плоскостямъ пространства.

Поэтому, если проведемъ на плоскости чертежа произвольный кругъ, то для того, чтобы опредѣлить коррелятивную ему точку, мы кромѣ ортогональной проекціи послѣдней (центръ круга) имѣемъ еще и ея превышеніе, если обратимъ вниманіе, какой изъ концентрическихъ круговъ пересѣкается даннымъ кругомъ прямоугольно (и тогда точка лежитъ выше плоскости чертежа) или пересѣкается имъ въ противоположныхъ точкахъ діаметра (и тогда точка лежитъ ниже плоскости чертежа). Напримѣръ кругъ, имѣющій центръ въ точкѣ c, пересѣкаетъ прямоугольно концентрическій кругъ, имѣющій діаметромъ отрѣзокъ aa' и слѣдовательно изображаетъ точку на верхней единичной плоскости.

Итакъ, выраженіемъ коррелятивности между точками пространства и кругами на плоскости служитъ опредѣленный *параболоидъ* (вращенія) *коррелятивности*.

Разсмотримъ ближе его замѣчательныя свойства.

Каждой плоскости, касательной къ параболоиду, коррелятивна секунда круговъ, имѣющая одинъ единственный точечный кругъ то есть совокупность круговъ, проходящихъ чрезъ эту точку.

Каждая плоскость пересѣкаетъ параболоидъ въ нѣкоторомъ эллипсѣ (въ предѣльномъ случаѣ парабола), точкамъ котораго коррелятивны точечные круги нѣкоторой линейной секунды, а таковымъ можетъ быть лишь ортогональный кругъ. Слѣдовательно, эллипсъ сѣченія проектируется въ точечномъ кругѣ коррелятивной секунды. Поэтому всѣмъ вообще плоскостямъ, пересѣкающимъ параболоидъ, коррелятивны линейныя секунды, обладающія вещественнымъ ортогональнымъ кругомъ. И наоборотъ, всѣмъ плоскостямъ, не пересѣкающимъ параболоидъ, коррелятивны секунды съ мнимымъ ортогональнымъ кругомъ.

Возьмемъ въ пространствѣ произвольную точку a и опредѣлимъ полярную плоскость A по отношенію къ параболоиду. Эта плоскость пересѣчетъ параболоидъ въ эллипсѣ E, который проектируется въ кругѣ K на плоскости чертежа. Совокупности всѣхъ касательныхъ плоскостей, проведенныхъ изъ a къ параболоиду, коррелятивны всѣ секунды круговъ, проходящихъ чрезъ точки круга K, и такъ какъ всѣ касательныя плоскости имѣютъ всего одну общую точку (центръ секунды) a, то и тотъ единственный кругъ K, который общъ всѣмъ коррелятивнымъ секундамъ круговъ, есть кругъ, коррелятивный точкѣ a. И какъ точка a есть полюсъ плоскости, проходящей чрезъ эллипсъ E, мы могли бы

назвать кругъ K полюсомъ секунды для которой этотъ кругъ есть вещественный ортогональный.

Это даетъ другой способъ опредѣленія коррелятивной точки по данному кругу на плоскости чертежа, и обратно, нахожденія коррелятивнаго круга по данной точкѣ, если въ вертикальномъ разрѣзѣ черезъ ось вращенія вычерчена парабола: нужно чрезъ данную точку провести двѣ касательныя къ параболѣ, и тогда ортогональныя проекціи двухъ точекъ касанія есть концы діаметра искомаго коррелятивнаго круга.

Если даны три плоскости, пересѣкающія параболоидъ, то съ одной стороны ими опредѣляется точка пересѣченія, а съ другой три полюса этихъ плоскостей по отношенію къ параболоиду; плоскость, опредѣляемая этими тремя полюсами, есть полярная по отношенію къ точкѣ пересѣченія, какъ полюсу. При этомъ различаемъ два случая: 1) данныя плоскости пересѣкаются въ точкѣ, находящейся внутри и 2) онѣ пересѣкаются въ точкѣ внѣ параболоида.

Для послѣдняго случая мы по предъидущему легко находимъ коррелятивный кругъ. Но онъ есть нетолько ортогональная проекція эллипса, составленная изъ точекъ касанія плоскостей, проведенныхъ изъ точки пересѣченія, но также есть кругъ, прямоугольно пересѣкающій три ортогональные круга секундъ, коррелятивныхъ даннымъ плоскостямъ (центръ этого круга есть радикальный центръ трехъ другихъ).

Въ первомъ же случаѣ мы уже не имѣемъ точекъ касанія, и данныя три плоскости дадутъ три пересѣкающіеся ортогональные круга; а радикальный центръ въ этомъ случаѣ будетъ центромъ не вещественнаго, а мнимаго ортогональнаго круга.

Понятно, что поверхность параболоида какъ геометрическое мѣсто точекъ, коррелятивныхъ точечнымъ кругамъ, есть поверхность, раздѣляющая пространство на двѣ части: всѣмъ точкамъ внѣ параболоида коррелятивны вещественные, а всѣмъ точкамъ внутри параболоида коррелятивны мнимые круги. Всѣмъ сказаннымъ строго опредѣляется геометрическій смыслъ мнимости круговъ.

Итакъ, если въ системѣ данъ кругъ, то онъ можетъ быть вещественнымъ или мнимымъ. Въ первомъ случаѣ онъ коррелятивенъ точкѣ внѣ, во второмъ внутри параболоида, хотя обѣ точки находятся на одной вертикали изъ ея центра. Вообще всѣмъ точкамъ этой вертикали коррелятивны концентрическіе круги, начиная отъ вещественныхъ безконечно большого діаметра для безконечно-удаленныхъ точекъ вертикали, проходя чрезъ всѣ другіе, вещественные, круги, коррелятивные точкамъ внѣ параболоида, точечный кругъ, коррелятивный точкѣ на поверхности самого параболоида, за которой внутрь параболоида идутъ точки, коррелятивныя концентрическимъ же, но уже мнимымъ кругамъ.

Съ другой стороны на тотъ же кругъ, вещественный или мнимый, мы можемъ смотрѣть какъ на ортогональный кругъ линейной секунды, которой коррелятивна нѣкоторая плоскость.

Если кругъ вещественный, то коррелятивная плоскость есть полярная по отношенію къ внѣшней точкѣ параболоида какъ полюсу, и потому искомая плоскость есть плоскость того эллипса сѣченія параболоида, который ортогонально проектируется въ данномъ кругѣ, и тогда точки круга есть ортогональныя проекціи точекъ касанія плоскостей, проведенныхъ изъ внѣшней точки къ параболоиду.

Если кругъ мнимый, то коррелятивная плоскость есть полярная по отношенію къ внутренней точкѣ параболоида какъ полюсу, и потому искомая плоскость есть плоскость, параллельная же первой (одному и тому же діаметру параболоида сопряжены параллельныя плоскости), но проходящая не чрезъ внутреннюю, а чрезъ внѣшнюю точку, и никакихъ общихъ точекъ эта плоскость съ поверхностью параболоида не имѣетъ, что и понятно, такъ какъ всѣ круги этой секунды проходятъ чрезъ концы діаметра мнимаго круга, и потому въ ней вообще не имѣется точечныхъ круговъ.

Замѣтимъ еще, что на основаніи теоріи полюсовъ и поляръ, всякій діаметръ кривой второго порядка, дѣлится точками пересѣченія съ самою кривою, равно какъ полюсомъ и полярою въ парахъ сопряженныхъ гармоническихъ точекъ. А такъ какъ въ данномъ случаѣ каждая вертикаль пересѣкаетъ параболоидъ въ точкѣ, коррелятивной точечному кругу и въ другой точкѣ, безконечно-удаленной, то значитъ разстоянія внѣшней и внутренней точекъ отъ точки самого параболоида, равны между собою.

Если прима круговъ задана однимъ вещественнымъ и однимъ мнимымъ кругомъ, то нужно найти кругъ, прямоугольно пересѣкающій первый и проходящій чрезъ концы діаметра второго; если она задана двумя мнимыми кругами, то нужно найти кругъ, проходящій чрезъ концы діаметровъ обоихъ круговъ. Въ обоихъ случаяхъ полученный кругъ есть вещественный ортогональный кругъ для всѣхъ круговъ примы.

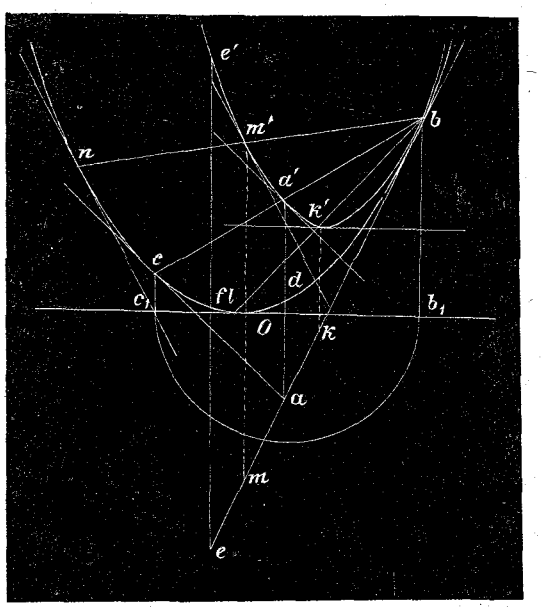
Итакъ, параболоидъ проективности раздѣляетъ все пространство на двѣ равныя части: точки одной представлены вещественными, точки другой мнимыми кругами.

Мы можемъ условно отмѣчать мнимые круги какъ вещественные, и тогда одинъ и тотъ же кругъ,

смотря по тому, принимается ли онъ за вещественный или мнимый, выразитъ двѣ точки на одной вертикали, и эти точки будутъ гомологичными по отношенію къ параболоиду проективности, то есть средина между ними есть точка, принадлежащая самому параболоиду.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ нѣкоторую произвольную точку a внѣ параболоида и проведемъ изъ нея въ какой-нибудь вертикальной плоскости двѣ касательныя ab и ac къ параболѣ сѣченія (фиг. 7). Пусть b и c двѣ точки касанія, а b_1 и c_1 основанія опущенныхъ изъ нихъ перпендикуляровъ на плоскость чертежа.

Фиг. 7.



Прямой bc коррелятивна прямая круговъ, имѣющая точечными кругами b_1 и c_1, и значитъ кругъ, имѣющій діаметромъ $b_1 c_1$, пересѣкаетъ прямоугольно всѣ круги этой прямой (примы). Этотъ кругъ, имѣющій центромъ O, есть ортогональный кругъ плоскости (секунды) круговъ, коррелятивной той плоскости, которая ортогонально проектируется прямою bc. *Поэтому средняя точка между b и c и есть* точка, коррелятивная этому кругу какъ мнимому. Съ другой стороны этотъ кругъ, какъ вещественный, есть кругъ пересѣченія двухъ примъ, имѣющихъ точки b_1 и c_1 своими точечными ортогональными кругами, а этимъ двумъ примамъ коррелятивны касательныя прямыя ba и ca, пересѣкающіяся въ точкѣ a. Итакъ, точкѣ a коррелятивенъ тотъ же кругъ, какъ вещественный. Слѣдовательно, точки O, a и a' находятся на одной вертикали, проходящей посреди̇нѣ между вертикалями bb_1 и cc_1.

Прямая bc есть поляра точки a по отношенію къ параболѣ сѣченія, и значитъ a и a' есть одна пара гармонически сопряженныхъ точекъ, другая пара которыхъ на той же вертикали есть точка d параболы и точка безконечно-удаленная, откуда слѣдуетъ что $ad = da'$.

Вообще, если проведемъ къ параболоиду проективности касательную плоскость, напримѣръ въ точкѣ b, коррелятивная ей секунда круговъ есть секунда, имѣющая точку b_1 своимъ точечнымъ ортогональнымъ кругомъ. Это слѣдуетъ изъ того, что это есть единственная плоскость въ пространствѣ, имѣющая съ параболоидомъ единственную общую точку b, которой коррелятивенъ точечный кругъ.

Какъ изъ точки a легко выводимъ гомологичную ей (по отношенію къ параболоиду проективности) точку a', такъ для каждой точки e легко найдемъ гомологичную ей точку e', отложивъ на вертикали $ef = fe'$, гдѣ f точка на параболоидѣ. Такимъ образомъ найдемъ поверхность, во всѣхъ своихъ точкахъ гомологичную касательной плоскости.

Чтобы наглядне̇е и проще вывести свойства этой поверхности, разсмотримъ какое-нибудь вертикальное сѣченіе чрезъ точку b касанія.

Въ этомъ разрѣзѣ плоскость будетъ представлена прямою ab, а гомологичною ей линейною примою является парабола, подобная параболѣ проективности съ отношеніемъ подобія $\frac{1}{2}$ и центромъ прямого подобія въ точкѣ касанія b.

Въ самомъ дѣлѣ, мы только-что видѣли, что точка a' искомаго геометрическаго мѣста находится на лучѣ bc, проходящемъ изъ точки b и притомъ посреди̇нѣ отрѣзка bc. Такъ какъ лучъ взятъ совершенно произвольно, то то же имѣетъ мѣсто и для всѣхъ лучей примы b, что и служитъ доказательствомъ приведенной теоремы.

