Записки Ленинградского Горного Института, том XII, вып. 3, 1939
Annales de l'Institut des Mines à Leningrad, vol. XII, liv. 3, 1939

P1025
II

О движении тяжелой точки по винтовой линии на шероховатой поверхности[1]

(К теории спирального сепаратора)

Проф. М. И. Акимов

Mouvement d'un point pesant sur une hélice située sur une surface dépolie

Prof. M. I. Akimoff

§ 9. Особенные случаи устойчивости установившегося движения тяжелой точки по шероховатой винтовой поверхности (15). Один корень характеристического уравнения (33) или (36) равен нулю, остальные корни отрицательны или с отрицательными вещественными частями.

Тогда

$$D=0, \tag{44}$$

т. е.

$$f_r^{(2)'}=0. \tag{44_1}$$

Система (29) перепишется следующим образом

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\xi}{dt}-\xi'=0,\\ &\frac{d\xi'}{dt}+\frac{f_r^{(1)'}}{f_{r''}^{(1)'}}\xi+\frac{f_{r'}^{(1)'}}{f_{r''}^{(1)'}}\xi'+\frac{f_{\varphi'}^{(1)'}}{f_{r''}^{(1)'}}\eta'=0,\\ &\frac{d\eta'}{dt}+\frac{f_{r'}^{(2)'}}{f_{\varphi''}^{(2)'}}\xi'=0. \end{aligned}\right\} \tag{29_1}$$

Комбинируя первое и третье уравнения, находим

$$\frac{d\left(\eta'+\dfrac{f_{r'}^{(2)'}}{f_{\varphi''}^{(2)'}}\xi\right)}{dt}=0.$$

[1] Окончание. См. Записки Ленинградского Горного Института т. X, вып. 1 (1936), стр. 1—21.

Следовательно, имеем линейный интеграл системы (29_1)

$$u=\eta'+\frac{f^{(2)'}_{r'}}{f^{(2)'}_{\varphi''}}\xi, \tag{45}$$

который, согласно Ляпунову [1] (стр. 89), принимаем за неизвестную функцию вместо η'. Тогда

$$\eta'=u-\frac{f^{(2)'}_{r'}}{f^{(2)'}_{\varphi''}}\xi \tag{46}$$

и система (27) приводится к следующей

$$\left.\begin{gathered}\frac{d\xi}{dt}-\xi'=0,\\ \frac{d\xi'}{dt}+\frac{f^{(1)'}_{r}\,f^{(2)'}_{\varphi''}-f^{(1)'}_{\varphi'}\,f^{(2)'}_{r'}}{f^{(1)'}_{r''}\,f^{(2)'}_{\varphi''}}\xi+\frac{f^{(1)'}_{r'}}{f^{(1)'}_{r''}}\xi'+\frac{f^{(1)'}_{\varphi'}}{f^{(1)'}_{r''}}u+f_2^{(1)}+f_3^{(1)}+\ldots=0,\\ \frac{du}{dt}+f_2^{(2)}+f_3^{(2)}+\ldots=0,\end{gathered}\right\} \tag{27$_1$}$$

где

$$f_2^{(i)}=\frac{1}{1\cdot2}\left(F^{(i)''}_{rr}\xi^2+F^{(i)''}_{r'r'}\xi'^2+F^{(i)''}_{\varphi'\varphi'}\eta'^2+2F^{(i)''}_{rr'}\xi\xi'+2F^{(i)''}_{r\varphi'}\xi\eta'+2F^{(i)''}_{r'\varphi'}\xi'\eta'\right),$$

$$f_3^{(i)}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\Big[F^{(i)'''}_{rrr}\xi^3+F^{(i)'''}_{r'r'r'}\xi'^3+F^{(i)'''}_{\varphi'\varphi'\varphi'}\eta'^3+$$

$$+3\left(F^{(i)'''}_{rrr'}\xi^2\xi'+F^{(i)'''}_{rr'r'}\xi\xi'^2+F^{(i)'''}_{rr\varphi'}\xi^2\eta'+F^{(i)'''}_{r\varphi'\varphi'}\xi\eta'^2+F^{(i)'''}_{r'r'\varphi'}\xi'^2\eta'+F^{(i)'''}_{r'\varphi'\varphi'}\xi'\eta'^2\right)+$$

$$+6F^{(i)'''}_{rr'\varphi'}\xi\xi'\eta'\Big],$$

значения производных берутся при $r=r_0$, $r'=0$, $\varphi'=\omega_0$, $F^{(i)}$, $i=1, 2$, означают левые части уравнений (20) и (21) после разделения их соответственно на Δ^2 и $r^2\Delta^2$ и следует заменить η' через u, пользуясь равенством (46).

