Записки Ленинградского Горного Института, том XII, вып. 3, 1939
Annales de l'Institut des Mines à Léningrad, vol. XII, liv. 3, 1939

Применение метода изображения координат к решению задач в перспективе

Инж. Г М. Дешевой

Anwendung der Methode der Koordinatendarstellung auf die Auflösung von Aufgaben in der Perspektive

Ing. G. M. Deschewoj

1. Введение

В настоящее время для изучения формы, размеров, деформаций и движений разных тел широко применяется перспективная съемка их, послужившая началом ряда новых наук, как, например, аэросъемки и киносъемки. На основе аэрофотоснимков и кинолент получается возможность решения упомянутых задач, причем в аэросъемке для этой цели пользуются оптическими трансформаторами. В киносъемке также пользуются рядом интересных, но довольно сложных приборов (шаровая доска, трехножный циркуль и т. п.). Кроме того и обыкновенные перспективные снимки, например различных зданий, позволяют получить, на основе их, при помощи механических трансформаторов, ортогональные проекции этих зданий. В основу всех упомянутых методов кладется или проективная геометрия или теория измерительной перспективы. Настоящая работа является введением в теорию упомянутых методов и заключает в себе элементы измерительной перспективы, т. е. решение метрических задач в перспективе, причем в основу этой теории положен метод 3 масштабов (координат), известный с давних времен, но теоретически обоснованный и обобщенный для разных методов изображений проф. М. А. Дешевым в 1913 г. в статье „Основания для объединения главнейших методов проектирования"

Помимо указанной практической цели методической целью работы является использование метода координат для систематического решения основных задач начертательной геометрии по методу конического проектирования.

В соответствии с изложенным настоящая работа разбита на две части: первая, которой отвечают §§ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, включает в себя основные положения метода конического проектирования и приемы решения метрических задач, а вторая содержит в себе ряд решений типичных примеров, могущих быть использованными при изложении курса начертательной геометрии.

2. Основные положения метода конического проектирования

При решении задач по методу конического проектирования с использованием изображений координат точек необходимо в выбранной координатной системе задать координатами полюс и построить проекции осей координат на картинной плоскости, взятой в той же системе.

Выберем за плоскость проекций (картины) плоскость V (рис. 1), за полюс точку S. Оси ox и oz координатной системы $oxyz$, как лежащие в плоскости V будут проектироваться без искажения. Для выяснения направления изображения (проекции) оси oy возьмем на ней отрезок oa_y и построим его коническую проекцию $o\,a_{y_1}$. Для этого нужно через полюс S и oa_y провести плоскость и найти линию пересечения ее с плоскостью V Определим упомянутую плоскость параллельными прямыми, для чего через полюс проведем прямую SK, параллельную оси oy. Прямая SK встречает плоскость V в точке s' (вертикальная проекция полюса) и, следовательно; линия пересечения плоскости V и построенной будет соединять точки s' и o. Эта линия и дает направление конической проекции oy_1, оси oy. Проводя из полюса луч через точку a_y до встречи с oy_1 в точке a_{y_1}, получим отрезок oa_{y_1}, который и даст требуемую проекцию.

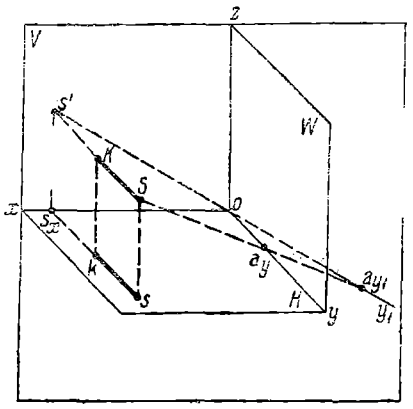


Рис. 1.

Итак: коническая проекция (изображение) оси oy проходит через начало координат и вертикальную проекцию полюса.

Проведем через полюс плоскость R, параллельную плоскости H, и покажем, что изображения прямых, параллельных плоскости H и параллельных друг другу, будут иметь общую точку, лежащую на следе R_v взятой плоскости.

На рис. 2 даны прямые AB и CF, параллельные плоскости H и между собой. Найдем их конические проекции. Проведем через полюс S прямую DE, параллельную заданным. Указанная прямая пересечет плоскость V в точке D, лежащей на следе R_v. Вертикальные следы прямых AB и CF будут соответственно V_1 и V_2. Коническая проекция прямой AB пройдет через точки D и V_1, потому что прямая DV_1 является вертикальным следом плоскости, проходящей через полюс и прямую AB, заданной параллельными прямыми DE и AB; соответственно проекция прямой CF пройдет через точки D и V_2. Точка D, являющаяся общей для изображений параллельных прямых, носит название точки схода. В перспективе точка S будет глазом, точка s' называется главной точкой, а след R_v носит название линии горизонта.

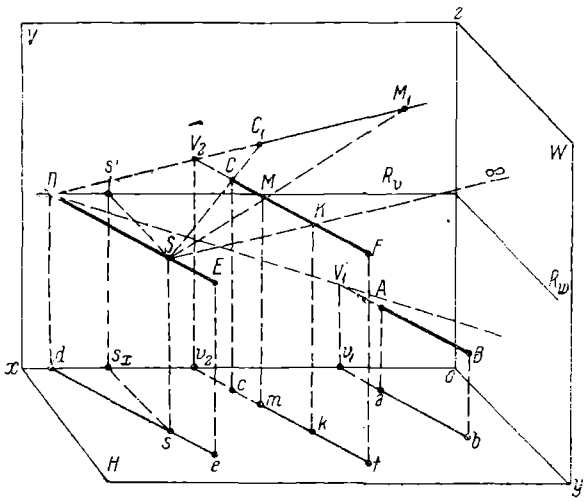


Рис. 2.

Изображения горизонтальных проекций взятых прямых также будут иметь точку схода в точке D, так как $AB \parallel CF \parallel ab \parallel cf$, а следовательно и прямой DE. Точка D, будучи общей для изображений параллельных прямых, является изображением точки их пересечения, а так как параллельные прямые пересекаются в бесконечности, то точка D есть не что иное, как изображение бесконечно удаленных точек взятых прямых. Из изложенного

можно заключить, что линия R_v является геометрическим местом изображений бесконечно удаленных точек прямых, параллельных плоскости H или лежащих в ней.

Нетрудно показать рассуждениями, аналогичными предыдущему, что изображения произвольных параллельных прямых также встречаются в точке схода, находящейся вне линии R_v. Необходимо отметить, что вообще точка схода изображений параллельных прямых и точка схода изображений отвечающих им горизонтальных проекций всегда лежат на общем перпендикуляре к R_v, ибо отмеченные точки являются совместными проекциями одной и той же бесконечно удаленной точки прямых.

Так как R_v является геометрическим местом точек схода прямых, лежащих на плоскости H, то изображение горизонтальной проекции бесконечно удаленной точки любой прямой всегда будет лежать на R_v, а изображение самой точки на перпендикуляре к R_v, проходящем через изображение горизонтальной проекции той же точки.

Проекцию точки схода на плоскость V будем обозначать малой буквой точки схода с индексом 1, напр. d_1.

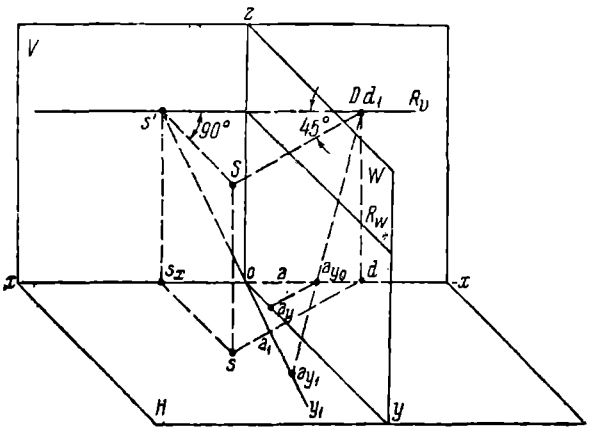


Рис. 3.

Рассмотрим изменение длин проекций отдельных отрезков прямой CF (рис. 2). Возьмем на ней произвольную точку M, коническая проекция M_1 которой найдется в точке встречи луча SM с прямой DV_2. Отрезок C_1M_1 будет являться конической проекцией отрезка CM. Если иметь в виду только конический метод, как таковой, и брать далее точки в направлении от C к K, то с увеличением длины проектируемого отрезка будет увеличиваться и длина проекции, причем увеличение длины проекции непропорционально увеличению длины отрезка.

Когда проектирующий луч SK сделается параллельным плоскости V, то длина проекции отрезка CK обратится в бесконечность. Идя далее от точки K к точке F, убедимся, что длина проекций начнет уменьшаться, причем проекция точки F расположится на DV_2 слева от точки D.

Из изложенного видно, что в методе конического проектирования равные и параллельные отрезки искажаются в проекциях неодинаково, величина искажения меняется в зависимости от положения таких отрезков в пространстве.

В применении к перспективе отмеченные выше положения остаются в силе, но сами проекции строятся при условиях, чтобы изображаемый предмет находился всегда перед глазом S наблюдателя и на расстоянии от него, в 2,5—3 раза большем наибольшего размера самого предмета, т. е. коническая проекция в этом случае строится с определенными ограничениями.

Остановимся на вопросе о построении конической проекции отрезка заданной длины, лежащего на оси oy.

Пусть длина отрезка oa_y, лежащего на оси oy, в действительности равна a (рис. 3).

Если на оси ox от точки o отложим отрезок oa_{y_0}, длина которого равна a, и соединим точки a_y и a_{y_0}, то прямая $a_y a_{y_0}$ составит в пространстве углы в 45° с осями ox и oy. Построим коническую проек-

цию прямой $a_y a_{y_0}$. Для этой цели проведем через полюс прямую SD, параллельную $a_y a_{y_0}$, и отметим точку D ее встречи с R_v. Следом прямой $a_y a_{y_0}$ на плоскости картины является точка a_{y_0}, а прямой SD точка D, поэтому изображение отрезка $a_y a_{y_0}$ пройдет через точки D и a_{y_0}. Прямая Da_{y_0} отсечет на изображении oy_1 оси oy требуемый отрезок $o\,a_{y_1}$ длиной a_1. Точка D является точкой схода для изображений прямых, лежащих на плоскости H или параллельных ей и составляющих с плоскостями V и W углы в 45°. Точку D (d_1) при проектировании по перспективному методу называют точкой расстояний.