Въ силу подобія касательныя въ соотвѣтственныхъ точкахъ обѣихъ параболъ напримѣръ точкахъ m' и n, a' и c, k' и l параллельны между собою.

Отсюда слѣдуетъ, что если дана одна произвольная точка a прямой be, гдѣ b точка касанія, то какъ двѣ точки b и e однозначно опредѣляютъ прямую, такъ двѣ гомологичныя точки b и a' однозначно опредѣляютъ гомологичную параболу.

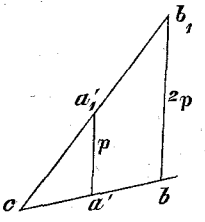
Для искомой параболы мы имѣемъ въ сущности пять данныхъ: точка b и касательная въ ней (общая для обѣихъ параболъ), точка a' и касательная въ ней (параллельная касательной въ точкѣ c) и еще то условіе, что эта парабола проходитъ чрезъ

безконечно-удаленную точку на вертикали, такъ какъ для параболы (и для всего параболоида) эта точка является центромъ, гомологичнымъ всѣмъ вообще безконечно-удаленнымъ точкамъ другой системы.

Получивъ этотъ результатъ для произвольнаго вертикальнаго сѣченія, мы имѣемъ то же и для всѣхъ остальныхъ сѣченій вертикальными плоскостями, и потому заключаемъ, что всѣмъ вообще точкамъ плоскости, касательной къ параболоиду проективности въ какой-нибудь точкѣ, гомологичны точки параболоида же вращенія, подобнаго параболоиду проективности съ отношеніемъ подобія $^1/_2$ и имѣющему центромъ прямого подобія въ точкѣ касанія b.

Но если отъ плоскости, представленной въ прямомъ разрѣзѣ прямою ab, мы перейдемъ къ какой угодно другой параллельной ей плоскости, то это выражаетъ лишь, что всѣ точки этой плоскости мы передвигаемъ по вертикали въ одномъ направленіи на одну и ту же величину p поступанія. Вслѣдствіе этого гомологичныя точки передвигаются по вертикали же, но въ противоположномъ направленіи на ту же величину p. Другими словами, всѣмъ параллельнымъ плоскостямъ гомологиченъ одинъ и тотъ же параболоидъ вращенія, но въ разныхъ положеніяхъ, выводящихся одно изъ другого простымъ поступаніемъ по вертикали. Отъ этого центръ подобія перемѣщается по той же вертикали и въ томъ же направленіи, что и половинный параболоидъ, но на вдвое большую величину.

Фиг. 8.

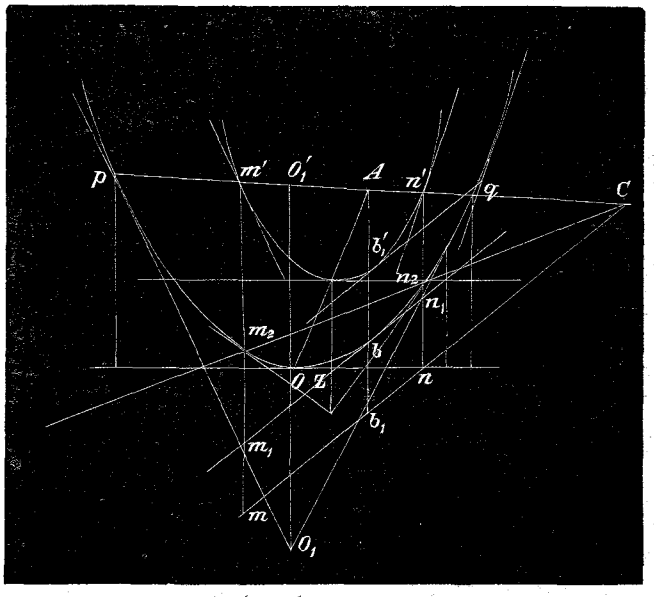


Въ самомъ дѣлѣ (фиг. 8), если b бывшій центръ подобія, а точки c и a' подобныя точки системъ, и изъ нихъ поступанію подвергается только одна система, приводящая точку a' въ новое положеніе a_1' съ сохраненіемъ точекъ c другой системы на мѣстѣ, то ясно, что при новомъ относительномъ положеніи системъ, центръ подобія долженъ находиться на прямой ca_1' и отрѣзокъ cb_1 вдвое больше отрѣзка ca_1', и значитъ, если система подверглась поступанію на величину p, то центръ подобія въ томъ же направленіи перемѣстился на величину $2p$.

Отсюда заключаемъ, что всякой вообще плоскости гомологиченъ половинный параболоидъ вращенія съ тѣмъ же направленіемъ діаметровъ по вертикали, что и для параболоида проективности, а центръ прямого подобія есть точка вдвое болѣе удаленная, чѣмъ полюсъ данной плоскости по отношенію къ параболоиду проективности.

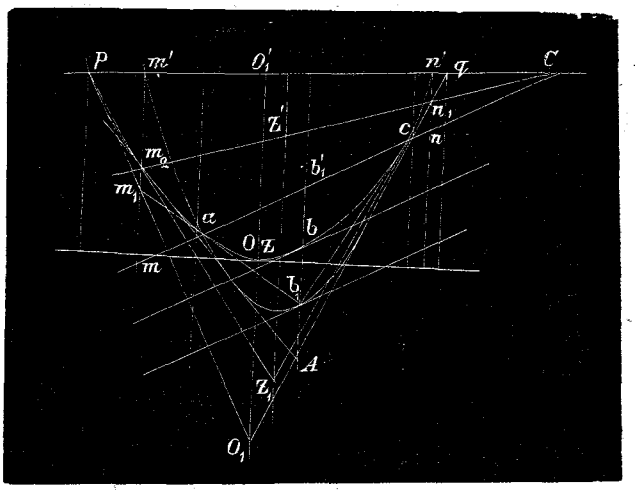
Для поясненія этихъ отношеній и приведены фиг. 9 и 10, гдѣ чрезъ точку b_1 (b_1') проведены про-

Фиг. 9.



извольныя прямыя (на фиг. 9 не имѣющая съ параболоидомъ общихъ точекъ, на фиг. 10 пересѣкающая его въ точкахъ a и c), а точкою b отмѣчена точка касанія параллельной прямой. Отсюда полюсъ

Фиг. 10.



данной прямой есть точка b_1' (b_1), въ то же время и точка касанія параллельной прямой къ гомологичной данной прямой половинной параболѣ, причемъ $b_1b = bb_1'$, и наконецъ, точка A на той же вертикали есть центръ прямого подобія обѣихъ параболъ, причемъ $Ab_1' = b_1'b$ (или $Ab_1 = b_1b$).

Если принять во вниманіе, что одинъ и тотъ же кругъ выражаетъ (коррелятивно) двѣ различныя точки на одной и той же вертикали, смотря по тому, принимаемъ ли его за вещественный или мнимый, станетъ ясно, что всѣ тѣ мнимые круги примы, коихъ центры есть точки въ предѣлахъ отрѣзка ac данной прямой, примемъ за дѣйствительные, то они выразятъ точки той самой половиной параболы, которая пересѣкаетъ параболу проективности въ точкахъ a и c фиг. 10, и всѣ остальныя точки той же параболы коррелятивны кругамъ той же линейной примы, если мы ихъ примемъ за мнимые.

Также, если всѣ круги линейной примы, коррелятивной данной прямой на фиг. 9, проходящей чрезъ точку b_1, примемъ за круги мнимые, то они выразятъ (коррелятивны) точки половинной параболы, проходящей чрезъ точку b_1'.

Обобщая на плоскость, можемъ сказать, что если замѣнимъ всѣ круги линейной секунды, коррелятивной данной плоскости, мнимыми, то эта линейная секунда мнимыхъ круговъ коррелятивна половинному параболоиду, гомологичному во всѣхъ своихъ точкахъ данной плоскости и обратно, если въ секундѣ имѣются мнимые круги, то ихъ нужно замѣнить вещественными.

Итакъ, параболоидъ проективности есть поверхность, раздѣляющая все пространство на двѣ равныя части, а точкамъ одной части гомологичны точки другой части, выводящіяся изъ первыхъ весьма простымъ построеніемъ: проведеніемъ чрезъ данную точку вертикали и отложеніемъ на ней такой другой точки, чтобы средина между обѣими принадлежала параболоиду. Обѣимъ гомологичнымъ точкамъ коррелятивенъ одинъ и тотъ же кругъ, но для первой части пространства этотъ кругъ вещественъ, а для второй долженъ быть принятъ мнимымъ. Поэтому, если введемъ условное обозначеніе для отличенія вещественнаго круга отъ мнимаго (напр. изобразимъ ихъ разными красками), то этимъ вполнѣ опредѣленно отмѣтится точка въ пространствѣ.

Всякой прямой гомологична половинная парабола; всякой плоскости гомологиченъ половинный параболоидъ; и если имѣемъ линейную приму или секунду круговъ, то онѣ изображаютъ: первая — прямую или параболу, вторая — плоскость или половинный параболоидъ, смотря потому, какіе изъ круговъ этой примы или секунды будутъ приняты за вещественные и какіе за мнимые. Въ частности, если всѣ круги вещественные, то линейная прима выразитъ (коррелятивно) прямую, не имѣющую съ параболоидомъ проективности общихъ точекъ; если всѣ круги мнимые, то прима выразитъ половинную параболу, не пересѣкающую параболоидъ проективности.

Если возьмемъ произвольно въ пространствѣ кругъ, то ему окажется коррелятивною конечно квадратичная прима круговъ, но въ общемъ случаѣ это не будетъ циклъ круговъ, что видно хотя бы изъ слѣдующаго.

Пересѣчемъ параболоидъ проективности произвольною косою плоскостью. Въ сѣченіи съ параболоидомъ она даетъ кривую второго порядка, ортогональная проекція которой на плоскости чертежа есть кругъ, а именно ортогональный кругъ секунды круговъ, коррелятивной данной плоскости. Слѣдовательно эта кривая второго порядка есть эллипсъ; ей однако коррелятивенъ именно циклъ точечныхъ круговъ, такъ какъ по тремъ изъ нихъ однозначно опредѣляется весь циклъ.

Вообще можемъ сказать, что цикламъ точечныхъ круговъ коррелятивны эллипсы плоскихъ сѣченій параболоида проективности, ортогонально проектирующіеся въ этихъ циклахъ.

Тѣмъ менѣе можно допустить, что шару въ пространствѣ коррелятивна сфера круговъ то есть такая квадратичная секунда, которая однозначно опредѣляется четырьмя произвольно данными кругами.

Но если циклу круговъ, а тѣмъ менѣе сферѣ круговъ въ общемъ случаѣ коррелятивны не кругъ и не шаръ точекъ пространства, то этотъ отрицательный результатъ отнюдь не исключаетъ реальнаго и строго обусловленнаго опредѣленія понятій „циклъ круговъ“ и „сфера круговъ“. Напротивъ того, въ Новой Геометріи эти понятія имѣютъ вполнѣ строгія опредѣленія. Циклъ круговъ есть такая ихъ совокупность, которая однозначно опредѣляется прозвольно взятыми ея тремя кругами, и какіе бы три круга мы изъ нея ни взяли для ея построенія, всегда получимъ изъ нея одну и ту же совокупность. То же опредѣленіе распространяется и на сферу круговъ съ замѣною числа три числомъ четыре.

Начнемъ съ разсмотрѣнія цикла круговъ.

Если даны три круга, то вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣляются и три точки въ пространствѣ, которыя ортогонально проектируются въ трехъ центрахъ K_1, K_2, K_3 данныхъ круговъ. Но этими тремя точками однозначно опредѣляется плоскость E и ей

томологичный половинный параболоидъ P. Означимъ эти точки соотвѣтственно k_1, k_2, k_3, а гомологичныя имъ точки k_1', k_2', k_3'.

Ясно, что три послѣднія находятся на параболоидѣ P. Но вмѣстѣ съ тѣмъ и чрезъ нихъ можно провести одну опредѣленную плоскость E_1; этой плоскости гомологиченъ половинный параболоидъ P', и на его поверхности находятся данныя три точки k_1, k_2, k_3 именно потому, что P' гомологиченъ плоскости E'.

Итакъ, исходя изъ трехъ данныхъ круговъ и коррелятивныхъ имъ точекъ, мы однозначно получили кривую пересѣченія E и P', которая проходитъ чрезъ эти точки; слѣдовательно эта кривая однозначно опредѣляется ими, и какія бы три точки мы ни взяли на этой кривой всегда тѣмъ же общимъ построеніемъ получили бы ту же самую кривую и коррелятивную ей квадратичную приму круговъ.

Согласно общему опредѣленію мы должны считать эту приму цикломъ то есть называть ее *цикломъ круговъ*. Коррелятивную ей плоскую кривую въ пространствѣ мы назовемъ поэтому *циклическою кривою*.

Мы видѣли, что всякой плоскости гомологиченъ опредѣленный половинный параболоидъ. И обратно, всякому половинному параболоиду то есть поверхности, выводящейся изъ параболоида проективности и нѣкоторой произвольной точки какъ центра прямого подобія (при отношеніи подобія равномъ половинѣ) гомологична опредѣленная плоскость. Для доказательства пришлось бы повторить построенія, приведенныя свыше (фиг. 9 и 10) въ обратномъ порядкѣ.