Вычислим значения производных [2] $F^{(2)(n)}_{\varphi'^n}$, $F^{(2)(l+m)}_{\varphi'^l r'^m}$ при $r=r_0$, $r'=0$, $\varphi'=\omega_0$.

Принимая во внимание равенства (22) и (24), имеем

$$F^{(2)''}_{\varphi'\varphi'}=kN_0\left|\frac{d^2\frac{\varphi'}{v}}{d\varphi'^2}\right|_{\substack{r=r_0\\ r'=0\\ \varphi'=\omega_0}}=kN_0\left|\frac{d}{d\varphi'}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v^2}\frac{(r^2+a^2)\varphi'^2+af'(r)r'\varphi'}{v}\right)\right|_{\substack{r=r_0\\ r'=0\\ \varphi'=\omega_0}}$$

$$=kN_0\left|-\frac{1}{v^2}\frac{(r^2+a^2)\varphi'+af'(r)r'}{v}+\frac{3}{v^4}\frac{(r^2+a^2)\varphi'+af'(r)r'}{v}\left[(r^2+a^2)\varphi'^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+af'(r)r'\varphi'\right]-\frac{2(r^2+a^2)\varphi'+af'(r)r'}{v^3}\right|_{\substack{r=r_0\\ r'=0\\ \varphi'=\omega_0}}=$$

$$=kN_0\left|-\frac{3\left[(r^2+a^2)\varphi'+af'(r)r'\right]}{v^5}\left\{\left[1+f'^2(r)\right]r'^2+af'(r)r'\varphi'\right\}+\frac{af'(r)r'}{v^3}\right|_{\substack{r=r_0\\ r'=0\\ \varphi'=\omega_0}}=0$$

---

[1] Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892.

[2] $$F^{(l+m+\ldots)}_{q_i{}^l q_j{}^m\ldots}=F^{(l+m+\ldots)}_{\underbrace{q_iq_i\ldots}_{l}\ \underbrace{q_jq_j\ldots}_{m}}$$

и затем

$$F^{(2)(n)}_{\varphi' n} = kN_0 \left| \frac{d^{n-2}}{d\varphi'^{n-2}} \left(\frac{d^2 \frac{\varphi'}{v}}{d\varphi'^2} \right) \right|_{\substack{r=r_0 \\ r'=0 \\ \varphi'=\omega_0}} = 0.$$

Подобным же образом, принимая во внимание (22), (24) и (44), имеем

$$F^{2)''}_{\varphi' r} = kN_0 \left| \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{v} - \frac{1}{v^2} \frac{(r^2 + a^2)\varphi'^2 + af'(r) r'\varphi'}{v} \right] \right|_{\substack{r=r_0 \\ r'=0 \\ \varphi'=\omega_0}} =$$

$$= kN_0 \left| - \frac{1}{v^2} \frac{f'(r) f''(r) r'^2 + r\varphi'^2 + af''(r) r'\varphi'}{v} + \right.$$

$$+ \frac{3}{v^4} \frac{f'(r) f''(r) r'^2 + r\varphi'^2 + af''(r) r'\varphi'}{v} [(r^2 + a^2)\varphi'^2 + af'(r) r'\varphi'] -$$

$$\left. - \frac{1}{v^3} (2r\varphi'^2 + af''(r) r'\varphi') \right|_{\substack{r=r_0 \\ r'=0 \\ \varphi'=\omega_0}} = 0,$$

так как здесь члены с $r\varphi'^2 (r^2 + a^2)\varphi'^2$ уничтожаются, а остальные содержат r' множителем.