Положение точки D на линии горизонта определяется отрезком $s'D$, длина которого равна действительной длине координаты $y = ss_x$ полюса (треугольник $Ss'd$, равнобедренный; $Ss' = s^1s'D$). Длину a можно было бы отложить по оси ox влево от точки o. В этом случае точка D была бы получена на R_v слева от точки s'.

Как выше выяснено, для получения точки D должна быть задана координата y полюса. Такое задание проще всего осуществить, задавая полюс вертикальной s' и горизонтальной s проекциями, как это обычно делается в ортогональном методе, используя совмещение плоскости H с плоскостью V.

Имея в виду изложенные выше положения, можно перейти к решению основных задач начертательной геометрии.

3. О точке

Пусть требуется построить коническую проекцию точки A, заданной координатами x, y и z.

Берем (рис. 4), в соответствии с указанным выше, конические проекции осей ox, oy и oz координат и ортогональные проекции s и s' полюса. Проведем линию горизонта R_v и найдем на ней, справа или слева от s' точку расстояний d_1 $(s'd_1 = ss_x)$. Отложив на ox и oz отрезки $oa_x = x$ и $oa_z = z$ и построив помощью отрезка $oa_{y_0} = y$ и точки d_1, $oa_{y_1} = y_1$, получим изображения координат точки A.

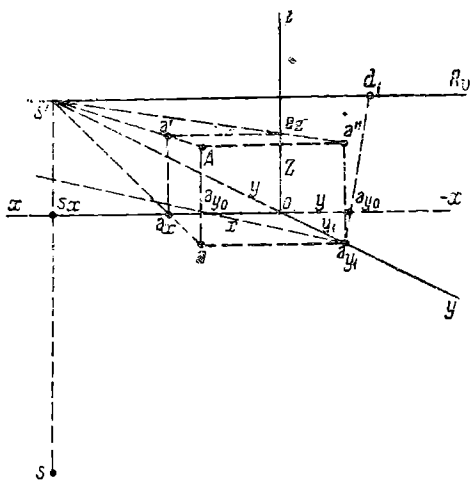


Рис. 4.

Изображение a' вертикальной проекции точки найдется как точка пересечения отрезков $a'a_z \parallel ox$ и $a_x a' \parallel oz$. Ребра aa_x, oa_y, Aa' и $a''a_z$ параллелепипеда координат параллельные между собой, параллельны оси oy, а потому их изображения будут иметь точкой схода $s's^1$. Изображения aa_{y_1} и Aa'' ребер aa_y и Aa'' как прямых, параллельных оси ox, будут параллельны ее изображению. На основании сказанного изображение горизонтальной проекции точки A найдется как точка встречи a прямых $s'a_x$ и ay_1a, а изображение профильной проекции a'' — в точке встречи прямых $s'a_z$ и $a_{y1}a''$. Точка встречи A прямых Aa, $s'a'$ и $a''A$ будет искомым изображением заданной точки, а точки a, a' и a'' — изображениями трех ее ортогональных проекций.

По аналогии с методом аксонометрического проектирования, при изображении точки по методу конического проектирования, достаточно задать изображения точки и одной из ее проекций, что равносильно

построению изображений трех соответствующих ребер параллелепипеда координат, помощью которых легко определить истинные значения координат заданной точки.

На рис. 5 построены изображения точек B (— 24, 11, 16) C (17, 6,— — 25) и E (14, — 10, 25). Прием построения таков же, как и в предыдущем случае. Для точки E, имеющей отрицательную координату y, истинное значение координаты oe_{y_0} надо отложить по оси ox влево от начала координат и затем построить ее изображение oe_y так же, как и для точки A (рис. 4).

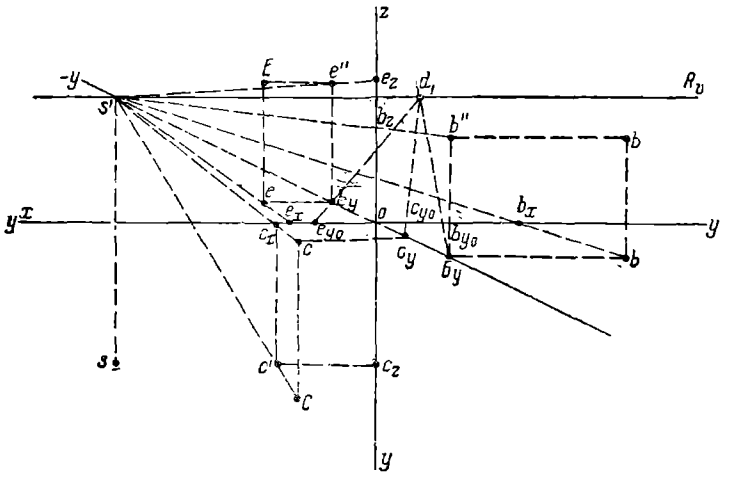


Рис. 5.

Обратимся к вопросу об определении видимости, Отправным пунктом для определения видимости на ту или иную плоскость проекций являются точки, проекции которых на эту плоскость проекций сливаются. Очевидно, что эти точки лежат на проектирующем на упомянутую плоскость проекций луче.

Пусть две точки, например A и B в пространстве (рис. 6), лежат на проектирующем луче SA_0, тогда их конические проекции A_0 и B_0 совпадут Если предположить, что глаз наблюдателя помещен в полюс, то точка A, как лежащая ближе к глазу, будет видна и ее проекция A_0 перекроет проекцию B_0 точки B.

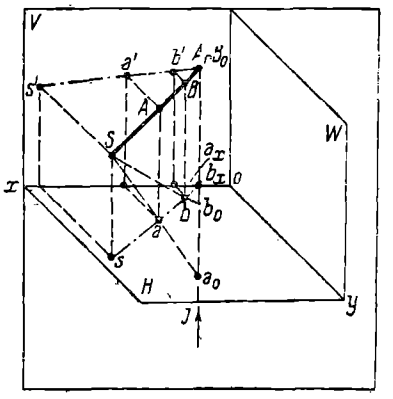


Рис. 6.

Если точки A и B будут заданы их изображениями A_0 и B_0 и изображениями a_0 и b_0 горизонтальных проекций, то для определения видной точки надо найти изображение I горизонтальной. проекции проектирующего луча и определить, какую из точек (a_0 или b_0) встречает раньше упомянутое изображение I.

Нетрудно показать, что коническая проекция горизонтальной проекции проектирующего луча всегда параллельна изображению оси oz. Действительно, для получения изображения I надо через точку s и ab провести плоскость, которая будет не что иное, как горизонтально проектирующая плоскость трапеции SA_0a_xs, пересекающая плоскость V по линии A_0a_x, параллельной изображению оси oz. I встречает раньше точку a_0, поэтому A_0 перекрывает B_0. Если точки A и B будут заданы проекциями A_0, B_0 и a', b', тот

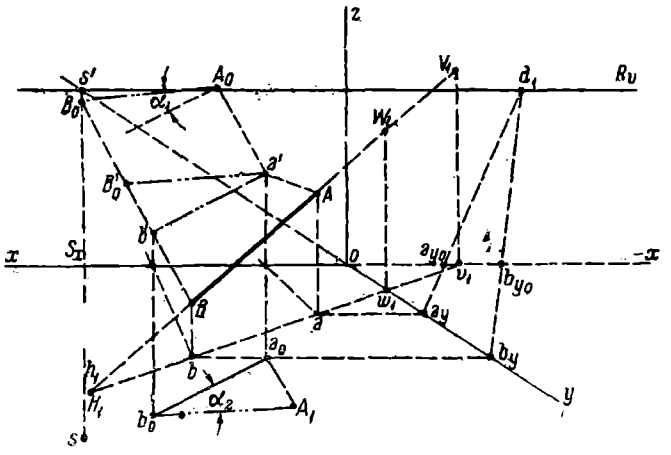
же результат получим, построив l_1 — изображение вертикальной проекции проектирующего луча, встречающее раньше точку a'.

Совершенно очевидно, что вопрос об определении видимости имеет смысл только тогда, когда можно установить направление лучей зрения, т. е. когда все проектируемые точки лежат по одну сторону от полюса (глаза), так как в противном случае глаз не может видеть всех точек одновременно.

4. Перспектива прямой. Определение истинной длины отрезка. Определение углов между прямой и плоскостями проекций. Деление отрезка на равные части

Установив прием задания точки, мы можем задать прямую изображениям двух ее точек.

На рис. 7 взята прямая, заданная изображениями точек A и B, определяющими ее отрезок AB. Вопрос о нахождении следов прямой решается в полной аналогии с методом аксонометрического проектирования. На рис. 7 найдены следы прямой AB H_1, h_1 на пл. H, V_1, v_1 на пл. V и W_1, w_1 на пл. W

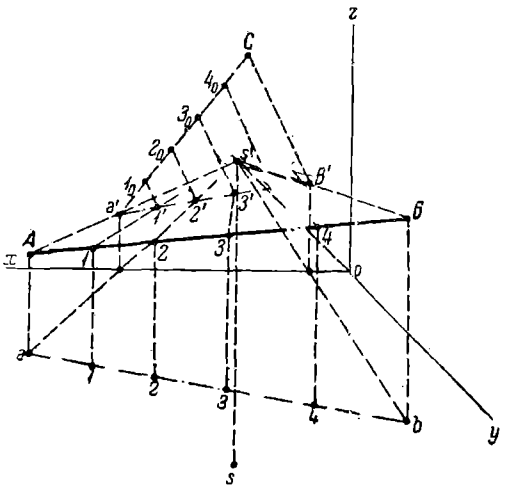


Перейдем к задаче об определении истинной длины отрезка. Пусть требуется найти истинную длину отрезка AB (рис. 7). Совместим трапецию $Aa'b'B$ вращением вокруг $a'b'$ с плоскостью V, тогда отрезки Aa' и Bb' займут положения $a'A_0$ и $b'B_0$, перпендикулярные к $a'b'$, и отрезок A_0B_0 доставит истинную длину отрезка AB. Длины отрезков A_0a' и B_0b' соответственно равны длинам отрезков oa_{y_0} и ob_{y_0}, являющихся истинными значениями координат y точек A и B. Трапецию $A_0a'b'B_0$ можно было бы заменить прямоугольным треугольником $a'B'_0b'$, катет $b'B'_0$ которого равен разности координат y точек B и A. В данном случае координаты y, как имеющие одинаковые знаки, отложены по одну сторону от проекции $a'b'$

Если бы знаки координат были различны, то значения координат пришлось бы отложить на перпендикулярах к $a'b'$ в разные стороны от нее.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.