Теперь докажемъ, что всякое плоское сѣченіе такой поверхности есть циклическая кривая. Это слѣдуетъ изъ того, что плоскости этого сѣченія гомологиченъ опредѣленный половинный параболоидъ, а половинному параболоиду опредѣленная плоскость; значитъ всѣмъ точкамъ даннаго сѣченія, изъ коихъ произвольно можемъ выбрать три точки k_1, k_2, k_3, гомологичны точки второго сѣченія, и въ частности точкамъ k_1, k_2, k_3 гомологичны точки k_1', k_2', k_3' на тѣхъ же вертикаляхъ.

Такъ какъ, по опредѣленію, половинные параболоиды подобны параболоиду проективности, то и всѣ ихъ плоскія сѣченія подобны плоскимъ сѣченіямъ послѣдняго то есть представляютъ эллипсы и спеціально для вертикальныхъ сѣченій параболы. Эти сѣченія, какъ сказано, и есть циклическія кривыя. Притомъ, какъ и для параболоида проективности, онѣ ортогонально проектируются въ видѣ круговъ (въ частности для вертикальныхъ сѣченій въ видѣ круговъ безконечно-большого діаметра то есть прямыхъ).

Въ данныхъ кругахъ кроется однако неопредѣленность, потому что каждый изъ нихъ мы можемъ принять или за кругъ вещественный, или за кругъ мнимый. Для устраненія неопредѣленности это должно быть оговорено или отмѣчено.

Если бы это не было указано, то мы получили бы четыре существенно различные случая, принявъ во вниманіе, что для круговыхъ совокупностей играетъ роль не абсолютное значеніе разряда каждаго круга, а лишь различіе разрядовъ разныхъ данныхъ круговъ.

Такъ къ первому случаю мы можемъ отнести тотъ, когда всѣ данные круги вещественны, или всѣ три круга мнимы. Хотя по существу эти два допущенія и различны, и различіе проявляется даже въ различіи положенія плоскостей, коимъ принадлежатъ коррелятивныя циклическія кривыя, но обѣ циклическія кривыя ортогонально проектируются однимъ и тѣмъ же кругомъ, вещественнымъ или мнимымъ, а коррелятивные циклы круговъ изобразятся одною и тою же совокупностью круговъ, въ которой или всѣ вещественны или всѣ мнимы.

Ко второму случаю можно отнести тотъ, когда два круга K_2 и K_3 вещественны, а кругъ K_1 мнимый, или обратно, первые два круга мнимы, а послѣдній вещественъ. Въ коррелятивной циклической кривой мы найдемъ, что одни точки ея находятся въ первой, а другія во второй части пространства; изъ непрерывности кривой слѣдуетъ, что въ совокупности должны находиться и точки на поверхности параболоида проективности, проектирующіяся точечными кругами.

Ясно, что такихъ точекъ можетъ быть только двѣ; онѣ проектируются двумя точками пересѣченія двухъ круговъ, изъ которыхъ одинъ есть проекція эллипса сѣченія параболоида проективности данною плоскостью, а другой есть проекція самой циклической кривой.

Итакъ, при тѣхъ же данныхъ кругахъ въ совокупность цикла круговъ теперь необходимо войдутъ два точечные круга.

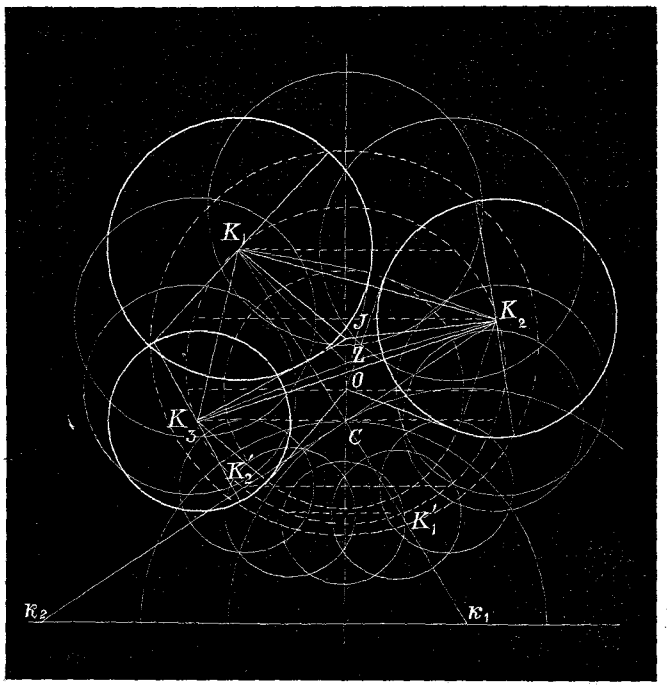
Наконецъ къ третьему случаю приходится отнести тотъ, когда разрядъ круговъ K_3 и K_1 отличается отъ разряда круга K_2, а къ четвертому тотъ, когда разрядъ круговъ K_1 и K_2 отличается отъ разряда круга K_3.

Во второмъ случаѣ точечные круги находятся въ составѣ частей совокупности между K_1 и K_2, и K_1 и K_3. Въ третьемъ случаѣ это имѣетъ мѣсто

между K_2 и K_3, и K_2 и K_1; въ четвертомъ случаѣ это имѣетъ мѣсто между K_3 и K_1, и K_3 и K_2.

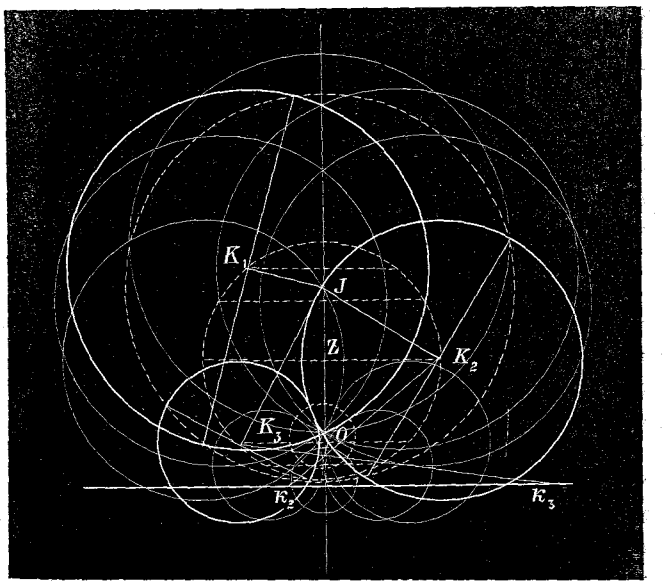
Впрочемъ, нужно оговорить, что вообще точечные круги могутъ встрѣтиться и въ совокупностяхъ перваго случая, но тогда непремѣнно оба должны находиться въ одномъ изъ промежутковъ K_2K_3, K_3K_1, K_1K_2; если напр. два точечные круга встрѣтятся въ промежуткѣ K_1K_2, то во всей части совокупности между K_2 и K_3, и далѣе между K_2 и K_1 не можетъ быть ни одного точечнаго круга. Именно въ этомъ случаѣ можетъ выдѣлиться и тотъ совершенно частный подслучай, когда оба точечные круга сливаются въ одинъ, и тогда циклическая кривая соприкасается къ параболоиду проективности.

Фиг. 11.



Всякому данному кругу коррелятивна точка, представляющая полюсъ нѣкоторой данной плоскости, и она проектируется въ центрѣ этого круга, а самъ кругъ есть ортогональный кругъ, вещественный или мнимый, полярной плоскости (вещественный, если плоскость пересѣкаетъ параболоидъ проективности, и тогда данный кругъ есть проекція эллипса пересѣченія, мнимый, если плоскость не пересѣкаетъ параболоида, и тогда кругъ есть мнимый ортогональный кругъ). Такъ какъ циклическая кривая проектируется въ кругѣ, то значитъ во всѣхъ четырехъ случаяхъ геометрическое мѣсто центровъ круговъ цикла есть кругъ. На фигурахъ 11-й и 12-й (отвѣчающихъ первому случаю) и 13-й (отвѣчающей четвертому случаю) центръ этого круга отмѣченъ буквою Z.

Фиг. 12.



Возвратимся къ фиг. 10. На ней проведена сѣкущая ac и гомологичная ей половинная парабола, причемъ центромъ прямого подобія служитъ точка A.

Возьмемъ на прямой ac двѣ произвольныя точки m и n; имъ гомологичныя точки m' и n' будутъ находиться на половинной параболѣ. Проведемъ прямую $m'n'$ и найдемъ точки пересѣченія этой прямой съ параболой проективности въ точкахъ p и q.

Изъ p и q проведемъ къ параболѣ двѣ касательныя pO_1 и qO_1; онѣ пересѣкутся въ точкѣ O_1, которая есть полюсъ прямой pq, а гомологичная точка O'_1, есть средина отрѣзка pq. Если мы представимъ pq какъ слѣдъ сѣкущей плоскости, а плоскость чертежа проходящею чрезъ ось вращенія параболоида проективности, то точка O'_1, будетъ центръ эллипса сѣченія.

Также касательныя ab_1 и cb_1 въ точкахъ a и c къ параболѣ проективности пересѣкутся въ точкѣ b_1, которая есть полюсъ прямой ac, а гомологичная ей точка b'_1 есть средина отрѣзка ac.

Пара касательныхъ pO_1 и ab_1 пересѣкутся въ точкѣ m_1, которая есть полюсъ сѣкущей ap, а каса-

тельныя qO_1 и cb_1 пересѣкутся въ точкѣ n_1, которая есть полюсъ сѣкущей cq.

Такимъ образомъ мы получаемъ три группы равноотстоящихъ вертикалей по три въ каждой, а именно вертикали чрезъ p и чрезъ q и посединѣ вертикаль $O_1\,O_1'$, вертикали чрезъ a и чрезъ c, а посединѣ вертикаль b_1b_1'. Посединѣ между вертикалями чрезъ p и чрезъ a вертикаль чрезъ m, и посединѣ между вертикалями чрезъ q и чрезъ c вертикаль чрезъ n_1. Пусть вертикали чрезъ m_1 и n_1 пересѣкаютъ параболу въ точкахъ m_2 и n_2; если проведемъ прямую m_2n_2, то вертикаль чрезъ ея полюсъ Z_1 пройдетъ посединѣ вертикалей чрезъ O_1 и b_1.

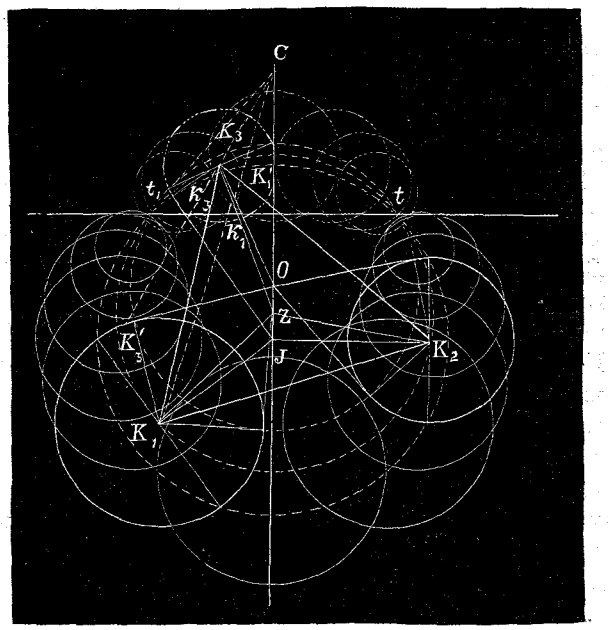
Прямыя pq и ac пересѣкутся въ точкѣ C; если чрезъ ту же точку C проведемъ прямую, точки которой дѣлятъ пополамъ вертикальные отрѣзки, опредѣляемые двумя предъидущими прямыми, то эта прямая пройдетъ чрезъ двѣ точки параболы проективности именно на тѣхъ двухъ вертикаляхъ, которыя проходятъ и чрезъ точки циклической кривой то есть точки m_1 и n_1; и такъ какъ эти двѣ вертикали проходятъ чрезъ точки циклической кривой, то онѣ же пройдутъ и чрезъ точки пересѣченія m' и n' прямой pq съ половинною параболою, гомологичною прямой ac (также какъ точки m и n есть точки пересѣченія прямой ac съ половинною параболою, гомологичною прямой pq).

Если перейдемъ къ пространственному представленію и примемъ плоскость чертежа проходящею чрезъ діаметрально-противоположныя точки круговъ, опредѣляемыя вертикалями чрезъ p и чрезъ q, а также вертикалями чрезъ a и чрезъ c, то вертикали чрезъ m и чрезъ n пройдутъ чрезъ діаметрально-противоположныя точки круга, образуемаго центрами цикла круговъ, и слѣдовательно точки O и b будутъ центрами двухъ первыхъ, а средняя точка между ними Z будетъ центромъ круга центровъ.