Нетрудно убедиться, что при $r = r_0$, $r' = 0$, $\varphi' = \omega_0$ производная любого порядка

$$F^{(2)(l+m)}_{\varphi'^l r^m} = \frac{1}{N} \frac{d^l N}{d\varphi'^l} F^{(m)}_{r^m}, \text{ если } F^{(j)}_{r^j} = 0, \; j = 2, 3, \ldots, m-1,$$

и

$$F^{(2)(l+m)}_{\varphi'^l r^m} = 0, \text{ если } l > 2 \text{ или } m = 1.$$

Согласно Ляпунову (цитированное сочинение, стр. 105) на основании первых двух уравнений системы (27_1) надо составить следующие

$$\left.\begin{array}{c} \xi' = 0, \\ \dfrac{f^{(1)'}_r f^{(2)'}_{\varphi''} - f^{(1)'}_{\varphi'} f^{(2)'}_{r'}}{f^{(1)'}_{r''} f^{(2)'}_{\varphi''}} \xi + \dfrac{f^{(1)'}_{r'}}{f^{(1)'}_{r''}} \xi' + \dfrac{f^{(1)'}_{\varphi'}}{f^{(1)'}_{r''}} u + f^{(1)}_2 + f^{(1)}_3 + \ldots = 0, \end{array}\right\} \qquad (47)$$

определить отсюда [1] значения ξ' и ξ (через u) и подставить их в третье уравнение системы (27_1), тогда это последнее будет

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{1\cdot 2} F^{(2)''}_{rr} \xi^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} \left(F^{(2)'''}_{rrr} \xi^3 + \frac{3}{1} F^{(2)'''}_{rr\varphi'} \xi^2 \eta' \right) +$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \left(F^{(2)\text{iv}}_{r^4} \xi^4 + \frac{4}{1} F^{(2)\text{iv}}_{r^3\varphi'} \xi^3 \eta' + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} F^{(2)\text{iv}}_{r^2\varphi'^2} \xi^2 \eta'^2 \right) + \ldots,$$

где вместо η' подставлено его значение из (46), а вместо ξ его значение в виде ряда

$$\xi = a_1 u + a_2 u^2 + \qquad a_1 = - \frac{f^{(1)'}_{\varphi'} f^{(2)'}_{\varphi''}}{f^{(1)'}_r f^{(2)'}_{\varphi''} - f^{(1)'}_{\varphi'} f^{(2)'}_{r'}} < 0,$$

---

[1] $f^{(1)'}_r f^{(2)'}_{\varphi''} - f^{(1)'}_{\varphi'} f^{(2)'}_{r'} = C$ есть коэфициент характеристического уравнения (33) или (36), который в рассматриваемом случае движения больше нуля.

получающегося из (47), значения производных берутся при $r=r_0$, $r'=0$, $\varphi'=\omega_0$ и $F^{(2)'''}_{rr\varphi'}$, $F^{(2)\text{iv}}_{r^3\varphi'}$, $F^{(2)\text{iv}}_{r^2\varphi'^2}$, . в случаях, отмеченных выше, отличаются каждая только множителем соответственно от $F^{(2)''}_{rr}$ $F^{(2)'''}_{rrr}$ $F^{(2)''}_{rr}$

Согласно Ляпунову (цитированное сочинение, стр. 105), если $F^{(2)''}_{rr}\neq 0$, то установившееся движение тяжелой точки по винтовой линии (1) на шероховатой винтовой поверхности (15) в рассматриваемом случае (когда один корень характеристического уравнения равен нулю, а остальные корни отрицательны или с отрицательными вещественными частями), неустойчиво.

Если $F^{(2)''}_{rr}=0$, то при $F^{(2)'''}_{rrr}>0$ ($F^{(2)'''}_{rrr}a_1{}^3<0$) движение неустойчиво, а при $F^{(2)'''}_{rrr}<0$ движение устойчиво.

Если

$$F^{(2)''}_{rr}=F^{(2)'''}_{rrr}=0,$$

то для устойчивости движения необходимо $F^{(2)\text{iv}}_{r^4}=0$.