Определим углы между прямой AB и плоскостями H и V (рис. 7). Угол α_1 между AB и плоскостью V легко находится из трапеции $a'A_0B_0b'$. Для определения



угла α_2 между AB и плоскостью H совместим плоскость H с плоскостью V. Из треугольника $a_0b_0A_1$, построенного способом, указанным выше, найдем величину угла α_2.

Рис. 8 иллюстрирует задачу о делении отрезка на равные части. Даны изображения отрезка AB и его горизонтальной проекции; требуется разделить отрезок, например, на пять равных частей.

Изображение $a'b'$ вертикальной проекции отрезка, как лежащее в плоскости картины, будет разделено на равные части, поэтому, построив $a'b'$, делим его, пользуясь общим приемом геометрии (помощью вспомогательного отрезка $a'C$) на пять равных частей в точках $1', 2', 3'$ и $4'$. Проведя лучи $s'1'$, $s'2'$ и т. д. найдем на AB изображения $1, 2, 3, 4$ соответствующих точек. Изображения $1, 2, 3, 4$ горизонтальных проекций точек $1, 2, 3, 4$ получим на ab обычным способом.

5. Относительные положения прямых

Две прямые в пространстве могут: а) пересекаться, в) быть параллельными, с) скрещиваться.

На рис. 9 изображены пересекающиеся друг с другом в точке K горизонталь AB и фронталь EF и найдены их следы.

Изображение EF фронтали параллельно ей, так как сама прямая параллельна плоскости картины, но длина EF неравна длине одноименного отрезка фронтали, ибо при коническом проектировании только элементы, лежащие в плоскости картины, будут проектироваться без искажения. Для определения истинной длины отрезка EF достаточно построить $e'f'$, изображение его вертикальной проекции, длина которой в данном случае и будет искомой. Точка схода H_1, изображений горизонтали и ее горизонтальной проекции является изображением ее горизонтального следа, находящегося в бесконечности.

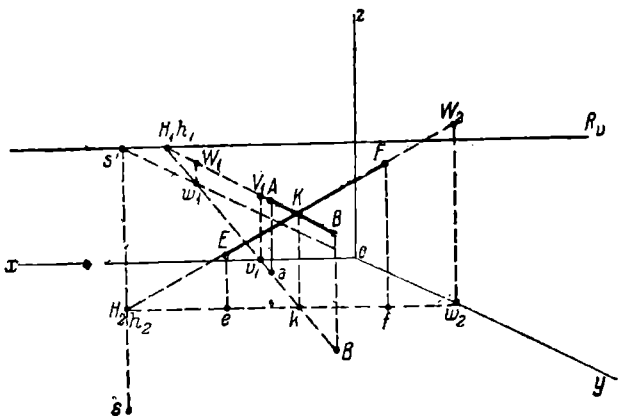


Рис. 9.

На рис. 10 решена задача о проведении прямой, параллельной заданной, проходящей через заданную точку. Даны: прямая AB,ab и точка C,c; требуется через точку C провести прямую EF, параллельную AB.

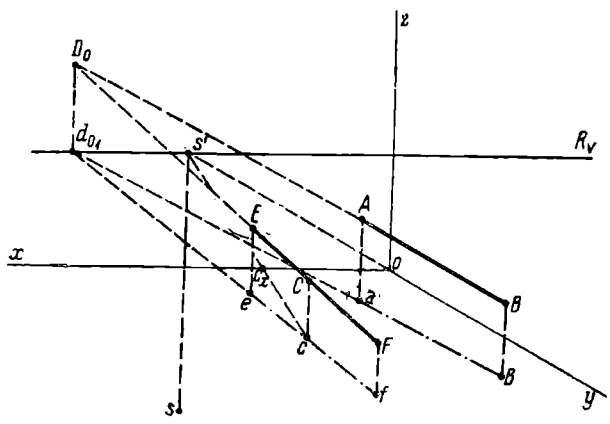


Рис. 10

Изображения горизонтальных проекций параллельных прямых должны иметь общую точку схода d_{01}, которую найдем в точке встречи ab с R_v. Точка схода D_0 изображений прямых, как указывалось, должна находиться на перпендикуляре к R_v, восстановленном из точки d_{0_1} и на продол-

жении изображения AB. На основании сказанного изображение горизонтальной проекции искомой прямой получим, соединив точки c и d_{0_1}. Ограничив построенные изображения в точках E, e и F, f, получим решение поставленной задачи.

У скрещивающихся прямых, как не имеющих общей точки, точки пересечения изображений одноименных проекций и изображений самих прямых не находятся на линии, параллельной соответствующей оси координат.

Задача об определении угла между двумя прямыми будет решена при изложении метода совмещения.

6. О плоскости

Способы задания плоскости при коническом проектировании такие же, как и в других методах начертательной геометрии.

На рис. 11 дана плоскость P, определенная следами P_h, P_v и P_w и параметрами $oP_x = 25$, $oP_y = 21$ и $oP_z = 35$.

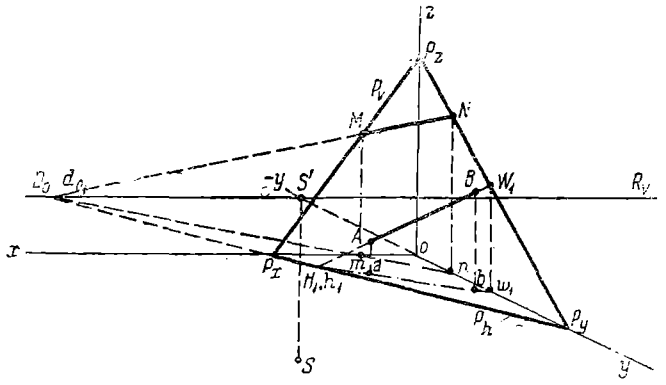


Рис. 11.

На рис. 12 дана вертикально проектирующая плоскость Q (43, ∞, 38). Следы Q_h и Q_w плоскости Q параллельны оси oy, а потому изображения их имеют точкой схода — точку s'.

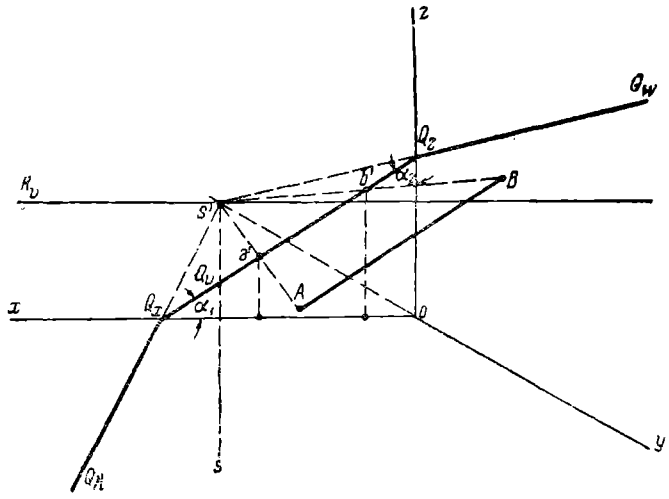


Рис. 12.

Перейдем к заданию плоскости в виде плоской фигуры.

При построении произвольного плоского n-угольника следует пользоваться общим приемом начертательной геометрии, т.е. взять произвольно три вершины n-угольника и остальные вершины строить (способом диагоналей) в плоскости взятых трех.

На рис. 13 показано изображение параллелограма $ABCE$. Его стороны попарно параллельны, а потому изображения их проходят через соответственные точки схода D_0 и D_2.

Остановимся на вопросе о построении точек и прямых, лежащих в заданных плоскостях.

При построении точки, лежащей в заданной плоскости, обычно строят прямую, лежащую в этой плоскости, и на ней берут требуемую точку. Прямая же лежит в заданной плоскости, если две ее точки лежат в этой плоскости. В случае задания плоскости следами за указанные

точки берут следы прямой, которые должны находиться на одноименных следах плоскости.

В соответствии с изложенным, на фиг. 11 в плоскости P построены произвольная прямая AB и горизонталь MN. Горизонталь параллельна

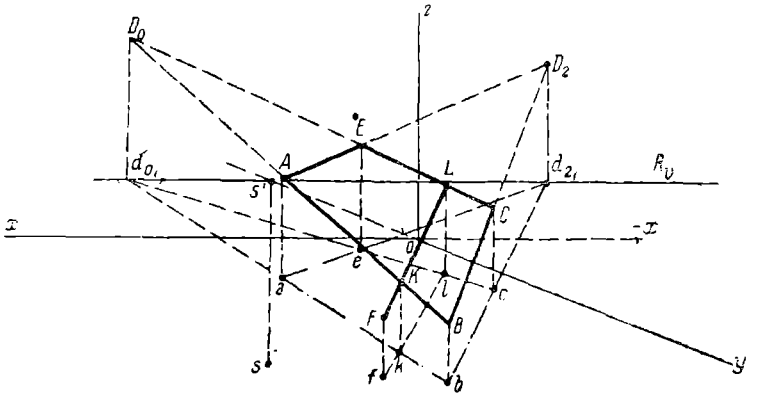


Рис. 13.

следу P_h, а потому изображения ее и P_h имеют общую точку схода D_0, лежащую на R_v. На рис. 12 в плоскости Q построена фронталь, заданная изображениями ее отрезка AB и его вертикальной проекции $a'b'$ Изображение фронтали параллельно изображению следа Q_v.

На рис. 14 в плоскости P (—28, 20, 17) построена профильная линия MN, mn; точкой схода изображений, параллельных друг другу, оси oy и mn, является $s'(d_0)$, а точкой схода для изображений MN и P_w точка D_0.

На рис. 13 в плоскости параллелограма $ABCE$ построена точка F, лежащая на прямой KL.

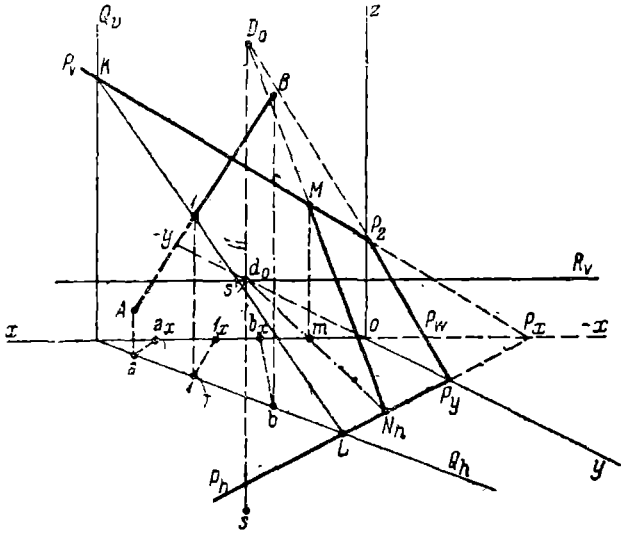


Рис. 14.