Отсюда слѣдуетъ, что кругъ центровъ и есть проекція эллипса сѣченія параболоида плоскостью m_2n_2, и значитъ, если въ точкахъ m_2 и n_2 проведемъ касательныя къ параболоиду, то получимъ Z_1 какъ полюсъ плоскости m_2n_2. Такъ какъ плоскости pq, m_2n_2 и ac пересѣкаются въ одной прямой, то полюсы O_1, Z_1 и b_1 находятся на одной прямой – взаимной полярѣ прямой C.

Если даны три круга, то, какъ мы видѣли, возникаютъ различные случаи, смотря потому, какіе изъ нихъ вещественные и какіе мнимые. Всѣмъ этимъ случаямъ соотвѣтствуютъ различныя положенія плоскостей, въ которыхъ находятся коррелятивныя точки. Въ частности, если круги, которымъ принадлежатъ центры на вертикаляхъ чрезъ m и чрезъ n всѣ вещественны или всѣ мнимы, то хотя циклъ круговъ въ обоихъ предположеніяхъ получится одинъ и тотъ же, но ортогональные круги, выражающіе положеніе соотвѣтственныхъ плоскостей, должны быть различны, а именно для вещественныхъ круговъ m и n вещественный же ортогональный кругъ имѣетъ діаметромъ основанія вертикалей чрезъ a и чрезъ c, а для мнимыхъ круговъ m' и n' вещественный ортогональный кругъ имѣетъ діаметромъ основанія вертикалей чрезъ p и чрезъ q. Слѣдовательно, первый кругъ O пересѣкаетъ всѣ круги совокупности прямоугольно; второй же кругъ I пересѣкаетъ тѣ же круги въ точкахъ діаметрально-противоположныхъ. Все это и усматривается на совокупности, изображенной на фиг. 11 и 12.

Фиг. 13.



Если же изъ трехъ данныхъ круговъ два K_1 и K_2 вещественны, а третій K_3 есть кругъ мнимый, то вещественный ортогональный кругъ O пересѣкаетъ всѣ вещественные круги прямоугольно, а мнимые круги въ діаметрально-противоположныхъ точкахъ. Если же K_1 и K_2 круги мнимые, а K_3 кругъ вещественный, то получимъ другой вещественный ортогональный кругъ I, который пересѣкаетъ кругъ K_3 прямоугольно, а круги K_1 и K_2 въ діаметрально-противоположныхъ точкахъ. Понятно, что въ этомъ случаѣ должны имѣться въ совокупности два точечные круга, и они отчетливо выдѣляются тѣмъ, что

чрезъ нихъ проходятъ всѣ три круга O, I и Z. Все это изображено на фиг. 13.

Въ обоихъ случаяхъ O, Z, I принадлежатъ одной примѣ круговъ. Въ случаѣ совокупности фиг. 13 это непосредственно очевидно, такъ какъ круги проходятъ чрезъ постоянныя двѣ точки t_1 и t_2, представляющіе точечные круги совокупности; и тогда ясно, что точки прямой t_1t_2 есть центры круговъ примы, для которой t_1 и t_2 два точечные круга, а потому всѣ круги этой примы пересѣкаютъ прямоугольно всѣ три круга O, Z и I (и вообще всѣ круги этой примы). Въ случаѣ совокупности (фиг. 11 и 12) всѣ эти круги O, Z и I есть ортогональные круги трехъ плоскостей, пересѣкающихся въ одной прямой; такъ какъ круги, соотвѣтствующіе точкамъ каждой изъ этихъ плоскостей пересѣкаютъ прямоугольно соотвѣтственные ортогональные круги, то значитъ круги, коррелятивные точкамъ прямой пересѣченія этихъ плоскостей, прямоугольно пересѣкаютъ всѣ три круга. Пусть радикальная ось этой примы (фиг. 11) есть прямая k_1k_2, а одинъ изъ точечныхъ круговъ C.

Въ такомъ случаѣ всѣ круги примы, имѣющей прямую k_1k_2 своею централью и проходящіе чрезъ C (а слѣдовательно и чрезъ другой точечный кругъ примы) пересѣкаютъ прямоугольно всѣ эти круги O, Z и I, и слѣдовательно эта прима и есть прима круговъ, коррелятивная прямой пересѣченія плоскостей.

Если чрезъ центръ K_1 какого либо изъ круговъ совокупности и точку C проведемъ прямую, которая пересѣчетъ централь упомянутой примы въ точкѣ k_1, то получимъ три круга, принадлежащіе одной примѣ, и изъ нихъ точечный кругъ C, есть полюсъ круговъ примы k_1k_2, кругъ K_1 одинъ изъ круговъ совокупности; поэтому четвертый гармоническій кругъ K_1' также долженъ принадлежать тому же циклу круговъ. Какъ извѣстно, четыре гармоническіе круга одной примы имѣютъ своими центрами четыре гармоническія точки на прямой. Поэтому рѣшеніе вопроса о нахожденіи по данному K и двумъ другимъ кругамъ C и k_1 четвертаго гармоническаго, приводится къ рѣшенію нахожденія четвертой гармонической точки по тремъ даннымъ на одной прямой. Найдя центръ, по принадлежности круга къ данной секундѣ, мы найдемъ и самъ кругъ.

Аналогично этому для совокупности фиг. 13 находимъ, что линейная прима круговъ t_1t_2 есть прима пересѣченія двухъ секундъ, къ которымъ могутъ быть отнесены ортогональные круги O и I. Она пересѣкаетъ циклъ круговъ въ двухъ точечныхъ кругахъ, а ея полюсъ есть кругъ, коего центръ C есть точка пересѣченія двухъ касательныхъ t_1C и t_2C къ кругу центровъ. Если соединимъ точку C съ центромъ одного изъ круговъ совокупности и примемъ во вниманіе точку пересѣченія прямой съ прямою t_1t_2, получимъ три точки, и четвертая гармоническая будетъ центромъ новаго круга совокупности. Такъ на прямой CK_3 по третьей точкѣ k_3 найдемъ центръ K_3' и на прямой CK_1 по третьей точкѣ K_1 найдемъ центръ K_1' круга совокупности; всякій разъ оба круга совокупности будутъ кругами разныхъ разрядовъ.

Итакъ, если даны произвольные три круга съ отмѣткою разряда каждаго изъ нихъ, то ими однозначно опредѣляются коррелятивныя имъ точки пространства, а этими тремя точками однозначно же опредѣляется циклическая кривая, коррелятивная опредѣляемому ими циклу круговъ. Послѣдняя есть пересѣченіе опредѣляемой точками плоскости и половиннаго параболоида, гомологичнаго плоскости, проходящей чрезъ три точки, гомологичныя даннымъ. Всякая циклическая кривая есть плоскій разрѣзъ нѣкотораго половиннаго параболоида то есть вообще эллипсъ, проектирующійся на плоскость чертежа въ видѣ круга или, въ случаѣ вертикальнаго сѣченія, половинная парабола, проектирующаяся на плоскости чертежа въ видѣ прямой то есть круга безконечно-большого діаметра. Отсюда видимъ, что если даны три точки въ вертикальной плоскости, то соотвѣтствующій циклъ круговъ есть совокупность, коррелятивная вертикальной половинной параболѣ то есть всѣ циклическія кривыя въ вертикальныхъ плоскостяхъ есть половинныя параболы.

Отсюда нетрудно заключить, что если отъ цикловъ круговъ мы перейдемъ къ *сферамъ круговъ*, коррелятивныя поверхности которыхъ мы назовемъ *сферическими*, то таковыя непремѣнно должны быть параболоидами съ вертикальными діаметрами. Нетрудно доказать, что онѣ должны быть параболоидами вращенія то есть поверхностями, подобными параболоиду проективности, хотя бы отношеніе подобія было и не половина, а какое-нибудь другое число.

Въ самомъ дѣлѣ, если пересѣчемъ сферическую поверхность горизонтальною плоскостью, то въ пересѣченіи получимъ циклическую кривую, которая и на плоскость чертежа проектируется въ видѣ круга. Слѣдовательно, всѣ горизонтальныя плоскія сѣченія сферическихъ поверхностей есть круги, что и требовалось доказать.

Но вообще отношеніе подобія не есть половина, потому что при этомъ отношеніи подобія мы получаемъ гомологичную ей плоскость то есть шаръ без-

конечно-большого діаметра, что составляетъ частный случай, и притомъ именно тотъ частный случай, когда поверхность опредѣляется не четырьмя, а только тремя точками.

Извѣстно, что парабола вообще опредѣляется четырьмя точками [1]), а если извѣстно направленіе ея діаметровъ, то для опредѣленія достаточно трехъ точекъ.

Пусть даны четыре произвольные круга K_1, K_2, K_3 и K_4 для опредѣленія сферы круговъ. Понятно, что должны быть отмѣчены разряды каждаго изъ этихъ круговъ. Этимъ однозначно опредѣляются четыре точки пространства k_1, k_2, k_3 и k_4.

Проведемъ чрезъ три изъ нихъ напр. k_1, k_2, k_3 циклическую кривую, а затѣмъ чрезъ точку k_4 вертикальную плоскость. Понятно, что изъ четырехъ, не находящихся въ одной плоскости точекъ мы всегда можемъ подобрать три такія, чтобы вертикальная плоскость, проходящая чрезъ четвертую точку пересѣкала циклическую кривую, опредѣляемую избранными точками. Эта вертикальная плоскость пересѣчетъ циклическую кривую (то есть эллипсъ) въ двухъ точкахъ, и такъ какъ въ этой же плоскости мы имѣемъ еще точку k_4, то этого какъ разъ необходимо и достаточно, чтобы провести параболу съ вертикальными діаметрами. Проводя чрезъ ту-же точку k_4 рядъ вертикальныхъ плоскостей, мы получимъ рядъ циклическихъ кривыхъ какъ сѣченій сферической поверхности.

Совокупность всѣхъ круговъ (квадратичная секунда), коррелятивныхъ точкамъ этой сферической поверхности, и будетъ искомая сфера круговъ, однозначно опредѣляемая четырьмя данными кругами.

Если для опредѣленія сферы круговъ даны четыре круга, и дана задача узнать, принадлежитъ ли поверхности этой сферы данный пятый кругъ K_5, то для рѣшенія ея мы можемъ поступить такъ.

Отъ круговъ перейдемъ къ коррелятивнымъ точкамъ пространства, опредѣлимъ сферическую поверхность, а вмѣстѣ съ тѣмъ и ось вращенія этого параболоида; около этой оси повернемъ точку k_5, пока не приведемъ ее въ одну вертикальную плоскость съ точкою k_4, и тогда останется только рѣшить, принадлежитъ ли эта точка параболѣ, проходящей чрезъ двѣ точки циклическаго эллипса $k_1k_2k_3$ и чрезъ точку k_4.

Такъ какъ всякая сферическая поверхность подобна параболоиду проективности, то ихъ существуетъ столько же, сколько выводится такихъ подобныхъ параболоидовъ. Таковыя же имѣются ступенью выше, чѣмъ точекъ въ пространствѣ, такъ какъ каждую точку въ пространствѣ можно принять за центръ прямого подобія и взять произвольное число за отношеніе подобія. Итакъ, такихъ поверхностей имѣется кварта, какъ и шаровъ въ пространствѣ.

Въ частности, если за отношеніе подобія примемъ единицу, то получимъ самъ параболоидъ проективности какъ сферическую поверхность (и слѣдовательно коррелятивную ему квадратичную секунду круговъ какъ сферу круговъ). Если изъ любой точки, какъ центра прямого подобія, построимъ половинный параболоидъ то есть за отношеніе подобія примемъ половину, то полученная сфера круговъ становится плоскостью (линейною секундою) круговъ или какъ бы шаромъ безконечно-большого діаметра. Такихъ поверхностей имѣется столько же, сколько точекъ пространства. И дѣйствительно, какъ извѣстно, число плоскостей равно числу точекъ пространства.

Въ заключеніе упомяну, что нетрудно отъ разсмотрѣннаго вопроса перейти къ общему, чисто спекулятивному вопросу изображенія точекъ пространства четырехъ измѣреній кругами пространства. Для этого всѣмъ изложеннымъ намѣченъ совершенно ясный путь; но понятно, что разсмотрѣніе этого вопроса выходитъ изъ поставленныхъ рамокъ статьи.

Кромѣ того можно примѣнить ту же теорію и къ шарамъ вмѣсто круговъ, и это было бы естественно сдѣлать именно при переходѣ къ разсмотрѣнію вопроса объ изображеніи точекъ пространства четырехъ измѣреній.

Въ частности же, если примемъ въ изложенной теоріи круги за большіе круги шаровъ, а совокупность всѣхъ круговъ за линейную терцію шаровъ, то все изложенное и явится какъ частный случай общей теоріи шаровъ безъ какихъ либо измѣненій въ ходѣ заключеній, выводовъ и построеній.

II. Изображеніе точекъ векторіальными кругами.

Если даны два круга, то изъ нихъ однозначно опредѣляется прима по общей радикальной оси и двузначно опредѣляются два центра подобія: прямого и обратнаго. Но если мы припишемъ точкамъ круга опредѣленное направленіе, которое мы можемъ отмѣтить стрѣлками, то эта двузначность разрѣшится въ два однозначныя рѣшенія, а именно: 1) если направленія согласны, то имѣетъ мѣсто только центръ прямого подобія и 2) если направленія про-

[1]) H. Г. V. 5.