Тогда движение неустойчиво, если $F^{(2)\text{v}}_{r^5}>0$ и устойчиво, если $F^{(2)\text{v}}_{r^5}<0$, и т. д.

В случае [1]

$$F^{(2)''}_{r^2}=D^{(2)'''}_{r^3}=F^{(2)\text{iv}}_{r^4}=F^{(2)\text{v}}_{r^5}=\ldots=0$$

существует непрерывный ряд установившихся движений по винтовым линиям, к которым принадлежит рассматриваемое движение, и все такие движения, достаточно близкие к рассматриваемому, устойчивы. Этот случай имеет место, когда $F^{(2)'}_{r}=0$ тождественно, т. е. $R=0$ тождественно, следовательно установившееся движение происходит на поверхности [2]

$$z=a\varphi+f_1(r),\quad f_1(r)=\int_\rho^r\sqrt{\left(\frac{1}{k^2}\,\frac{a^2}{r^2}-1\right)\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right)}\,dr.$$

Полученный результат допускает следующее геометрическое толкование.

В плоскости [3] (z, R) проведем кривую, [4]

$$z=f_1(r),$$

касающуюся в точке $M[r_0, f(r_0)]$ кривой

$$z=f(r),$$

производящей винтовой поверхности (15).

---

[1] Условия

$$F^{(2)'}_{r}=F^{(2)''}_{r^2}\qquad=F^{(2)(n-1)}_{r^{n-1}}=0$$

равносильны следующим

$$f^{(2)'}_{r}=f^{(2)''}_{r^2}\qquad\ldots=f^{(2)(n-1)}_{r^{n-1}}=0$$

и тогда

$$F^{(2)(n)}_{r^n}=\frac{f^{(2)(n)}_{r^n}}{f^{(2)'}_{\varphi''}}$$

[2] См. конец § 8.

[3] См. рис. 1, Записки ЛГИ, т. X, вып. 1 (1936).

[4] Эта кривая вычерчена В. А. Егуновым.

Тогда неравенство [1] $D>0$, т. е. $S>0$, равносильно следующему

$$f''(r_0)>f_1''(r_0).$$

Если

$$f''(r_0)=f_1''(r_0),$$

то для устойчивости движения необходимо

$$f'''(r_0)=f_1'''(r_0).$$

Движение устойчиво, если

$$f^{iv}(r_0)>f_1^{iv}(r_0),$$

и неустойчиво, если

$$f^{iv}(r_0)<f_1^{iv}(r_0).$$

Вообще, если

$$f(r_0)=f_1(r_0),$$

$$f'(r_0)=f_1'(r_0),$$

$$f''(r_0)=f_1''(r_0),$$

то, чтобы устойчивость была возможна, первые из соответственно неравных производных должны быть четного порядка $(2l)$. Движение устойчиво, если

$$f^{(2l)}(r_0)>f_1^{(2l)}(r_0),$$

и неустойчиво, если

$$f^{(2l)}(r_0)<f_1^{(2l)}(r_0).$$

Таким образом, условие устойчивости рассматриваемого движения на поверхности

$$z=a\varphi+f(r) \quad (15)$$

состоит в том, чтобы между кривыми (см. рис. 2)

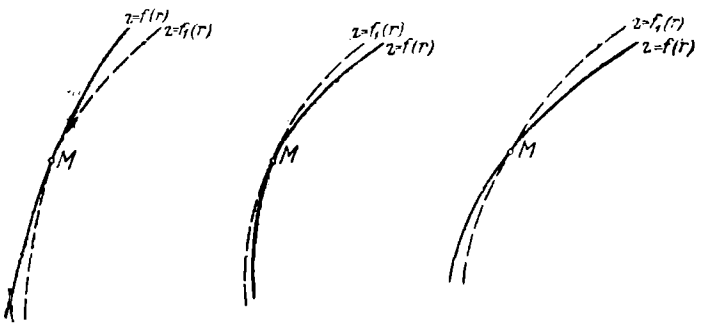


Рис. 2.