7. Относительные положения двух плоскостей

Различают три случая взаимного расположения плоскостей: а) плоскости параллельны, b) перпендикулярны, с) пересекаются.

Одноименные следы параллельных плоскостей параллельны, поэтому изображения этих следов будут иметь общую точку схода.

На рис. 15 показаны параллельные плоскости P и Q. Изображения следов P_v и Q_v параллельны, а горизонтальных имеют общую точку схода D_0, лежащую на линии горизонта.

Линия пересечения двух плоскостей, как лежащая в каждой из них, должна иметь следы лежащими одновременно на одноименных следах обеих плоскостей, т. е. в точках пересечения этих следов.

На рис, 14 даны пересекающиеся плоскости P (—28, 20, 17) и Q (46, 96, ∞). Линия пересечения проходит через точки пересечения K и L соответствующих следов плоскостей. На рис. 16 показаны пересекающиеся треугольники KLM и ABC. Для определения точек *1* и *2* линии

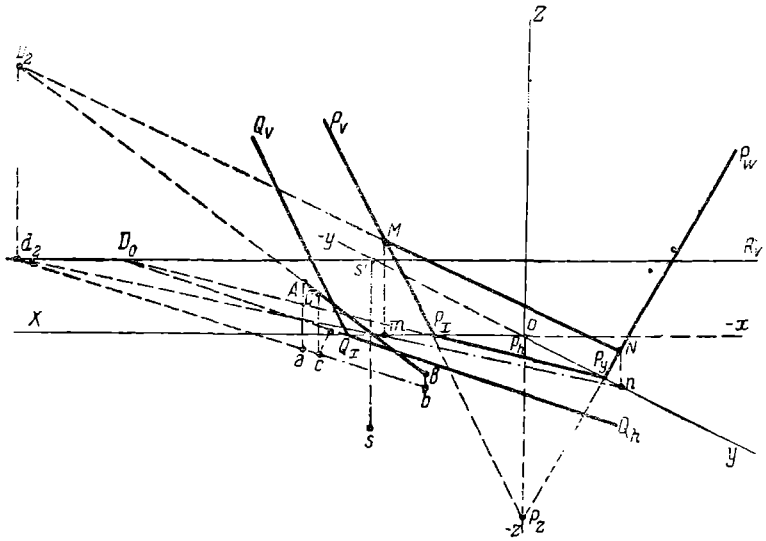


Рис. 15.

пересечения треугольников через стороны KL и KM треугольника KLM проведены вспомогательные горизонтально проектирующие плоскости (следы их не показаны) и найдены способом, указанным в § 9, их линии пересечения EG и FN с треугольником ABC. Точка *1* является точкой встречи EG и KL, а точка *2* — точкой встречи прямых FN и MK. Невид-

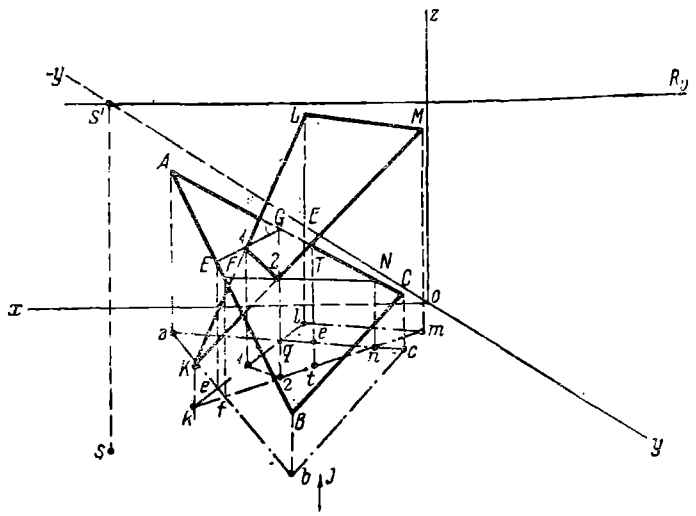


Рис. 16.

ные линии изображений треугольников показаны пунктиром и определены помощью точек E и T (способом, указанным в § 3), конические проекции которых совпадают.

К решению вопроса о построении плоскости, перпендикулярной заданной, обратимся ниже (§ 9).

8. Метод совмещения

Применение метода совмещения к решению метрических задач

При определении истинных размеров геометрических элементов, заданных коническими проекциями, сравнительно просто может быть использован только „метод совмещения“ [1] Применение методов „вращения“ или „перемены плоскостей проекций“ сложно, ибо вспомогательные построения, которые нужно было бы производить в каждом отдельном случае, весьма хлопотливы. Совмещение плоскости, в которой лежит элемент, истинные размеры которого надо определить, следует производить только с плоскостью картины.

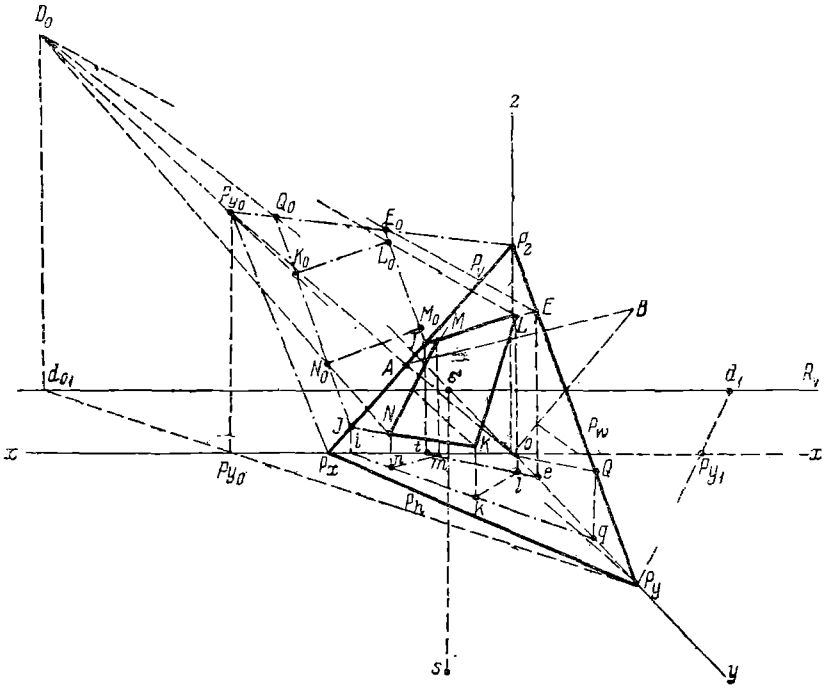


Рис. 17.

Рассмотрим совмещение плоскости P (30, 30, 37) рис. 17. Найдем совмещенное с плоскостью V положение P_{y_0} точки P_y. Для этого, как известно, надо найти вертикальную проекцию этой точки (начало координат), опустить из нее перпендикуляр oA на P_v и на его продолжение, отложить отрезок AP_{y_0}, равный гипотенузе AB треугольника AoB. Катетами треугольника AoB являются отрезки: oB, равный истинному значению oP_{v_1} параметра oP_y и oA. Точку P_{y_0} можно найти иначе, для этого надо определить истинные длины следов P_w и P_h, как гипотенуз прямоугольных треугольников, катетами которых являются истинные длины соответствующих параметров плоскости.

Совмещение производится путем вращения плоскостей вокруг следа P_v, поэтому точки P_x и P_z не переместятся и, следовательно, отрезки $P_x P_{y_0}$ и $P_z P_{y_0}$ будут являться совмещенными с плоскостью V положениями следов P_h и P_w. Изображением хорды поворота для точки P_y является

[1] В данном случае речь идет исключительно о методах начертательной геометрии. Решение метрических задач в перспективе возможно методами проективной геометрии и трансформации.

отрезок $P_y P_{y_0}$. Хорды поворота для всех точек совмещаемой плоскости параллельны между собой, поэтому их изображения будут встречаться в общей точке схода D_0. Для получения точки D_0 найдена сначала d_{o_1} — точка схода изображения p_{y_0} P_y горизонтальной проекции хорды поворота.

Если требуется совместить какую-либо точку, лежащую в заданной плоскости, то, проведя через точку произвольную прямую, также лежащую в плоскости, совмещаем ее с плоскостью V и на совмещенном положении прямой, помощью хорды поворота, находим положение точки. Так на рис. 17 через точку K проведена прямая IQ, причем точка J лежит на P_v, а точка Q на P_w. Точка J, как лежащая на P_v, неподвижна. Совмещенное положение точки Q найдется в точке встречи Q_0 изображения хорды поворота QD_0 с совмещенным положением P_z P_{y_0} следа P_w. Для точки K изображением хорды поворота явится прямая KD_0,

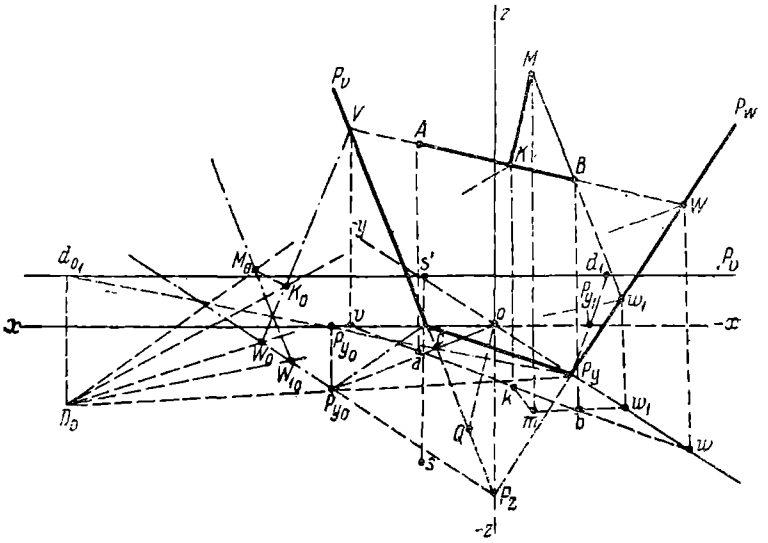


Рис. 18.

которая в точке встречи с JQ_0 даст совмещенное положение K_0 точки K. Подобным же образом решается задача о построении проекций точек, заданных совмещенным положением.