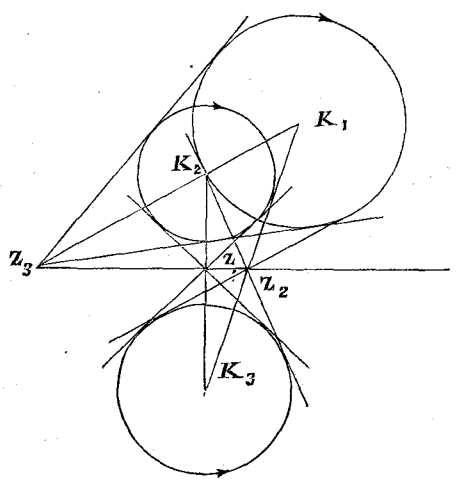
тивоположны, то имѣетъ мѣсто только центръ обратнаго подобія.

Принявъ это, мы увидимъ, что для каждаго даннаго случая центръ подобія (который въ такомъ случаѣ не будетъ носить двойного названія — прямого или обратнаго подобія) единиченъ, и двумя кругами однозначно опредѣлится прима такихъ круговъ, какъ имѣющая общій центръ подобія.

Ясно, что эта прима есть совокупность круговъ, имѣющая двѣ общія касательныя прямыя. Къ ней, въ качествѣ конечнаго круга отнесется и точка пересѣченія касательныхъ—*центръ примы*; круги другой половины примы, имѣющіе съ первою общую *централь*, будутъ векторіальными кругами противоположнаго направленія.

Три круга однозначно опредѣляютъ линейную секунду, характеризующуюся тремя центрами подобія на одной прямой, причемъ, какъ извѣстно, эта прямая станетъ осью подобія для всей секунды. Эта ось подобія, на которой находятся центры подобія Z_1—круговъ K_2 и K_3, Z_2 — круговъ K_3 и K_1, Z_3 — круговъ K_1 и K_2 (фиг. 14), есть геометрическое мѣсто точечныхъ круговъ всей секунды круговъ.

Фиг. 14.



Если на оси подобія мы возьмемъ безконечно удаленную точку и примемъ ее за центръ подобія то есть за центръ нѣкоторой линейной примы круговъ, то ясно, что обѣ касательныя по всѣмъ кругамъ этой примы, будутъ параллельными и слѣдовательно всѣ круги примы станутъ равными. Ясно, что центры всѣхъ круговъ примы находятся на равномъ разстояніи отъ оси подобія.

Этотъ результатъ мы можемъ обобщить въ видѣ совершенно очевидной теоремы, что вообще разстоянія всѣхъ центровъ круговъ одной линейной секунды прямо пропорціональны радіусамъ соотвѣтственныхъ круговъ.

Итакъ для всѣхъ такихъ круговъ имѣемъ постоянное отношеніе $d:r=c$, гдѣ d разстояніе отъ оси подобія, а r радіусъ круга. Это отношеніе мы можемъ условно считать положительнымъ, если направленіе стрѣлки соотвѣтствуетъ направленію движенія стрѣлки часовъ и отрицательнымъ при обратномъ направленіи.

Въ частномъ случаѣ, для точечныхъ круговъ то есть точекъ оси подобія это отношеніе выражается $0/0$. Если это отношеніе меньше 1-цы, прима круговъ не имѣетъ общихъ касательныхъ.

Вообще же это отношеніе является характеристичнымъ для каждой данной линейной секунды, которая раздѣляется осью подобія на двѣ части, круги которыхъ не имѣютъ между собою ни одной общей точки кромѣ точекъ самой оси, одновременно принадлежащихъ обѣимъ частямъ если $c>$ [1])

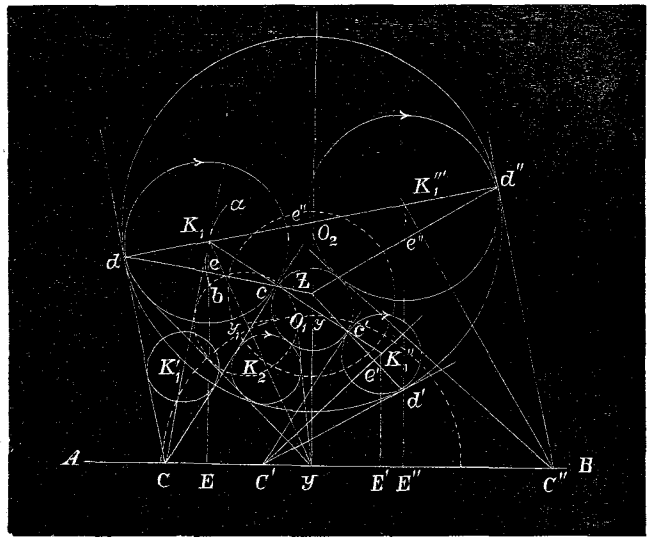
Полная совокупность всѣхъ векторіальныхъ круговъ, также какъ и круговъ обыкновенныхъ, есть линейная терція. Отсюда видна возможность установить коррелятивность между точками пространства и векторіальными кругами. Эта возможность станетъ очевидностью, если за плоскость чертежа примемъ секунду точечныхъ круговъ, которая также раздѣлитъ всю систему круговъ на двѣ части—положительную и отрицательную, какъ плоскость чертежа раздѣляетъ все пространство на часть выше и часть ниже лежащую. Для установленія коррелятивности достаточно принять центры круговъ за точки пространства, ортогонально проектирующіяся въ этихъ центрахъ, а радіусы круговъ за мѣру превышенія или пониженія коррелятивныхъ точекъ пространства. Принявъ выше лежащія точки за коррелятивныя кругамъ положительнымъ (ихъ стрѣлка согласна съ движеніемъ часовой стрѣлки), должны принять, что отрицательные круги выражаютъ точки, лежащія ниже плоскости чертежа на разстояніи, равномъ мѣрѣ радіуса, или, какъ будемъ выражаться для краткости, равномъ радіусу.

Эта коррелятивность отличается особою наглядностью, такъ что по изображенію круга какъ бы непосредственно видна изображаемая имъ точка пространства.

Умѣя опредѣлять нетолько отдѣльные круги, коррелятивные точкамъ пространства, но и линейныя прямыя или прямыя круговъ, коррелятивныя

прямымъ пространства, мы уже владѣемъ средствомъ воспроизводить посредствомъ круговъ какія-угодно пространственныя построенія.

Фиг. 15



Сначала изслѣдуемъ, какъ воспроизвести данную произвольную плоскую кривую ab (фиг. 15).

Сначала по тремъ точкамъ кривой мы опредѣлимъ плоскость [1]), въ которой находится эта кривая, или же эта плоскость извѣстна напередъ и тогда дана соотвѣтствующая ось подобія AB.

Взявъ на кривой произвольную точку K_1 и проведя коррелятивный кругъ, проведемъ къ кривой въ этой точки касательную. Пусть эта касательная пересѣчетъ ось подобія въ точкѣ C. Тогда кругомъ K_1 и точкою C вполнѣ опредѣлится прямая круговъ, коррелятивная касательной.

По свойству касательныхъ можемъ сказать, что безконечно-близкая къ K_1 точка на кривой находится на касательной, а потому и два такихъ круга, будутъ имѣть общія касательныя cC и dC, гдѣ c и d точки касанія этихъ прямыхъ къ кругу K_1. Если бы кривая была прямою, то и всѣ круги имѣли бы тѣ же общія касательныя, и эти касательныя были бы огибающими совокупность круговъ.

Но такъ какъ дана не прямая, то это справедливо только для безконечно-малаго промежутка кривой около точки K_1 и для безконечно-малыхъ промежутковъ огибающихъ около точекъ c и d; другими словами, точки c и d есть точки, принадлежащія огибающимъ кривымъ, а касательныя cC и dC есть касательныя къ этимъ огибающимъ въ точкахъ c,d. Замѣтимъ, что прямая cd есть поляра точки C по отношенію къ кругу K_1, и слѣдовательно она проходитъ чрезъ полюсъ e прямой AB по отношенію къ тому же кругу; этотъ полюсъ есть точка пересѣченія cd съ перпендикуляромъ K_1E, опущеннымъ изъ центра круга на ось подобія.

Прямая cd есть какъ бы прямая пересѣченія двухъ безконечно-близкихъ круговъ. Хотя такіе два круга, конечно, каково бы ихъ конечное между собою разстояніе ни было, пересѣкутся не въ точкахъ c и d, но чѣмъ болѣе будемъ приближать другой кругъ къ кругу K_1, тѣмъ въ большей степени двѣ точки ихъ пересѣченія приблизятся къ этимъ точкамъ, и потому эти точки составляютъ предѣлъ, къ которому стремятся приблизиться точки пересѣченія двухъ безконечно-близкихъ круговъ.

Слѣдовательно, прямая cd есть радикальная ось примы, опредѣляемой двумя безконечно-близкими кругами въ предѣлѣ.

Теперь мы видимъ, что если бы кривая была прямою, и ей принадлежалъ бы кругъ K_1, то и для него радикальною осью была бы прямая $c'd'$, параллельная cd то есть также какъ и cd перпендикулярная къ централи CK_1. Поэтому такая совокупность круговъ имѣетъ радикальный центръ, а именно точку пересѣченія cd и cd' то есть находящуюся на безконечности.

Если отъ касательной мы перейдемъ къ самой кривой, возьмемъ на ней другую произвольную точку и проведемъ коррелятивный кругъ, то другая, соотвѣтствующая кругу, радикальная ось пересѣчетъ первую то есть прямую cd не въ безконечности, а въ какой-нибудь конечно-отстоящей точкѣ Z; и тогда ясно, что если Z будетъ общимъ радикальнымъ центромъ для всѣхъ круговъ совокупности, и только тогда, эта совокупность опредѣляется тремя данными, а именно двумя точками на кривой и касательною въ одной изъ этихъ точекъ. Отсюда слѣдуетъ, что только такую кривую мы можемъ принять за циклъ круговъ.

Мы можемъ такую совокупность опредѣлить и иначе.

Такъ какъ точка Z есть общій для всѣхъ круговъ совокупности радикальный центръ, то значитъ, если мы тѣ же круги примемъ не за векторіальные, а за обыкновенные, вещественные или мнимые, то и тогда совокупность принадлежитъ одной и той же линейной секундѣ, и слѣдовательно всѣ круги этой секунды вообще, въ частности и круги данной

[1]) Для кривыхъ двоякой кривизны плоскость смежности въ данной точкѣ.

совокупности, будутъ имѣть своимъ ортогональнымъ кругомъ тотъ, центръ котораго есть точка Z.

Изъ изложеннаго видно, что мы можемъ эту однозначно выводимую изъ трехъ данныхъ круговъ совокупность то есть циклъ круговъ построить слѣдующимъ образомъ.

Пусть кругамъ K_1, K_2, K_3 коррелятивны три точки пространства k_1, k_2, k_3. Эти три точки однозначно опредѣляютъ плоскость, а полученной въ пространствѣ коррелятивны двѣ различныя линейныя секунды круговъ, смотря потому, примемъ ли круги за обыкновенные (вещественные или мнимые) или за векторіальные. Въ первомъ случаѣ получаемъ совокупность, опредѣляемую ортогональнымъ кругомъ, вещественнымъ или мнимымъ; во второмъ случаѣ получаемъ совокупность, опредѣляемую осью подобія. Общіе круги обѣихъ совокупностей и есть искомый циклъ круговъ, а коррелятивная ему плоская кривая въ пространствѣ, есть кривая циклическая.

Если въ точкѣ c круга K_1 проведемъ діаметральную прямую cK_1, она пересѣчетъ ось подобія въ нѣкоторой точкѣ D, а эта точка, какъ находящаяся на оси подобія вмѣстѣ съ кругомъ K_1 опредѣляетъ прямую круговъ DK_1, для которыхъ огибающими будутъ двѣ касательныя, проведенныя изъ D къ кругу K_1. Эта прямая круговъ пересѣчетъ циклъ круговъ въ другомъ кругѣ K_1'', центръ котораго находится на той же прямой и который пересѣчетъ ортогональный кругъ Z прямоугольно (если Z есть вещественный ортогональный кругъ, или же пересѣчется этимъ кругомъ въ діаметрѣ, если кругъ есть кругъ мнимый).

Пусть c' точка пересѣченія централи DK_1 съ кругомъ K_1'' (при этомъ подразумѣваемъ точку, соотвѣтственную точкѣ c то есть принадлежащую той же огибающей кривой). Это должна быть точка пересѣченія прямой Ze', гдѣ e' полюсъ прямой AB относительно круга K_1'' съ окружностью этого круга, потому что c' (равно какъ и d') принадлежитъ кривой огибающей, а перпендикуляръ къ касательной $C'c'$, проведенный чрезъ точку c есть централь примы какъ круга K_1'', такъ и круга K_1, а точка D на оси подобія есть точечный кругъ примы.