и

$$z=f_1(r) \quad (48)$$

$$z=f(r) \quad (49)$$

в точке $M[r_0, f(r_0)]$ имело место соприкасание нечетного порядка (чтобы кривые соприкасаясь не пересекались) и чтобы точки кривой (49), близкие к M (т. е. к точке касания), лежали выше соответствующих (данному r) точек кривой (48).

---

[1] Это неравенство равносильно такому $f_r^{(2)'}<0$ или

$$F_r^{(2)'}=\frac{f_r^{(2)'}}{f_{\varphi'}^{(2)'}}<0.$$

§ 10. Два корня характеристического уравнения (33) или (36) чисто мнимые, третий корень отрицательный

В этом случае

$$BC - AD = 0$$

и

$$s_1 = \sqrt{-1}\,m,\quad s_2 = -\sqrt{-1}\,m,$$

$$-s_1^2 = -s_2^2 = m^2 = \frac{D}{B} = -\frac{\begin{vmatrix} f_r^{(2)'} & f_{\varphi'}^{(1)'} \\ f_{r'}^{(1)'} & f_{\varphi'}^{(2)'} \end{vmatrix}}{} =$$

$$= \frac{C}{A} = \frac{f_r^{(1)'} f_{\varphi''}^{(2)'} - f_{r'}^{(2)'} f_{\varphi'}^{(1)'}}{f_{r''}^{(1)'} f_{\varphi''}^{(2)'}}$$

$$s_3 = -\frac{B}{A} = -\frac{f_{r'}^{(1)'}}{f_{r''}^{(1)'}} =$$

$$= -\frac{D}{C} = \frac{f_r^{(2)'} f_{\varphi'}^{(1)'}}{f_r^{(1)'} f_{\varphi''}^{(2)'} - f_{r'}^{(2)'} f_{\varphi'}^{(1)'}}.$$

Мы имеем [§ 8, равенства (30)] решения системы линейных уравнений первого приближения (28) или (29).

$$\left.\begin{aligned} \xi &= C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + C_3 e^{s_3 t}, \\ \xi' &= C_1 s_1 e^{s_1 t} + C_2 s_2 e^{s_2 t} + C_3 s_3 e^{s_3 t}, \\ \eta' &= C_1 A_1 e^{s_1 t} + C_2 A_2 e^{s_2 t} + C_3 A_3 e^{s_3 t}, \end{aligned}\right\} \qquad (30_1)$$

где

$$A_i = -\frac{f_{r''}^{(1)'} s_i^2 + f_{r'}^{(1)'} s_i + f_r^{(1)'}}{f_{\varphi'}^{(1)'}} = -\frac{f_{r'}^{(2)'} s_i + f_r^{(2)'}}{f_{\varphi''}^{(2)'} s_i},$$

$$i = 1,\ 2,\ 3.$$

В частности

$$A_3 = -\frac{f_r^{(1)'}}{f_{\varphi'}^{(1)'}} = -\frac{f_{r'}^{(2)'} s_3 + f_r^{(2)'}}{f_{\varphi''}^{(2)'} s_3}$$

так как

$$f_{r''}^{(1)'} s_3 + f_{r'}^{(1)'} = 0.$$

Из (30_1) находим

$$C_1 e^{s_1 t} = \frac{\begin{vmatrix} \xi & 1 & 1 \\ \xi' & s_2 & s_3 \\ \eta' & A_2 & A_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}},$$

откуда

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \xi & 1 & 1 \\ \xi' & s_2 & s_3 \\ \eta' & A_2 & A_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}} e^{-s_1 t}$$

т. е

$$C_1' = \begin{vmatrix} \xi & 1 & 1 \\ \xi' & s_2 & s_3 \\ \eta' & A_2 & A_3 \end{vmatrix} e^{-s_1 t}$$

где

$$C_1' = C_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

Подобным же образом из той же системы (30_1) имеем

$$C_2' = \begin{vmatrix} \xi & 1 & 1 \\ \xi' & s_1 & s_3 \\ \eta' & A_1 & A_3 \end{vmatrix} e^{-s_2 t}$$