Обратимся к применению метода совмещения к решению задач. Остановимся на построении плоских фигур, лежащих в заданной плоскости. Пусть требуется, например, построить изображение квадрата, лежащего в плоскости P (30, 30, 37) рис. 17. Для этого строим совмещенное положение K_0 L_0 M_0 N_0 требуемого квадрата и продолжаем его стороны $K_0 N_0$ и $L_0 M_0$ до встречи в точках J, T и Q_0 E_0 с следами P_v и P_z P_{y_0}. Построив изображения прямых JQ и TE, наносим на них, помощью хорд поворота, точки K, L, M, N, являющиеся изображениями вершин квадрата. Изображение горизонтальной проекции квадрата построено обычным путем.

Пользуясь методом совмещения и изложенным выше, можно решить ряд метрических задач.

На рис. 18 показано решение задачи об определении расстояния от точки M до прямой AB. Через точку M и отрезок AB проведена плоскость P, следы которой найдены обычным путем, помощью отрезка MB, соединяющего заданную точку с одной из точек заданной прямой. Совместив плоскость P с плоскостью V (отрезок $CP_{y_0} = oQ$—гипотенуза

треугольника CoQ, причем $CQ = oP_{y_1}$ и $oP_{y_0} \perp P_v$), и, проведя $M_0 K_0$ перпендикулярно VW_0, будем иметь длину отрезка $M_0 K_0$, которая является искомой. Определив точку D_0 с хода изображений хорд поворота при указанном совмещении и вернув плоскость P в начальное положение, получим изображения точки K и отрезка MK, являющегося перпендикуляром к AB.

Задача об определении расстояния между параллельными прямыми сводится к предыдущему. Достаточно взять точку на одной из прямых и найти расстояние от нее до другой прямой.

Помощью метода совмещения легко решить задачу об угле между двумя прямыми.

Углом между двумя прямыми называется угол между параллельными им прямыми, проходящими через одну точку: поэтому для определения величины упомянутого угла достаточно построить следы плоскости, в которой лежат прямые, и совместить ее с плоскостью картины.

9. Относительное положение прямой и плоскости. Решение метрических задач

В отношении плоскости прямая может располагаться следующим образом: а) прямая лежит в плоскости, b) прямая параллельна плоскости, с) прямая пересекает плоскость, d) прямая перпендикулярна плоскости.

Случай a рассмотрен в § 6.

Задача о проведении через заданную точку C прямой AB, параллельной заданной плоскости P, решена на рис. 15. Для этой цели построено изображение некоторой прямой MN, лежащей в плоскости P, и через точку C проведена параллельная ей искомая прямая AB.

На рис. 14 определена точка 1 пересечения прямой AB с плоскостью P. Через прямую проведена вспомогательная, горизонтально проектирующая плоскость Q, и найдена линия пересечения KL плоскостей P и Q, которая в точке встречи с AB и доставит искомую точку 1.

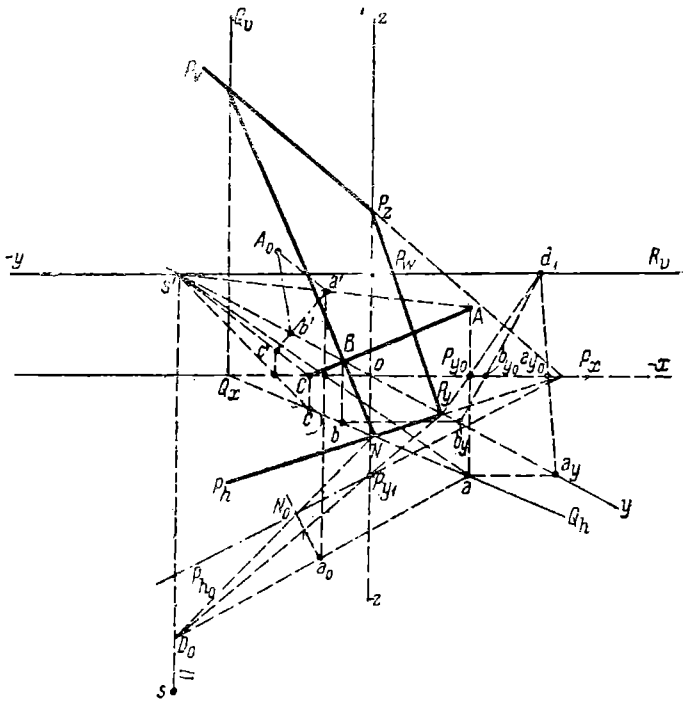


Рис. 19.

На рис. 19 решена задача о построении перпендикуляра к заданной плоскости. Дана точка A и плоскость P, требуется из точки A опустить перпендикуляр на плоскость P Совместим плоскость H с плоскостью V и найдем совмещенные положения P_{h_0} следа P_h и a_0 точки a.

При указанном совмещении точка P_x не изменит своего положения, точка же P_y займет на оси oz положение P_{y_1}, причем отрезок oP_{y_1} равен отрезку oP_{y_0} — истинной длине координаты y точки P_y. Изображением хорды поворота точки P_y явится отрезок $P_y P_{y_1}$ Точкой схода

изображений хорд поворота будет точка D_0, лежащая на линии ss^1, так как горизонтальной проекцией хорды поворота $P_y\ P_{y_1}$ будет являться ось oy, изображение которой имеет точкой схода s' Точка D_0 определится как точка встречи прямой $D_0\ s'$, перпендикулярной R_v и $P_yP_{y_1}$. Совмещенное положение a_0 точки a найдется как точка встречи хорды поворота $D_0\ a$ с линией $a'\ a_0$, перпендикулярной оси ox, так как при совмещении плоскости H с плоскостью V горизонтальная и вертикальная проекции точки располагаются на одном перпендикуляре к оси ox. Горизонтальная проекция перпендикуляра к плоскости перпендикулярна ее горизонтальному следу, поэтому из a_0 проведем прямую $a_0\ N_0$, перпендикулярную P_{h_0}, и отметим ее точку встречи N_0 с P_{h_0} Помощью изображения $D_0\ N_0$ — хорды поворота точки N_0 —получим ее изображение N находящимся на P_h. Соединив точки a и N прямой, будем иметь изображение горизонтальной проекции перпендикуляра к плоскости P. Ограничим изображение горизонтальной проекции перпендикуляра в произвольной точке c. Построив изображение $a'c'$ вертикальной проекции перпендикуляра, которое, как находящееся в картинной плоскости, будет перпендикулярно следу P_0, найдем на нем точку c' Зная точки c и c', строим обычным способом точку C, соединив ее с точкой A, получим изображение AC перпендикуляра к плоскости P.

Пользуясь изложенными положениями, перейдем к решению метрических задач. Определим расстояние AB от точки A до плоскости P рис. 19. Расстояние от точки до плоскости измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Опустив из точки A перпендикуляр на плоскость P, помощью горизонтально проектирующей плоскости Q, найдем точку встречи B перпендикуляра AC с плоскостью P. Отрезок AB является искомым, его истинная длина A_0b' определена способом, изложенным в § 4. Задачи об определении расстояний от прямой до плоскости, ей параллельной, и между двумя параллельными плоскостями сводятся к только что рассмотренному случаю. Почти аналогично определяется расстояние между двумя скрещивающимися прямыми. Пусть требуется определить расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD. На одной из прямых, например CD, возьмем точку E, через которую проведем прямую KL, параллельную AB. Найдя следы прямых KL и CD, построим следы плоскости P, в которой лежат эти прямые. Определив расстояние от любой точки прямой AB до плоскости P, получим требуемый отрезок.

Остановимся на вопросе об определении углов. Решение задачи об определении угла между прямой и плоскостью, как указывалось ранее, сведется к определению угла между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость. Угол между прямой и произвольной плоскостью определяется обычно как дополнительный до 90° к углу между прямой и проектирующей какую-либо ее точку линией на эту плоскость, поэтому указанная задача сведется к случаю определения угла между двумя прямыми, рассмотренному ранее, в § 8.

Угол между проектирующей плоскостью и плоскостью проекций легко получить или непосредственно, или путем совмещения.

На рис. 12 показаны углы α_1 и α_2, составляемые соответственно плоскостью Q с плоскостями H и W Угол α между горизонтально проектирующей плоскостью P и плоскостью V на рис. 26 определен помощью совмещения плоскости H с плоскостью V

Мерой двугранного угла между плоскостями является линейный угол, полученный в пересечении упомянутых плоскостей плоскостью, перпендикулярной к их линии пересечения.

На рис. 20 определены углы α_1 и α_2 между плоскостью P и плоскостями проекций. Для нахождения линейного угла между плоскостями P и H проведена горизонтально проектирующая плоскость Q, перпендикулярная к P_h. Изображением угла α_1 является угол LKQ_x, образованный изображениями следа Q_h и линии пересечения плоскостей P и Q. Изображение плоскости Q построено путем совмещения плоскости H с плоскостью V После совмещения изображение Q_{ho} следа Q_h, как следа плоскости, перпендикулярной P_h (в данном случае горизонтально проектирующей), будет перпендикулярно к P_{ho}. Отметим точку K_1 пересечения P_{ho} и Q_{ho}, и помощью изображения хорды поворота D_oK_1 вернем ее в начальное положение K. Тогда изображение следа Q_h будет соединять точки Q_x и K. Для определения α_{1_0}—истинной величины угла α_1—совместим плоскость Q с плоскостью V След Q_h совместится с осью ox и отрезок Q_xK_o, равный длине отрезка Q_xK_1, будет являться истинной длиной отрезка Q_xK. Точка L неподвижна; поэтому K_oL будет совмещенным положением отрезка KL и угол $LK_oQ_x = \alpha_{1_0}$ искомым. Аналогично предыдущему для определения угла α_2 между плоскостями P и V проведем вертикально проектирующую плоскость T, перпендикулярную P_v. Изображение ее следа T_v, как лежащего в картинной плоскости, перпендикулярно P_v, а T_h пройдет через s' и T_x. Изображением угла между плоскостями P и V явится угол α_2 между MN и T_v. Совместим плоскость T с плоскостью V Совмещенное положение T_{h_0} следа T_h перпендикулярно T_v. Точка N не переместилась. Точка M займет положение M_0, которое найдем, отложив от точки T_x отрезок T_xM_0, равный истинной длине отрезка T_xM. След T_h параллелен оси oy, поэтому истинная длина отрезка T_xM будет равна длине отрезка oM_{y_0}, найденной обычным способом. Угол $M_0NT_x = \alpha_{2_0}$ — искомый.