Поэтому для одной пары сопряженныхъ круговъ мы получаемъ пару точекъ огибающей c и c', и касательныя въ этихъ точкахъ перпендикулярны къ централи то есть полюсъ централи K_1K_1'' относительно огибающей кривой есть точка на безконечности. Такъ какъ это справедливо для каждой сопряженной пары круговъ совокупности, то значитъ огибающая кривая имѣетъ центръ (средину между c и c'), и всѣмъ прямымъ, проходящимъ чрезъ этотъ центръ сопряжены перпендикулярныя прямыя. Это свойства круга необходимыя и достаточныя для его опредѣленія.

Отсюда заключаемъ, что и другая огибающая, къ которой примѣнимъ тотъ же ходъ разсужденій, есть также кругъ, и значитъ обѣ огибающія циклъ круговъ есть круги (съ центрами O_1 и O_2).

Съ другой стороны ясно, что если возьмемъ два круга O_1 и O_2 и проведемъ къ нимъ три одинаково касательные круга, то этими тремя кругами однозначно опредѣляется циклъ круговъ; и теперь оказывается, что это и есть совокупность всѣхъ одинаково касательныхъ круговъ. Подъ словомъ „одинаково касательныхъ“ мы подразумѣваемъ, что если одинъ изъ круговъ напр. O_1 имѣетъ къ двумъ кругамъ внѣшнее, а къ третьему внутреннее касаніе, или обратно, то и второй кругъ O_2 имѣетъ къ первымъ двумъ кругамъ внутреннее, а къ третьему внѣшнее касаніе или обратно; если кругъ O_1 имѣетъ ко всѣмъ тремъ внѣшнее, то кругъ O_2 имѣетъ ко всѣмъ тремъ внутреннее касаніе.

Вообще для данныхъ трехъ круговъ K_1, K_2, K_3 мы различаемъ четыре случая, аналогичные тѣмъ, что приведены въ первой главѣ.

Первый случай, когда всѣ три круга положительны или всѣ три отрицательны; второй случай, когда кругъ K_1 отличается по своему разряду отъ круговъ K_2 и K_3; третій и четвертый случаи, когда то же относится къ кругу K_2 и K_3.

Ясно, что въ трехъ послѣднихъ случаяхъ циклическая кривая необходимо пересѣкаетъ въ двухъ точкахъ плоскость чертежа, а именно во второмъ случаѣ это имѣетъ мѣсто между точками k_1 и k_2, k_1 и k_3, въ третьемъ случаѣ между точками k_2k_3 и k_2k_1, въ четвертомъ между точками k_3k_1 и k_3k_2. Соотвѣтственные круги круговъ въ этихъ точкахъ пересѣченія представлены точечными кругами.

Въ первомъ случаѣ точечныхъ круговъ или вовсе нѣтъ, или, если таковые имѣются, то оба находятся между какими-нибудь двумя изъ трехъ круговъ. Въ этомъ случаѣ оба таковые могутъ слиться и въ одинъ точечный кругъ, и это означаетъ, что коррелятивная циклическая кривая касается плоскости чертежа.

Разсмотримъ какую-нибудь горизонтальную плоскость напр. плоскость чертежа. Точкамъ ея, какъ точкамъ пространства будутъ коррелятивны двѣ различныя линейныя секунды; напр. для плоскости чертежа съ одной стороны секунда точечныхъ (для параллельныхъ плоскостей—равныхъ) круговъ, съ другой стороны секунда съ точечнымъ ортогональнымъ кругомъ. Нѣкоторая прямая въ этой плоскости будетъ коррелятивна съ одной стороны прямой то-

чечныхъ круговъ, какъ оси подобія для всѣхъ круговъ плоскости, съ другой нѣкоторая линейная прима, имѣющая ту же централь (и вовсе не имѣющая точечныхъ круговъ).

Будемъ плоскость чертежа вращать около этой прямой. Получимъ приму плоскостей, которымъ коррелятивны съ одной стороны секунда круговъ, всегда имѣющая ту же прямую осью подобія, съ другой стороны секунда круговъ, къ которой принадлежитъ упомянутая прима, но характеризующаяся опредѣленнымъ ортогональнымъ кругомъ, вещественнымъ (если плоскости пересѣкаютъ параболоидъ проективности) или мнимымъ (если плоскость не пересѣкаетъ этого параболоида). Ясно, что кругъ этотъ, начиная отъ точечнаго, будетъ непрерывно возрастать, и для вертикальнаго положенія плоскости станетъ безконечно-большимъ, станетъ прямою, и эта прямая сольется съ централью примы; всѣ круги, коррелятивные точкамъ вертикальной плоскости, въ обоихъ случаяхъ превратятся въ полную совокупность круговъ, центры которыхъ одна и та же прямая.

Итакъ, для вертикальныхъ плоскостей различіе между секундами того и другого рода линейныхъ секундъ, совершенно исчезаетъ, и всѣ соотвѣтственные круги становятся тождественными, и значитъ также циклы круговъ въ обоихъ случаяхъ представляютъ тождественныя примы, равно какъ и коррелятивная имъ кривая въ пространствѣ то есть собственно въ вертикальной плоскости. Одновременно исчезаетъ для прямой, какъ круга безконечно-большого діаметра, различіе между кругомъ обыкновеннымъ и векторіальнымъ.

Этимъ мы разрѣшаемъ вопросъ о томъ, что такое сфера векторіальныхъ круговъ и коррелятивная ему сферическая поверхность въ пространствѣ.

Послѣдняя есть конечно поверхность вращенія, потому что всѣ ея горизонтальныя сѣченія круги, имѣющіе центръ на одной вертикали, которая поэтому и есть ось вращенія.

Линія центровъ цикла круговъ есть кривая II порядка [1]); и такъ какъ эта линія есть ортогональная проекція циклической кривой, то тоже относится и къ послѣдней. Если всѣ круги одного цикла одного разряда, линія центровъ, а слѣдовательно и циклическая кривая, есть эллипсъ: разрядъ круговъ можетъ перемѣниться или черезъ посредство точечнаго круга, или чрезъ посредство круга безконечно-большого діаметра.

Поэтому и поверхность, коррелятивная сферѣ круговъ одного разряда есть поверхность, всѣ вообще сѣченія которой есть эллипсы.

Вертикальный же разрѣзъ этой поверхности есть парабола; слѣдовательно, и для системы обыкновенныхъ, и для системы векторіальныхъ круговъ, поверхности пространства, коррелятивныя сферамъ круговъ, однѣ и тѣ же, хотя сами сферы круговъ въ обоихъ случаяхъ представляютъ разныя квадратичныя секунды круговъ.

Поэтому къ нимъ примѣнимы одни и тѣ же соображенія относительно полной совокупности такихъ сферическихъ поверхностей, которыя уже были изложены въ I главѣ.

Такъ какъ всякій вообще параболоидъ вращенія (съ вертикальными діаметрами) коррелятивенъ сферѣ векторіальныхъ круговъ, то каждый плоскій разрѣзъ такой сферической поверхности коррелятивенъ нѣкоторому циклу векторіальныхъ круговъ. Разрѣзъ этотъ представляетъ эллипсъ, а ортогональная проекція этого эллипса на плоскость чертежа, то есть также нѣкоторый эллипсъ, есть геометрическое мѣсто центровъ цикла круговъ.

Возвращаясь къ циклу круговъ, отмѣтимъ то важное свойство этой совокупности, что оба огибающіе круга и кругъ ортогональный, также какъ и ось подобія, принадлежатъ одной примѣ круговъ (не векторіальныхъ), и послѣдняя является радикальною осью этой примы.

Для доказательства преобразуемъ совокупность обратными радіусами, принявъ сначала за центръ преобразованія точку, совершенно произвольную, на ортогональномъ кругѣ. Тогда этотъ кругъ преобразуется въ прямую, а всѣ круги совокупности, какъ прямоугольно пересѣкающіе его, преобразуются въ круги, имѣющіе центры на этой ортогональной прямой; слѣдовательно, огибающіе круги преобразуются въ огибающіе же круги, которые послѣ преобразованія станутъ равными, такъ какъ централь круговъ совокупности есть слѣдъ плоскости симметріи относительно этихъ огибающихъ круговъ. Для примы такихъ двухъ круговъ эта централь и есть радикальная ось.

Теперь произведемъ второе преобразованіе обратными радіусами, принявъ за центръ преобразованія точку Y пересѣченія оси подобія съ перпендикуляромъ $O_1\ O_2$, а за кругъ преобразованія тотъ, который прямоугольно пересѣкаетъ ортогональный кругъ.

Послѣ преобразованія ортогональный кругъ преобразуется самъ въ себя, а какой-нибудь кругъ K_1 совокупности преобразуется въ кругъ K_2, который долженъ удовлетворять двумъ общимъ условіямъ: во первыхъ кругъ K_2 также долженъ пересѣкать

[1]) H. Г. VI, 15.

прямоугольно ортогональный кругъ, а во вторыхъ онъ долженъ имѣть съ кругомъ K_1 двѣ общія касательныя, пересѣкающіяся въ точкѣ $У$. Но эти два условія и есть какъ разъ условія принадлежности круга K_2 къ циклу круговъ.

Итакъ, при этомъ послѣднемъ преобразованіи всѣ круги совокупности попарно преобразуются другъ въ друга, и въ суммѣ весь циклъ круговъ преобразуется самъ въ себя, и вмѣстѣ съ нимъ преобразуются сами въ себя и оба огибающіе круга; а такъ какъ ихъ центры находятся на одной прямой съ центромъ ортогональнаго круга и съ центромъ $У$ круга преобразованія, то это снова служитъ доказательствомъ, что оба огибающіе круга и кругъ ортогональный принадлежатъ одной линейной примѣ. При этомъ ось подобія, какъ прямая, проходящая чрезъ центръ преобразованія, также преобразуется сама въ себя, и значитъ и она принадлежитъ той же примѣ и составляетъ ея радикальную ось. Круги K_1 и K_2 и точечный кругъ $У$ есть три круга, и четвертый гармоническій тотъ кругъ примы, который прямоугольно пересѣкаетъ круги примы [1]).

Ясно, что точка y пересѣченія централи $УZ$ съ кругомъ преобразованія есть одинъ изъ точечныхъ круговъ примы.

Изъ изложеннаго способа построенія цикла круговъ слѣдуетъ, что если возьмемъ два произвольные круга O_1 и O_2, то совокупность круговъ, одинаково къ нимъ касательныхъ есть циклъ круговъ. Но на такую совокупность мы можемъ смотрѣть какъ на пересѣченіе двухъ другихъ квадратичныхъ секундъ, состоящихъ изъ всѣхъ круговъ, одинаково касательныхъ какъ къ одному, такъ и къ другому.

Каждая такая совокупность въ отдѣльности гомологична прямоугольному конусу въ пространствѣ съ вертикальною осью и центромъ, коррелятивнымъ данному кругу. Подъ выраженіемъ прямоугольный конусъ мы подразумѣваемъ здѣсь конусъ съ угломъ растворенія въ 90° (то есть производящія съ осью дѣлаютъ уголъ 45°).

Въ самомъ дѣлѣ, каждая прямая, дѣлающая съ вертикалью уголъ 45°, изобразится (коррелятивно) примою круговъ, имѣющихъ общую касательную точку (точечный кругъ), а разсматриваемая совокупность состоитъ изъ всѣхъ круговъ, полученныхъ отъ такой примы вращеніемъ около одной вертикали.

Если оба круга, огибающіе циклъ, находятся одинъ внѣ другого, то въ числѣ круговъ цикла непремѣнно находятся и два круга безконечно-большого діаметра то есть общія касательныя (прямыя). Слѣдовательно, въ соотвѣтственной циклической кривой имѣются двѣ безконечно-удаленныя точки то есть кривая есть гипербола.

Отсюда вытекаетъ интересная теорема: два произвольныхъ прямоугольныхъ конуса съ вертикальными осями пересѣкаются въ гиперболѣ (циклической кривой).

Если для построенія цикла круговъ возьмемъ два равные круга равнаго знака (оба положительные или оба отрицательные), получимъ циклъ круговъ безконечно-большого радіуса, которому коррелятивна циклическая кривая въ вертикальной плоскости.

Слѣдовательно, два прямоугольные конуса съ центрами на одной горизонтальной плоскости пересѣкаются въ гиперболѣ въ вертикальной плоскости.

Теперь посмотримъ, какъ изобразится въ кругахъ какая-нибудь поверхность второго порядка напр. эллипсоидъ. Для пониманія этого изображенія достаточно вывести изображеніе какого-нибудь плоскаго сѣченія этой поверхности.

Всякое плоское сѣченіе эллипсоида есть эллипсъ, а по условіямъ изображенія ортогональная проекція этого эллипса—тоже эллипсъ—есть кривая центровъ круговъ совокупности.

Эллипсъ опредѣляется пятью точками, а потому и для опредѣленія всей совокупности необходимо и достаточно имѣть пять точекъ на опредѣленной плоскости. Слѣдовательно, нужно считать даннымъ, кромѣ этихъ пяти точекъ, кругъ, коррелятивный одной изъ нихъ и ось подобія, соотвѣтствующую данной плоскости.