Положим

$$x - \sqrt{-1}\, y = \begin{vmatrix} \xi & 1 & 1 \\ \xi' & s_2 & s_3 \\ \eta' & A_2 & A_3 \end{vmatrix},$$

$$x + \sqrt{-1}\, y = \begin{vmatrix} \xi & 1 & 1 \\ \xi' & s_1 & s_3 \\ \eta' & A_1 & A_3 \end{vmatrix}$$

Тогда

$$x = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \xi & 2 & 1 \\ \xi' & s_1 + s_2 & s_3 \\ \eta' & A_1 + A_2 & A_3 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{2i} \begin{vmatrix} \xi & 0 & 1 \\ \xi' & s_1 - s_2 & s_3 \\ \eta' & A_1 - A_2 & A_3 \end{vmatrix},$$

т. е

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2}(A_1 + A_2)\, s_3 \xi - \frac{1}{2}\,[2A_3 - (A_1 + A_2)]\, \xi' + s_3 \eta', \\ iy &= \frac{1}{2}\,[2s_1 A_3 - s_3 (A_1 - A_2)]\, \xi + \frac{1}{2}(A_1 - A_2)\, \xi' - s_1 \eta', \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} &= s_3 \xi - \frac{2s_1 x + 2s_3\, iy}{[2A_3 - (A_1 + A_2)]\, s_1 - (A_1 - A_2)\, s_3}, \\ \eta' &= A_3 \xi - \frac{(A_1 - A_2)\, x + [2A_3 - (A_1 + A_2)]\, iy}{[2A_3 - (A_1 + A_2)]\, s_1 - (A_1 - A_2)\, s_3}. \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

Заметим

$$A_1 + A_2 = -2\, \frac{f_{r''}^{(1)'} s_1^2 + f_r^{(1)'}}{f_{\varphi'}^{(1)'}} = -2\, \frac{f_{r'}^{(2)'}}{f_{\varphi''}^{(2)'}},$$

$$A_1 - A_2 = -2\, \frac{f_{r'}^{(1)'} s_1}{f_{\varphi'}^{(1)'}} = -2\, \frac{f_r^{(2)'}}{f_{\varphi''}^{(2)'} s_1},$$

$$2A_3-(A_1+A_2)=2\frac{f^{(1)'}_{r''}s_1^2}{f^{(1)'}_{\varphi'}}=-2\frac{f^{(2)'}_{r}}{f^{(2)'}_{\varphi''}s_3}$$

Примем согласно Ляпунову (цитированное сочинение, стр. 108) x, y за неизвестные функции в системе (27) вместо ξ', η'; тогда эта система, т. е.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\xi'}{dt}+\frac{f^{(1)'}_{r}}{f^{(1)'}_{r''}}\xi+\frac{f^{(1)'}_{r'}}{f^{(1)'}_{r''}}\xi'+\frac{f^{(1)'}_{\varphi'}}{f^{(1)'}_{r''}}\eta'+\Xi=0,\\
&\frac{d\eta'}{dt}+\frac{f^{(2)'}_{r}}{f^{(2)'}_{\varphi''}}\xi+\frac{f^{(2)'}_{r'}}{f^{(2)'}_{\varphi''}}\xi'\quad+\mathrm{H}=0,\\
&\frac{d\xi}{dt}-\xi'=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(27_2)$$

где [1]

$$\left.\begin{aligned}
\Xi&=f_2^{(1)}+f_3^{(1)}+\\
\mathrm{H}&=f_2^{(2)}+f_3^{(2)}+.
\end{aligned}\right\}\qquad(52)$$

примет вид [2]

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt}=-is_1y+X,\\
&\frac{dy}{dt}=is_1x+Y,\\
&\frac{d\xi}{dt}=s_3\xi-\frac{2s_1x+2s_3iy}{[2A_3-(A_1+A_2)]s_1-(A_1-A_2)s_1},
\end{aligned}\right\}\qquad(27_3)$$

причем

$$\left.\begin{aligned}
X&=\frac{1}{2}[2A_3-(A_1+A_2)]\Xi-s_3\mathrm{H},\\
Y&=-\frac{A_1-A_2}{2i}\Xi-is_1\mathrm{H}
\end{aligned}\right\}\qquad(53)$$

и для определенности $-is_1=m<0$.