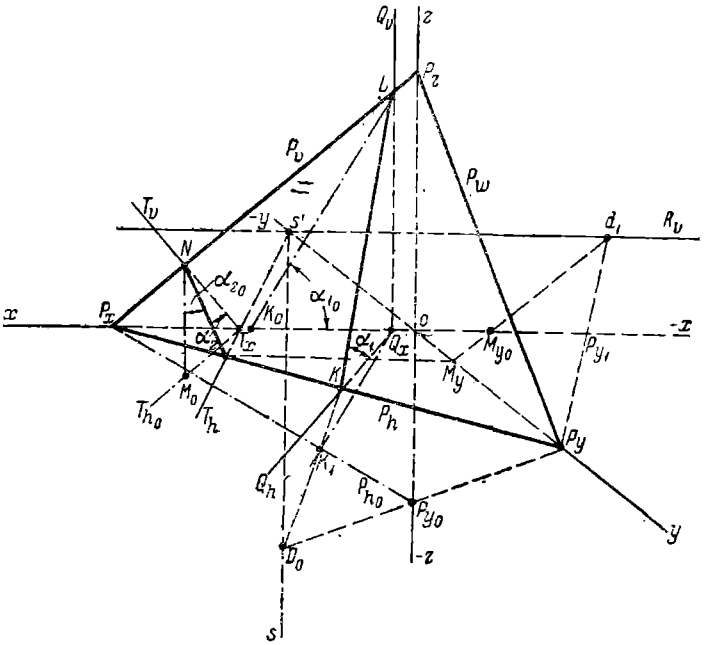


Рис. 20.

Если требуется определить угол между двумя произвольными плоскостями, то надо, как указывалось, провести плоскость, перпендикулярную к линии пересечения плоскостей.

Изображение вертикального следа упомянутой плоскости будет перпендикулярно к изображению вертикальной проекции линии пересечения плоскостей. Изображение горизонтального же следа, перпендикулярное горизонтальной проекции линии пересечения, надо строить так, как это показано на рис. 20.

Определив линию пересечения заданных плоскостей с построенной и совместив последнюю с плоскостью V, получим истинную величину искомого угла.

В заключение первой части настоящей статьи остановимся на вопросе о проведении плоскости, перпендикулярной заданной плоскости. Указанная задача решается обычным путем, т. е. из точки, через которую должна быть проведена искомая плоскость, надо опустить перпендикуляр на заданную плоскость и искомую плоскость построить так, чтобы упомянутый перпендикуляр лежал в ней.

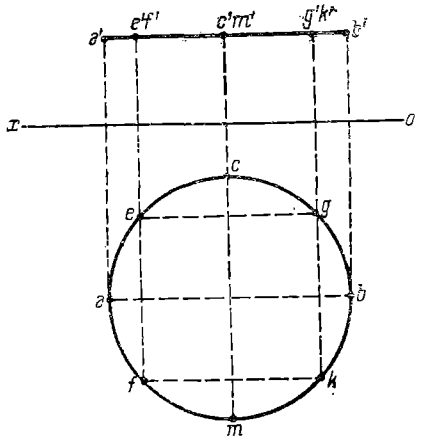


Рис. 21.

10. Об окружности

На рис. 22 обычным способом построено изображение окружности, заданной в ортогональных проекциях на рис. 21. Окружность параллельна плоскости H.

Совокупность лучей, проектирующих точки окружностей, представляет собой коническую поверхность с вершиной в полюсе, всякое сечение которой с плоскостью проекций, являющееся конической проекцией окружности или ее дуги, будет представлять собой одно из конических сечений (эллипс, параболу, гиперболу). В нашем случае изображение окружности—эллипс.

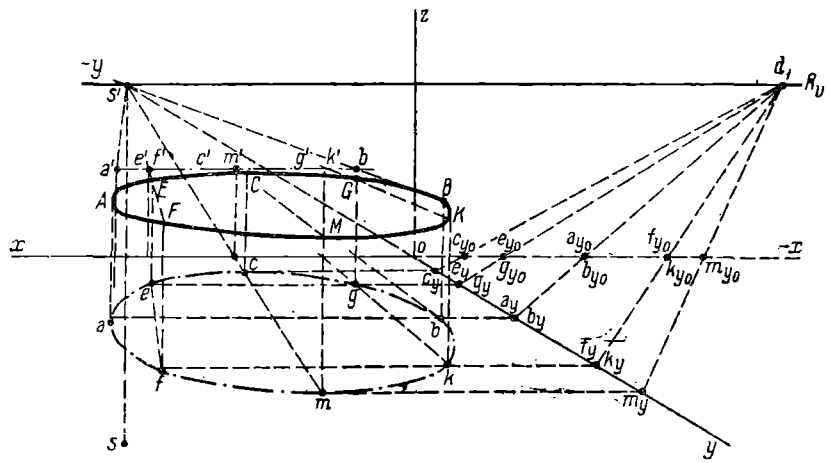


Рис. 22.

11. О многогранниках

Построение конических проекций поверхностей геометрических тел, по принципу, аналогично построению поверхностей в других методах проектирования.

Остановимся на характерных случаях.

На рис. 23 показана коническая проекция прямой четырехгранной призмы с основанием в плоскости V. Ребра призмы параллельны оси oy, и потому их изображения имеют точкой схода—точку s'

На рис. 30 (см. стр. 66) показаны изображения наклонной трехгранной призмы $ABCA_1B_1C_1$ произвольной высоты и ее горизонтальной проекции $abc\,a_1b_1c_1$. Основания: ABC лежит в плоскости H, а $A_1B_1C_1$ параллельно плоскости H. Задаемся конической проекцией основания ABC, а также направлением и длиной одного из ребер, например BB_1. Точка схода d_{01} изображений горизонтальных проекций ребер лежит на R_v.

Точка схода изображений ребер D_o (она не показана) найдется как точка встречи BB_1 с перпендикуляром к R_v, восстановленным из d_{o1}. Изображения AA_1 и CC_1 соответствующих ребер пройдут через точку D_o и точки A и C изображения ABC нижнего основания призмы.

Стороны верхнего основания призмы параллельны соответственным сторонам нижнего, поэтому изображение стороны B_1C_1 построим, найдя точку схода изображения линии BC (точка схода лежит на R_v и не показана), соединив ее с точкой B_1 и продолжив построенную прямую до встречи в точке C_1 с изображением CC_1. Совершенно так же легко построить изображения сторон верхнего основания A_1B_1 и A_1C_1.

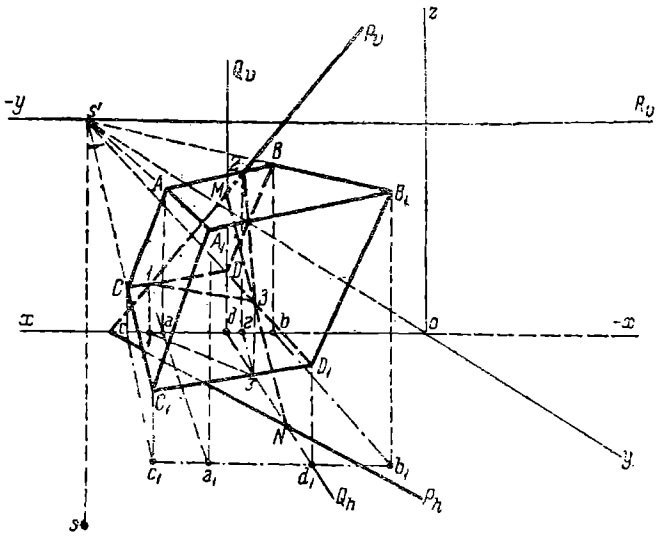


Рис. 23.

На рис. 25 построено изображение куба с основанием в плоскости P (30, 30, 37), причем основание куба—квадрат, изображение которого построено на рис. 17.

На рис. 24 показано построение изображения одного из ребер куба. Этот вопрос сводится к решению двух задач: 1) восстановлению перпендикуляра к плоскости из точки, лежащей в ней, и 2) построению изображения такого отрезка этого перпендикуляра, истинная длина которого равна длине стороны квадрата, изображенного на рис. 17. Первая задача решается так, как это было изложено в § 9; тем же путем, как и на рис. 19, построено изображение произвольного отрезка NC перпендикуляра.

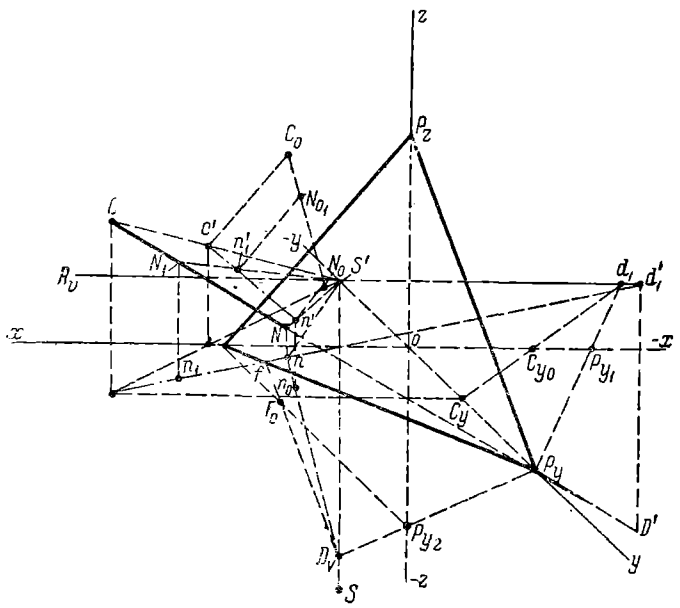


Рис. 24.

Для решения второй задачи определим способом трапеции истинную длину C_oN_o отрезка CN. Отложив от точки N_o отрезок N_oN_{o1}, равный длине стороны квадрата, и вернув в начальное положение трапецию $c'n'\ N_oC_o$, найдем изображения N_1 и n_1 точки N_1 и ее горизонтальной проекции.

Ребра куба взаимно параллельны, поэтому их изображения пересекаются в точке схода D', а изображения горизонтальных проекций

в точке d_1' рис. 25. Точкой схода изображений параллельных сторон верхнего основания куба K_1N_1 и M_1L_1 является точка D_3, а точкой схода изображений сторон K_1L_1 и M_1N_1—точка D_2 (она не показана). Соединим точку N_1 с D_3 прямой и продолжим ее до встречи с KK_1, в точке K_1, которую соединим с точкой D_2. Отметив точку L_1 пересечения K_1D_2 с LL_1, получим изображения N_1K_1 и K_1L_1 соответственных сторон верхнего основания куба. Изображения сторон M_1L_1 и N_1M_1 построим, соединив L_1 с D_3 (или N_1 с D_2) и отметив M_1 — точку встречи L_1D_3 с MM_1. Невидные линии показаны пунктиром и определены способом, изложенным в § 3.