Построивъ по пяти точкамъ эллипсъ, мы вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣляемъ касательныя къ нему въ этихъ точкахъ, равно какъ по оси подобія находимъ всѣ пять круговъ, коррелятивныхъ даннымъ точкамъ. Имѣя въ этихъ точкахъ касательныя къ эллипсу и коррелятивныя круги, мы, согласно вышесказанному, опредѣляемъ на каждомъ кругѣ и двѣ точки, принадлежащія огибающимъ совокупностямъ то есть по пяти точекъ для опредѣленія каждой изъ нихъ, а эти пяти точекъ, въ свою очередь, опредѣляютъ кривую второго порядка.

Итакъ, каждой кривой второго порядка въ пространствѣ коррелятивна квадратичная прима кру-

---

1) потому что при преобразованіи изъ центра $У$ круга K_1 и K_2 преобразуются другъ въ друга, а этотъ кругъ y_1 самъ въ себя, какъ и $У$. Съ другой стороны центръ круга y_1 принадлежитъ радикальной оси примы K_1 и K_2, и если кругъ y_1 примемъ за кругъ преобразованія, то кругъ $У$ преобразуется самъ въ себя, также какъ и круги K_1 и K_2, откуда слѣдуетъ, что всѣ эти круги (разсматриваемые не какъ векторіальная) принадлежатъ одной линейной примѣ, и значитъ круги K_1 и K_2 есть общіе круги (пересѣченія) двухъ примъ (круговъ обыкновенныхъ и векторіальныхъ) съ общею централью.

говъ, и нетолько кривая ихъ центровъ, но и обѣ огибающія кривыя есть кривыя второго порядка.

Въ частности и каждый кругъ изобразится квадратичною прямою круговъ, въ которомъ какъ кривыя центровъ, такъ и объ огибающія кривыя есть эллипсы.

Отсюда вытекаетъ и изображеніе шара. Ясно, что если для этого изображенія возьмемъ пучекъ большихъ круговъ, то въ изображеніи получимъ пучекъ эллиптическихъ примъ круговъ (какъ линія центровъ, такъ и обѣ огибающія есть эллипсы), и въ этомъ пучкѣ совпадутъ центры эллипсовъ, выражающихъ центры круговъ совокупности.

Мы можемъ закончить и эту главу, какъ и предыдущую, замѣчаніемъ, что на круги мы можемъ смотрѣть какъ на большіе круги шаровъ, а потому все сказанное въ этой главѣ отнести къ геометріи шаровъ, для которой разсмотрѣнное составитъ лишь частный случай той терціи, всѣ центры шаровъ которой находятся въ одной плоскости.

III. Изображеніе точекъ параллельными векторами.

Подъ словомъ параллельные векторы мы подразумѣваемъ отрѣзки съ опредѣленнымъ направленіемъ, отмѣченнымъ стрѣлкою.

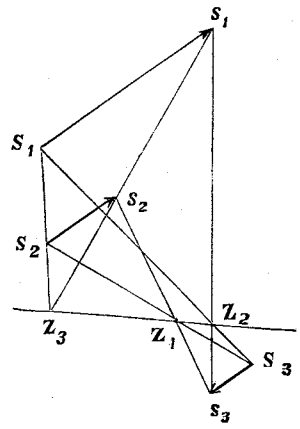
Чтобы вывести основныя теоремы геометріи такихъ отрѣзковъ, достаточно систему векторіальныхъ круговъ пересѣчь параллельными радіусами и именно таковые считать за элементы системы, или лучше соединить отрѣзкомъ два діаметрально-противоположные полюса (положительный и отрицательный).

Какъ для векторіальныхъ круговъ, такъ и для векторіальныхъ отрѣзковъ, различіе между двумя противоположными направленіями условнаго характера, и мы безразлично можемъ считать отрѣзки, какъ и круги, положительными для одного изъ таковыхъ, и отрицательными для противоположнаго.

Чтобы доказать возможность векторіальныхъ отрѣзковъ какъ элементовъ, достаточно доказать, что изъ нихъ можно составить линейную приму. Это же почти непосредственно очевидно. Напр. ясно, что прима отрѣзковъ S_1s_1 и S_2s_2 (фиг. 16) опредѣляется соединеніемъ прямыми соотвѣтственныхъ точекъ S_1 съ S_2 и s_1 съ s_2; получаемъ центръ примы Z_3, въ тоже время точечный отрѣзокъ примы; онъ же центръ прямого подобія каждыхъ двухъ отрѣзковъ примы.

Также изъ отрѣзковъ S_1s_1 и S_3s_3 соединеніемъ прямыми ихъ соотвѣтственныхъ концовъ S_1 съ S_3 и s_1 съ s_3 получимъ центръ примы Z_2; онъ же центръ обратнаго подобія отрѣзковъ, если не обращать вниманіе на различіе разряда отрѣзковъ.

Фиг. 16.

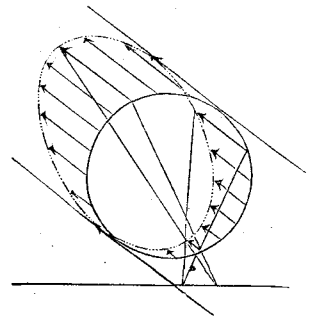


Для трехъ вертикальныхъ отрѣзковъ мы получимъ три центра подобія Z_1, Z_2 и Z_3, которые находятся на оси подобія. Ясно, что ось подобія характеризуетъ ту плоскость, въ которой находятся точки въ пространствѣ, коррелятивныя даннымъ тремъ отрѣзкамъ.

Весьма просто разрѣшается вопросъ и о *циклѣ векторіальныхъ отрѣзковъ*.

Полагаю, что приведеніемъ фигуръ 17 и 18, изображающихъ два различные цикла такихъ отрѣзковъ, дѣлаю излишнимъ детальное разсмотрѣніе этого простого вопроса.

Фиг. 17.

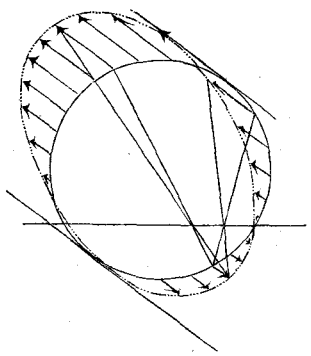


Замѣчу только, что если даны три отрѣзка, то ими прежде всего опредѣляется плоскость, и получается характеризующая ее ось подобія.

Во всѣхъ вообще отрѣзкахъ мы отличаемъ *на-*

чальную точку (напр. S_1 на фиг. 16) и *конечную* (s_1). Значеніе этихъ точекъ существенно отлично. Положеніе начальной точки можно считать непосредственно даннымъ, независимо отъ того, будетъ

Фиг. 18.



ли отрѣзокъ положительнымъ или отрицательнымъ; положеніе же конечной точки зависитъ отъ этого условія, такъ какъ для отрѣзковъ противоположнаго знака и направленія противоположны.

Поэтому, если требуется однозначно опредѣлить кривую по тремъ даннымъ отрѣзкамъ, то это требованіе прежде всего относится къ начальнымъ точкамъ, а потому существуетъ только одно рѣшеніе вопроса: кругъ этихъ начальныхъ точекъ, который и представляетъ ортогональную проекцію соотвѣтственной циклической кривой въ пространствѣ.

Затѣмъ по отношенію къ каждой точкѣ мы найдемъ соотвѣтственную конечную точку отрѣзка.

То преобразованіе системы точекъ, которое нужно произвести, чтобы изъ системы начальныхъ точекъ получить систему конечныхъ точекъ, названо *уклоненіемъ* [1]). Оно относится къ преобразованіямъ кристаллографической проективности и характеризуется осью уклоненія (въ данномъ случаѣ ось подобія), направленіемъ (въ данномъ случаѣ направленіемъ отрѣзковъ) и величиною уклоненія. Эта постоянная величина есть отношеніе длины отрѣзка къ разстроенію отъ оси подобія.

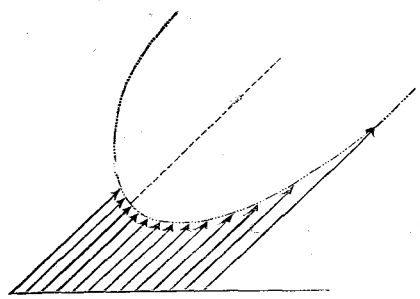
Всякое же преобразованіе кристаллографической проективности устанавливаетъ сродство между гомологичными фигурами (сохраняются центры фигуръ, параллельность прямыхъ, равенство отрѣзковъ). Съ кругомъ связаны сродствомъ только эллипсы (въ предѣлѣ параболы). Поэтому конечныя точки круга отрѣзковъ образуютъ эллипсы, что и видно изъ фигуръ.

[1]) Третій этюдъ по аналитической кристаллографіи. Глава II, § 37.

Если бы ось подобія была параллельна направленію отрѣзковъ, мы получили бы тотъ частный случай уклоненія, который называется сдвигомъ.

Въ частномъ случаѣ, если въ пространствѣ даны три точки въ одной вертикальной плоскости, кругъ, однозначно опредѣляемый тремя ортогональными проекціями этихъ точекъ, есть кругъ безконечно большого діаметра, то есть прямая, а потому въ этомъ кругѣ имѣются и безконечно удаленныя точки. Ясно, что конечныя точки такого круга векторіальныхъ отрѣзковъ составятъ эллипсъ съ безконечно-удаленными точками, соотвѣтствующими направленію отрѣзковъ, то есть параболу, діаметры которой параллельны направленію отрѣзковъ. Этотъ циклъ отрѣзковъ воспроизведенъ на фиг. 19.

Фиг. 19

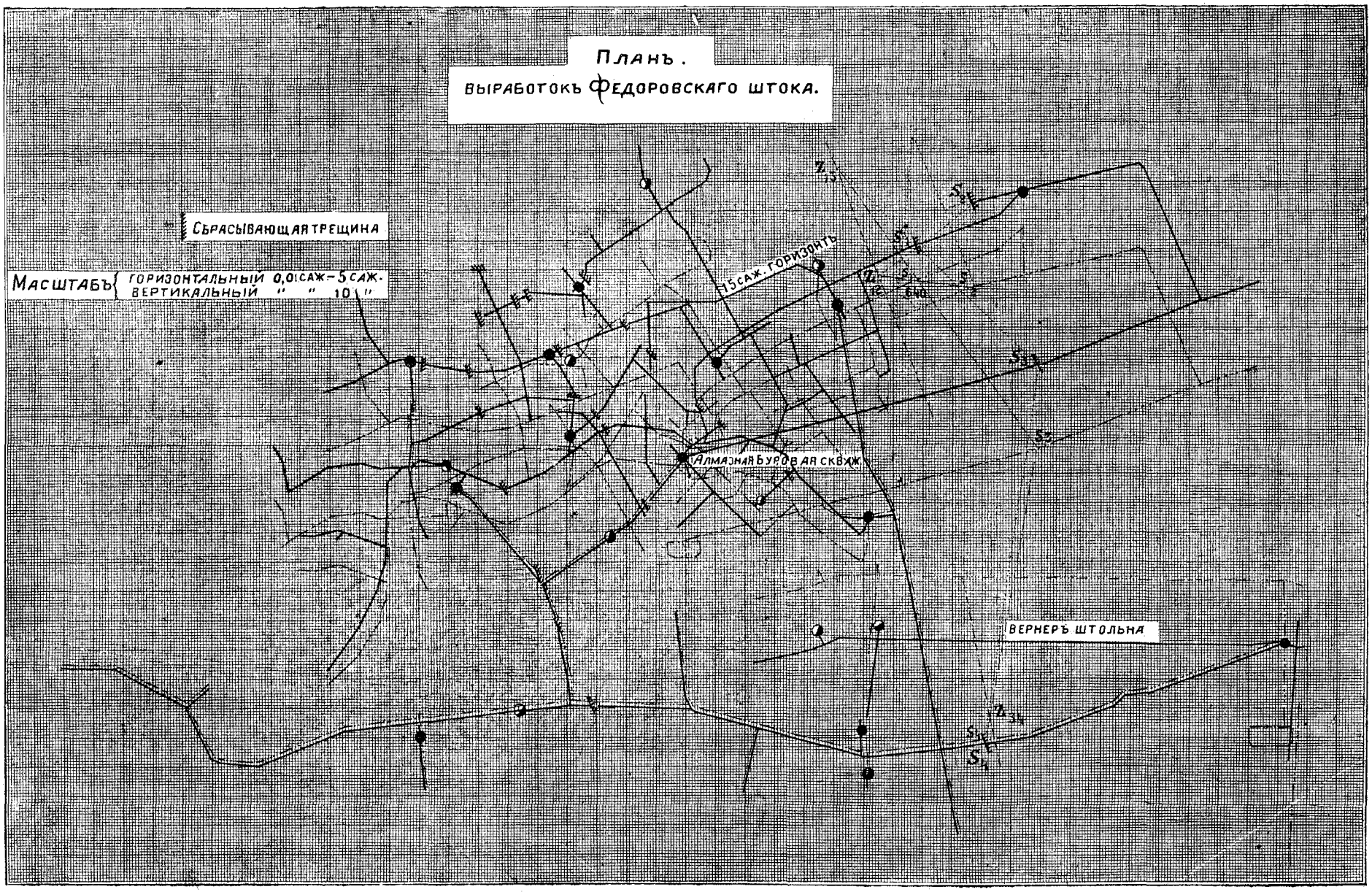


Ясно также, что всѣмъ кругамъ точекъ въ горизонтальныхъ плоскостяхъ коррелятивны циклы отрѣзковъ, начальные точки которыхъ составляютъ круги, равные даннымъ въ пространствѣ. Такъ какъ вертикальныхъ плоскостяхъ кругамъ отрѣзковъ коррелятивны параболы въ пространствѣ, то значитъ, что шарамъ отрѣзковъ коррелятивны опять таки параболоиды вращенія съ вертикальными діаметрами, то есть это опять тѣ же сферическія поверхности, что и въ случаѣ системъ круговъ обыкновенныхъ и векторіальныхъ.