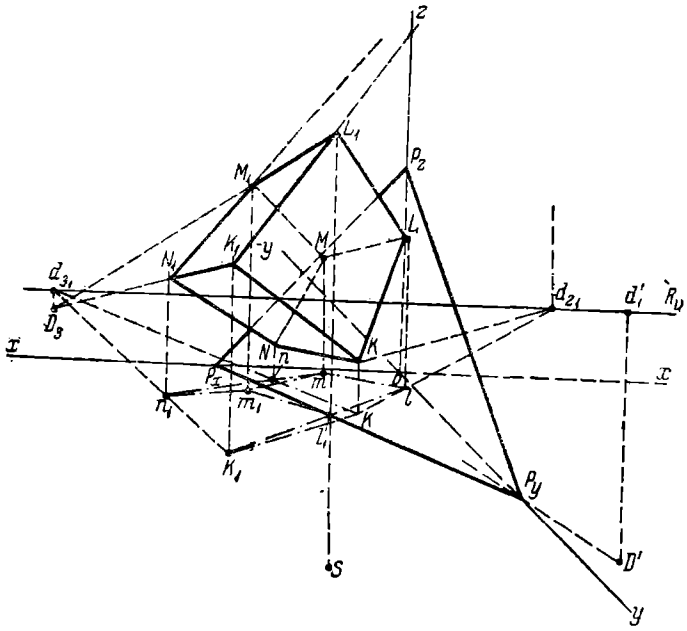


Рис. 25.

На рис. 26 показана коническая проекция правильной трехгранной пирамиды с основанием в плоскости P, перпендикулярной плоскости H. Хорды поворота

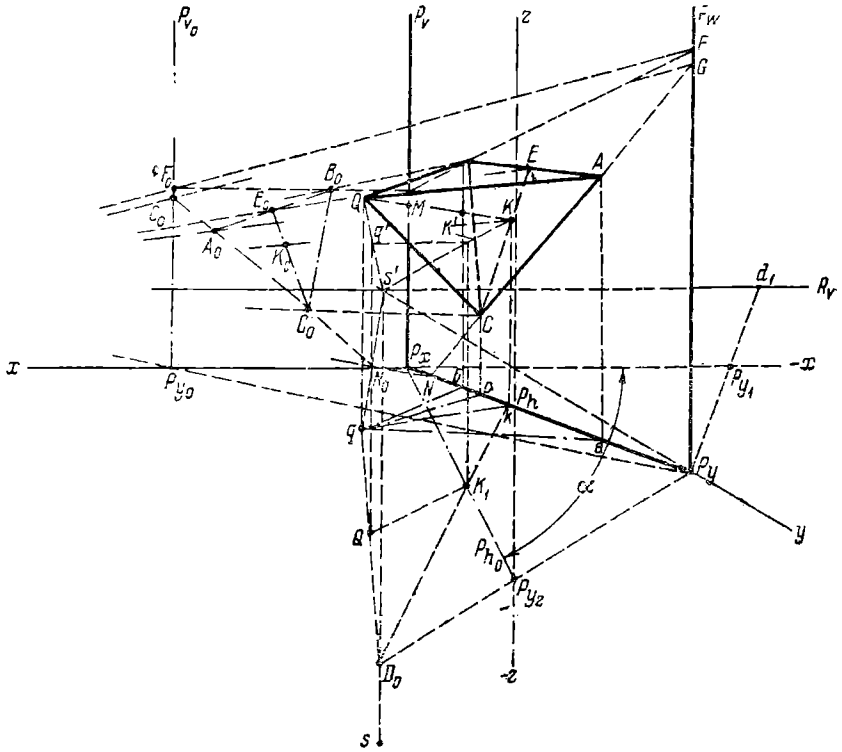


Рис. 26.

параллельны плоскости H, поэтому точка схода их изображений находится на линии горизонта. Изображения основания и высоты пирамиды построены аналогично предыдущему.

12. О телах вращения

На рис. 27 построено изображение прямого кругового конуса с основанием в вертикально проектирующей плоскости P. Следы P_h и P_w параллельны оси oy, поэтому после совмещения P_{h_0} и P_{w0} будут перпендикулярны P_v. Изображение хорды поворота найдено помощью точки K, лежащей на следе P_w. Отрезок P_zK_o равен отрезку oK_{yo}, являющемуся истинной длиной отрезка P_zK. Точкой схода изображений

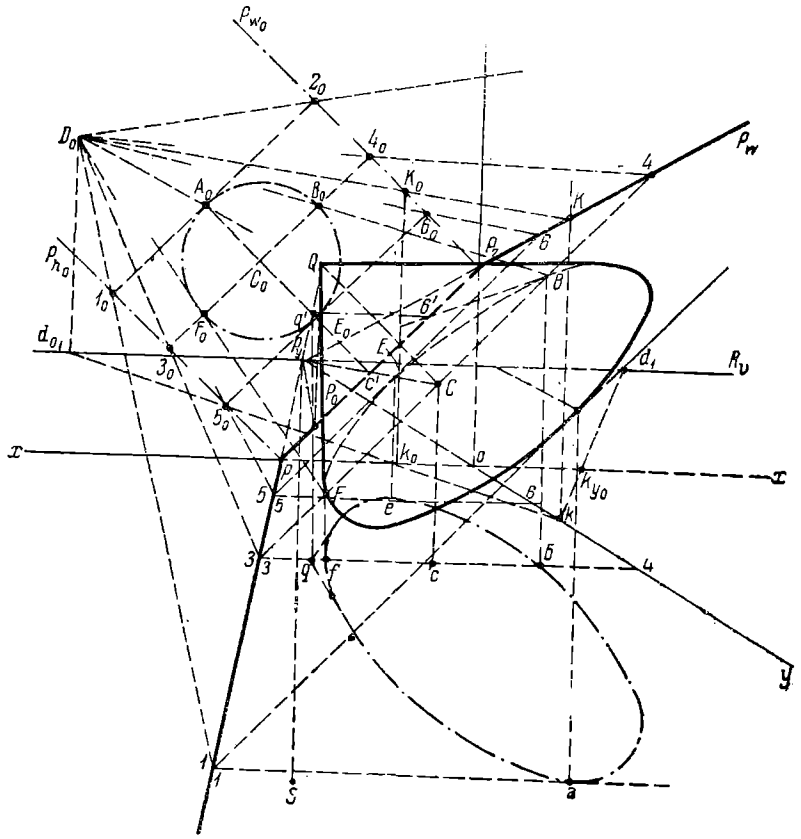


Рис. 27.

хорд поворота является точка D_o. Вспомогательными прямыми, нужными для построения изображения основания конуса, служат фронтали *1—2*, *3—4*, *5—6*. Высота конуса является фронталью и, следовательно, на плоскость V проектируется в натуральную величину. Длина вертикальной проекции высоты равна ее истинной длине; ее изображение CQ параллельно $c'q'$

На основании сказанного изображение Q вершины конуса получится, как точка встречи прямых $s'q'$ иCQ,—проведенной из точки C параллельно $c'q'$

На рис. 28 построена коническая проекция тела вращения. Сначала построены изображения ряда параллелей, параллельных плоскости H, и проведена обертывающая их кривая, определяющая очерк тела вращения.

На рис. 29 показана коническая проекция шара. Для получения контура эллипса, являющегося конической проекцией шара, построены изображения ряда параллелей, параллельных плоскости V Указанные

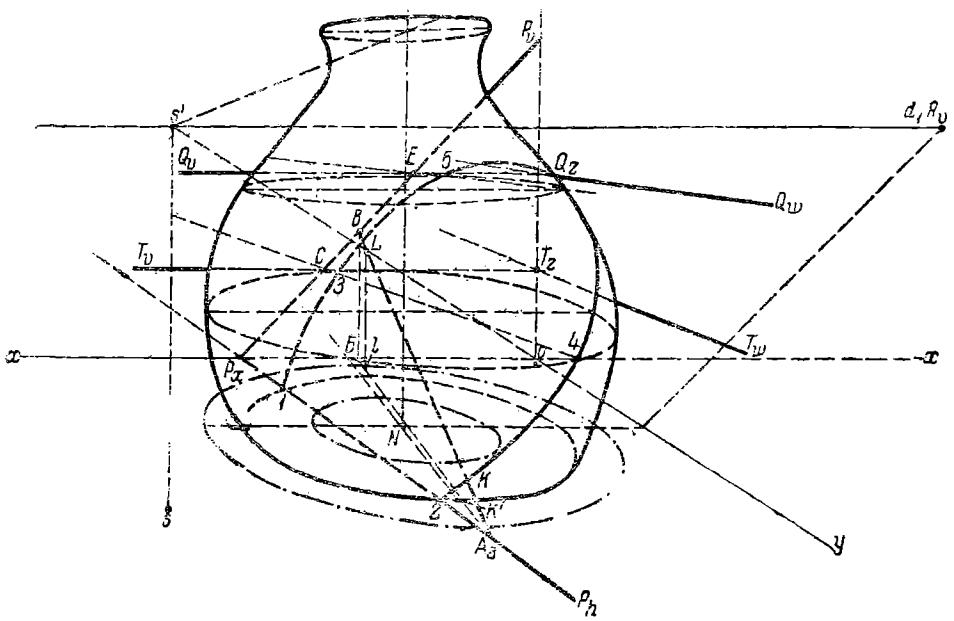


Рис. 28.

параллели удобны в том смысле, что они проектируются в виде окружностей. Диаметры указанных параллелей искажены в зависимости от расстояний их центров от плоскости V Однако длины диаметров параллелей легко найти, если построено изображение горизонтальной проекции шара.

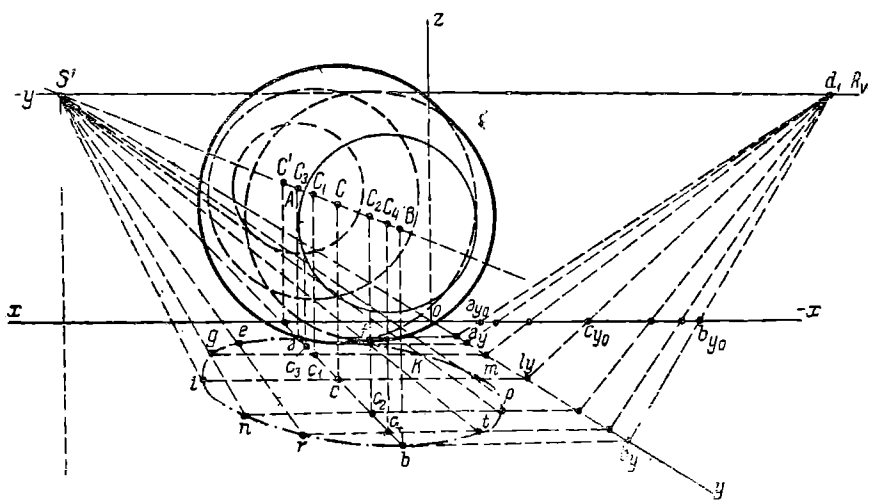


Рис. 29.

Проводя изображения следов *rt*, *pn* и т. д., секущих шар по указанным параллелям, плоскостей, получим диаметры изображений соответствующих параллелей, как длины отрезков *rt*, *pn* и т. д. Изображения

горизонтальных проекций c, c_1, c_2 и т. д. центров параллелей найдутся в пересечении изображений следов вспомогательных плоскостей с ab. По найденным c, c_1 и c_2 строим обычным способом изображения C, C_1, C_2 центров параллелей на изображении AB. AB является осью шара, параллельной оси oy.

13. Пересечение поверхностей плоскостями и прямыми

Прием определения точек линии сечения тел плоскостью также аналогичен таковому в других методах проектирования.

На рис. 23 призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересечена наклонной плоскостью P. Точки *1* и *2* сечения *1—2—3* найдутся в пересечении следа P_v с основанием $ABCD$ призмы. Точка *3* определится как точка встречи ребра DD_1 с MN—линией пересечения плоскости P с вспомогательной профильной плоскостью Q, проходящей через DD_1,

На рис. 28 построено изображение *1—3—5—6—4—2* линии пересечения тела вращения произвольной плоскостью P.

Тело вращения рассечено вспомогательными плоскостями T и Q, параллельными плоскости H (точкой схода для изображений Q_w и T_w является точка s'), секущими плоскость P по горизонталям $C4$ и $E6$ (их изображения имеют точку схода там же, где P_h), доставляющими в точках встречи с соответствующими параллелями (сечения тела вращения плоскостями T и Q) точки *3*, *4*, *5* и *6*, принадлежащие линии сечения. Точки *1* и 2 найдутся в пересечении основания тела вращения с P_h.

Для определения точек встречи прямой с поверхностью следует использовать общий прием начертательной геометрии, т. е. провести через прямую вспомогательную плоскость (проще проектирующую), пересечь ею поверхность и найти точки встречи заданной прямой с упомянутым сечением.

На рис. 28 найдены указанным способом точки встречи K и L прямой AB с телом вращения. Через прямую проведена вспомогательная плоскость P.

14. Пересечение поверхностей

Принципы определения точек линии пересечения поверхностей такие же, как и в других методах проектирования.

Остановимся на характерных случаях.

На рис. 30 показаны две пересекающиеся призмы $KMNK_1M_1N_1$ и $ABCA_1B_1C_1$. Ребра первой призмы параллельны плоскости V, второй—произвольно наклонны. Нижние основания обеих призм находятся в плоскости H, верхние—параллельны ей. Секущую плоскость выберем так, чтобы она секла призмы по линиям, параллельным их ребрам.

Для определения секущей плоскости на ребре BB_1 взята точка L, через которую проведена прямая HL, параллельная ребрам призмы $KMNK_1M_1N_1$. Горизонтальный след P_h искомой плоскости пройдет через горизонтальные следы H и B прямых BB_1 и HL. Проводим вспомогательную секущую плоскость Q, параллельную плоскости P, через ребро CC_1. Изображение Q_h ее горизонтального следа имеет точку схода на линии горизонта там же, где изображение следа P_h. Указанная плоскость пересечет грани призмы $KMNK_1M_1N_1$ по прямым *1I* и *2G*, параллельным ее ребрам, точки встречи I и G которых с ребром CC_1 являются искомыми. Точки F и E найдены аналогично. Плоскость T, проходящая через ребро MM_1, пересекает призму $ABC\,A_1B_1C_1$ по прямым *3F* и *4E*, параллельным ее ребрам (точкой схода для *3F* и *4E* является точка схода изображений ребер призмы), которые в пересечении с ребром MM_1 дадут искомые точки E и F. Через ребра NN_1, KK_1, AA_1 и BB_1 секущих плоскостей проводить нет надобности, ибо эти ребра не участ-

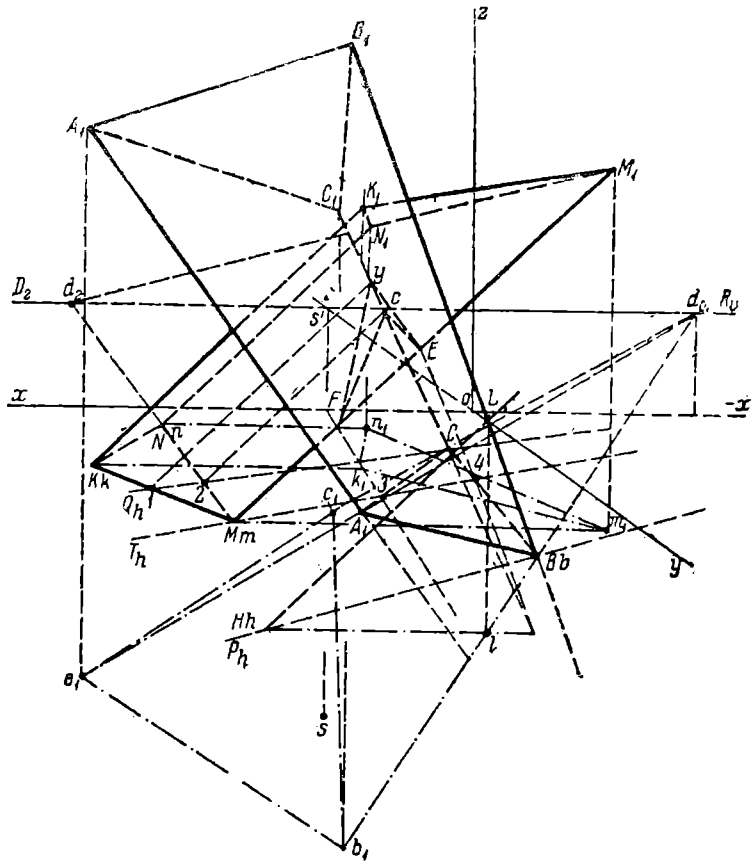

z
B_1
A_1
M_1
C_1
K_1
N_1
y
D_2
d_2
c
d_c
R_y
S_1
E
x
F
a
L
-x
N
n
n_1
C_1
4
Kk
k_1
3
2
Q_h
c_1
Mm
A_1
T_h
Bb
y
Hh
P_h
l
a_1
S
b_1

Рис. 30.

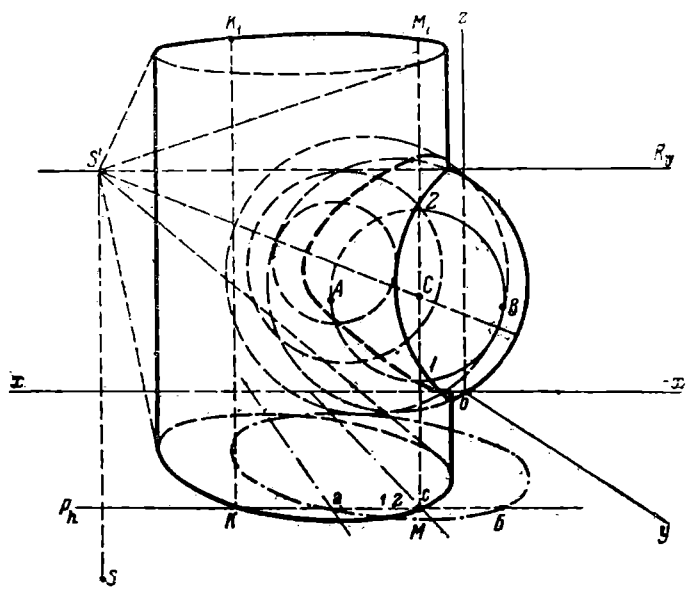

K_1
M_1
z
S'
R_y
2
A
C
B
1
x
-x
b
P_h
a
1,2
c
K
M
б
y
S

Рис. 31

вуют в пересечении призм. Последовательность соединения точек сечения находится по правилу непрерывного обвода.

На рис. 31 показаны пересекающиеся, цилиндр с основанием в плоскости H и шар. Оба тела рассечены рядом вспомогательных плоскостей, параллельных плоскости V (след P_h одной из них показан). Рассмотрим построение точек *1* и *2*. Плоскость P сечет цилиндр по прямоугольнику KK_1M_1M, а шар по окружности, центр которой в точке C (диаметр и центр изображения параллели находятся так, как это показано на рис. 29). Точки *1* и *2* определятся как точки встречи MM_1 с упомянутой параллелью.

15. Заключительные замечания

Изложенного вполне достаточно, чтобы уяснить, каким образом метод изображения координат может быть применен к решению любой задачи по методу конического проектирования.

Из хода решений ярко видна полная аналогия с методами ортогональным и аксонометрическим. Рассмотрен в подробностях собственно метод конического проектирования, как таковой, но те же приемы решения полностью могут быть использованы и в отношении построения перспективы, которая по существу является конической проекцией, только обусловленной определенными требованиями в смысле размещения глаза к изображаемому предмету.

Отмеченная общность решения одинаковых задач по любому из основных методов проектирования является весьма ценной в смысле развития широты взгляда на проектирование вообще, лучшего усвоения пространственных представлений и большей сознательности в выполнении самих решений, что отвечает и педагогическим и методическим требованиям.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit ist eine Einleitung in die Theorie der Methoden der Entwickelung von Perspektivdarstellungen und erhält die Elemente der Mensuralperspektive, d. h. die Auflösung von metrischen Aufgaben in Perspektive, indem als Grundlage dieser Theorie dient die Methode der 3 Massstäbe (Koordinaten).

Ausser dem angezeigten praktischen Ziele, das Ziel der Arbeit besteht in der Anwendung der Koordinatenmethode auf die systematische Lösung von Aufgaben der darstellenden Geometrie nach der Methode des konischen Projektieren. Es wird gezeigt, auf welche Weise die Methode der Koordinatendarstellung auf die Lösung von Aufgaben der darstellenden Geometrie nach der Methode des konischen Projektieren angewandt werden kann.

Im Gange der Lösungen von einzelnen Beispiele sieht man deutlich die vollständige Analogie mit den Methoden des orthogonalen und axonometrischen Projektieren. Die Methode des konischen Projektieren wird ausführlich erklärt, aber dieselben Verfahren können auch auf die Perspektive angewandt werden.