Всѣмъ изложеннымъ вполнѣ завершается циклъ поставленныхъ этою статьею задачъ.

Мы получили три различные способа точно изображать точки пространства на плоскости. Изъ нихъ глубокій научный интересъ представляютъ два первые способа изображенія точекъ кругами обыкновенными и векторіальными. Съ разработкой вопросовъ этого рода связанъ выводъ ряда изящныхъ теоремъ и соотношеній [1]). Но ихъ нельзя признать

[1]) и прежде всего выводъ двухъ системъ (круговъ обыкновенныхъ и векторіальныхъ) вмѣсто одной, принимавшейся до сихъ поръ.


План.
выработокъ Федоровскаго штока.
Сбрасывающая трещина
Масштабъ горизонтальный 0,01 саж – 5 саж.
вертикальный " " 10 "
15 саж. горизонть
Алмазная буровая скважина
Вернеръ штольня

удобными для практическаго осущественія, и потому единственный остающійся въ нашемъ распоряженіи практическій способъ заданнаго изображенія есть способъ изображенія точекъ параллельными векторами.

Чтобы показать особыя достоинства и преимущества этого способа при изображеніи рудничныхъ выработокъ къ статьѣ прилагается составленный по этому способу планъ выработокъ Федоровскаго штока въ Кедабекѣ по копіи, полученной благодаря любезности горныхъ инженеровъ А. Г. Эрна и Н. С. Успенскаго.

На этомъ планѣ въ ортогональной проекціи воспроизведены показанныя на этой копіи рудничныя выработки то есть представляютъ начальныя точки системъ векторовъ, проводимыхъ на сѣткѣ сверху внизъ. Конечныя точки соотвѣтственныхъ векторовъ представлены красными линіями (онѣ на таблицѣ замѣнены линіями условнаго начертанія).

За плоскость чертежа то есть плоскость точечныхъ отрѣзковъ принята плоскость такъ называемаго 15-саженнаго горизонта, а потому конечныя точки векторовъ какъ бы отмѣчаютъ точки, принадлежащія этой постоянной плоскости. Если выработка проходитъ выше этого горизонта, то начальная точка настолько же выше конечной; и обратно, если выработка ниже этого горизонта, то конечныя точки векторовъ будутъ выше.

Если выработка строго горизонтальна, то конечныя точки строго параллельны начальнымъ; если же выработка наклонена, то линія выработки и красная линія конечныхъ точекъ векторовъ не параллельны.

Въ случаяхъ вертикальныхъ выработокъ (гезенковъ, иберзихбреховъ), мы получаемъ при одной черной точкѣ вертикальную красную прямую, точки которой идутъ въ обратной послѣдовательности съ изображаемыми ими точками выработокъ. Также крупныя камеры изображаютъ красными очертаніями въ обратномъ порядкѣ то есть верхнимъ стѣнкамъ (потолкамъ) соотвѣтствуютъ нижнія, а нижнимъ стѣнкамъ (почвѣ) соотвѣтствуютъ верхнія линіи контуровъ.

О степени наглядности изображенія можно судить по приложенному плану рудника, умышленно избраннаго изъ болѣе сложныхъ.

Чтобы показать, какъ рѣшать встрѣчающіеся геометрическіе вопросы на такихъ рудникахъ, разсмотримъ слѣдующій примѣръ.

Въ рудникѣ имѣются двѣ толщи: 1) рудная—кварцитовая и 2) вышележащая черная толща туфовъ и потоковъ. Эти двѣ толщи раздѣлены громадною трещиною сброса. Точки, въ которыхъ встрѣчена эта „главная сбрасывающая трещина“ отмѣчены буквами S_1, S_2, S_3, S_4. Конечныя точки соотвѣтственныхъ отрѣзковъ отмѣчены буквами s_1, s_2, s_3, s_4.

Трехъ точекъ достаточно для опредѣленія плоскости; но конечно въ природѣ такія поверхности не представляютъ точныхъ плоскостей, хотя и приближаются къ нимъ. Чтобы получить представленіе о пространственномъ ихъ положеніи все таки меньшія ихъ части можно принять за плоскости, а плоскости характеризуются осями подобія, проходящими чрезъ центры подобія каждыхъ двухъ отрѣзковъ.

И вотъ на приложенномъ планѣ опредѣлены центры подобія Z_{12}, Z_{13}, Z_{34} и проведены оси подобія чрезъ двѣ первыя точки и предположительная ось чрезъ третью точку. Оказывается что линія осей подобія немного искривляется, что и видно изъ двухъ частей этой кривой, отмѣченныхъ линейнымъ пунктиромъ. Мы видимъ, что длинная выработка идетъ почти черезъ весь рудникъ почти параллельно поверхности сброса, нѣсколько влѣво то есть въ висячемъ боку этой трещины.

Опредѣливъ ось подобія въ данной части рудника, мы вмѣстѣ имѣемъ линіи простиранія (линейный пунктиръ и есть эта линія, проведенная на 15-саженномъ горизонтѣ), а вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ данныя и для опредѣленія паденія. Напр. если на ось подобія изъ s_1 опустимъ перпендикуляръ, то съ одной стороны имѣемъ основаніе, а величина s_2S_2 (удвоенная) выразитъ высоту.

На планѣ приведено соотвѣтствующее построеніе: [1]) получается уголъ паденія 64^0. На рудникѣ принимаютъ вообще для этого угла величину 70^0. Разница во всякомъ случаѣ не очень большая.

Думается, что и приведенныхъ примѣровъ достаточно для характеристики пользованія подобными рудничными планами.

Подобно тому, какъ единственный практичный способъ изображенія точекъ пространства на плоскости есть способъ, основанной на теоріи совокупностей параллельныхъ векторовъ, такъ та же теорія даетъ въ руки средство изображать въ пространствѣ точки пространства четвертаго измѣренія или, точнѣе говоря, точки, опредѣляемыя четырьмя независимыми координатами.

Ясно, что преслѣдуя практическую цѣль, теорія эта имѣетъ въ виду лишь дать наглядное изображеніе величинъ, опредѣляемыхъ четырьмя независимыми перемѣнными.

---

[1]) Подробнѣе объяснено въ Н. Г. XI стр., 126.

Возможность эта обусловливается: 1) тѣмъ, что полная совокупность такихъ векторовъ есть кварта и 2) тѣмъ, что можно по двумъ такимъ векторамъ однозначно опредѣлить прямую векторовъ то есть ихъ линейную приму.

Два вектора опредѣляютъ прямую (приму) векторовъ, а въ частности центръ этой примы—центръ подобія и это будетъ точечный векторъ этой примы. Три вектора опредѣляютъ плоскость (секунду) векторовъ, и въ частности ось подобія—геометрическое мѣсто точечныхъ векторовъ данной плоскости. Четыре вектора опредѣляютъ пространство (терцію) векторовъ, и въ частности плоскость подобія—геометрическое мѣсто точечныхъ векторовъ даннаго пространства.

Подобно тому, какъ при изображеніи точекъ пространства на плоскости мы могли, какъ самое простое средство, принять геометрическое мѣсто точечныхъ векторовъ плоскости за плоскость изображенія, и тогда всѣ точки въ этой плоскости служили изображеніемъ самихъ себя, такъ проще всего за *пространство изображенія* принять то, точки котораго изображаютъ сами себя. И тогда всякій неточечный векторъ изображаетъ уже точку, не находящуюся въ пространствѣ изображенія.

Съ этой точки зрѣнія каждая точка въ пространствѣ выражаетъ точку пространства четвертаго измѣренія, для которой четвертая координата равна нулю. И обратно, если точка изобразится векторомъ, положительнымъ или отрицательнымъ, то можно сказать, что абсолютная величина этого вектора выразитъ абсолютную величину четвертой координаты, а знакъ выразитъ одно изъ двухъ противоположныхъ направленій то есть знакъ этой четвертой координаты.

Этотъ способъ особенно удобенъ для изображенія простыхъ непрерывныхъ кривыхъ, которыя изобразятся уже двумя кривыми: кривою начальныхъ и кривою конечныхъ точекъ векторовъ. Если проведемъ въ конечныхъ точкахъ одного вектора къ этимъ двумъ кривымъ касательныя, то эти касательныя непремѣнно пересѣкутся и притомъ въ одной опредѣленной точкѣ.

Что эти касательныя пересѣкутся, можно видѣть изъ того, что какъ чрезъ точку касанія, такъ и чрезъ безконечно-близкую къ ней точку кривой проходятъ два параллельныхъ вектора, а ими опредѣляется плоскость, въ которой и находятся обѣ касательныя.

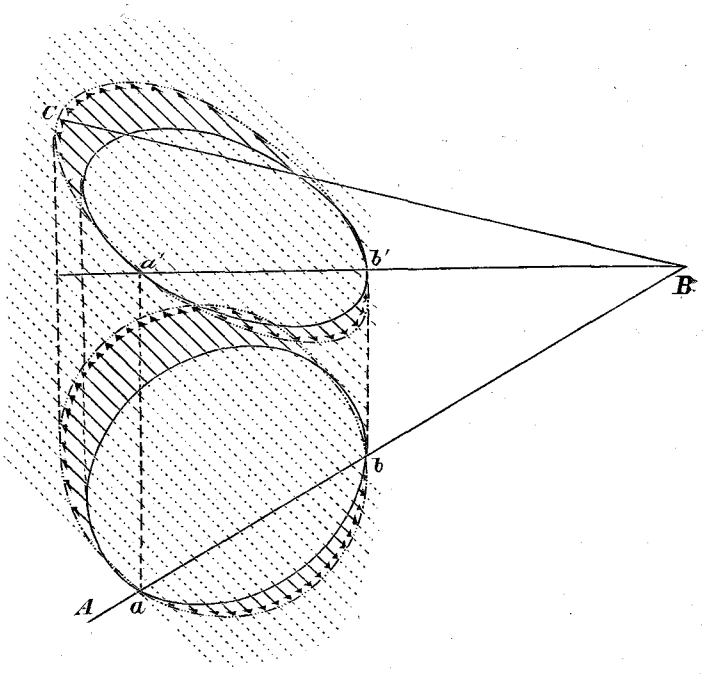
Итакъ, изъ пространства изображенія въ каждой данной точкѣ кривой четвертаго измѣренія можно провести касательную лишь изъ опредѣленной точки.

Эта теорема зависитъ не отъ свойствъ кривой; она не зависитъ отъ того, будетъ ли данная кривая плоская или двоякой кривизны. Она обусловливается свойствомъ пространства четвертаго измѣренія, по которому произвольная прямая пересѣкаетъ вообще пространство въ одной точкѣ, если только эта прямая не находится цѣликомъ въ этомъ пространствѣ.

Какъ произвольная прямая пересѣкаетъ всякое данное пространство въ одной точкѣ, такъ произвольная плоскость пересѣкаетъ всякое данное пространство въ одной прямой, такъ вообще два произвольныя (линейныя) пространства четвертаго измѣренія пересѣкаются въ одной плоскости.

Ясно, что плоскости подобія, опредѣляемыя четырьмя произвольно взятыми векторами и есть плоскости пересѣченія пространства, опредѣляемаго этими векторами съ пространствомъ изображенія.

Фиг. 20.



Если изображаемая кривая четвертаго измѣренія есть кривая плоская, то какіе бы три ея вектора мы ни взяли, прямыя, соединяющія начальныя и конечныя точки векторовъ непремѣнно пересѣкутся, и притомъ всегда на одной и той же оси подобія.

Такъ какъ по способу начертательной геометріи мы можемъ на плоскости чертежа изображать точки и векторы въ пространствѣ, то этимъ же способомъ получаемъ возможность изображать и точки пространства четвертаго измѣренія, а слѣдовательно и кри-

выя, и образы всякаго другого рода въ этомъ пространствѣ.

Для поясненія на фиг. 20, изображена плоская кривая, а именно кругъ. Точки a, a' и b, b' есть точки пересѣченія съ плоскостью подобія, соотвѣтствующею точечному пространству и значитъ есть точки пересѣченія этого круга съ точечнымъ пространствомъ. Такъ какъ это кругъ, то значитъ кругомъ будетъ ортогональная проекція начальныхъ точекъ векторовъ на плоскость подобія. Отсюда легко сдѣлать заключеніе и объ изображеніи шара; ABC слѣды плоскости, въ которой находятся начальныя точки изображаемаго круга.