По Ляпунову (стр. 109) необходимо преобразовать систему (27_3), положив

$$x=u+x_1,\quad y=v+y_1,$$

где u и v голоморфные решения системы

$$\left\{s_3\xi-\frac{2s_1x+2s_3iy}{[2A_3-(A_1+A_2)]s_1-(A_1-A_2)s_3}\right\}\frac{dx}{d\xi}=-is_1y+X,$$

$$\left\{s_3\xi-\frac{2s_1x+2s_3iy}{[2A_3-(A_1+A_2)]s_1-(A_1-A_2)s_3}\right\}\frac{dy}{d\xi}=is_1x+Y,$$

именно

$$u=a_2\xi^2+a_3\xi^3+..$$

$$v=b_2\xi^2+b_3\xi^3+..$$

коэффициенты которых a_m, b_m определяются последовательно из уравнений

$$ms_3a_m+is_1b_m=A^{(m-1)}$$

$$-is_1a_m+ms_3b_m=B^{(m-1)},$$

---

[1] См. стр. 2

[2] Уравнения (27_3) нетрудно проверить, дифференцируя по t обе части равенств (50) и пользуясь уравнениями (27_2) и равенствами (51).

где $A^{(m-1)}$ и $B^{(m-1)}$ выражаются через a_2, a_3, a_{m-1}, b_2, b_3, b_{m-1} и определитель $m^2s_3^2 - s_1^2$ неравен нулю.

После указанного преобразования система (27_3) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -is_1y_1 + X_1, \\ \frac{dy_1}{dt} &= is_1x_1 + Y_1, \\ \frac{d\xi}{dt} &= s_3\xi - \frac{2s_1x_1 + 2s_3iy_1}{[2A_3 - (A_1+A_2)]\,s_1 - (A_1 - A_2)\,s_3} + \Xi_1, \end{aligned}\right\} \qquad (27_4)$$

где X_1, Y_1, Ξ, представляют голоморфные функции величин x_1, y_1, ξ, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка, причем

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= X - is_1v - \left\{s_3\xi - \frac{2s_1(u+x_1) + 2s_3(v+y_1)}{[2A_3 - (A_1+A_2)]\,s_1 - (A_1 - A_2)\,s_3}\right\}\frac{du}{d\xi}, \\ Y_1 &= Y + is_1u - \left\{s_3\xi - \frac{2s_1(u+x_1) + 3s_3(v+y_1)}{[2A_3 - (A_1+A_2)]\,s_1 - (A_1 - A_2)\,s_3}\right\}\frac{dv}{d\xi}, \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

так что $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$ при $x_1 = 0$, $y_1 = 0$.

Согласно Ляпунову (стр. 110) необходимо ввести затем вместо x_1 и y_1 новые переменные ρ и ϑ при помощи равенств

$$x_1 = \rho\cos\vartheta, \quad y_1 = \rho\sin\vartheta.$$

Тогда из уравнений (27_4) получим следующие

$$\frac{d\rho}{dt} = X_1\cos\vartheta + Y_1\sin\vartheta,$$

$$\rho\frac{d\vartheta}{dt} = is_1\rho + Y_1\cos\vartheta - X_1\sin\vartheta.$$

Отсюда

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = \frac{\rho(X_1\cos\vartheta + Y_1\sin\vartheta)}{is_1\rho + Y_1\cos\vartheta - X_1\sin\vartheta} =$$

$$= \frac{1}{is_1}(X_1\cos\vartheta + {}_1\sin\vartheta)\left\{1 + \frac{X_1\sin\vartheta - Y_1\cos\vartheta}{is_1\rho} + \left(\frac{X_1\sin\vartheta - Y_1\cos\vartheta}{is_1\rho}\right)^2 + \ldots\right\} \qquad (55)$$

Третье из (27_4) преобразуется в следующее

$$\frac{d\xi}{d\vartheta} = \frac{1}{is_1}\left\{s_3\xi - \frac{2\rho(s_1\cos\vartheta + is_3\sin\vartheta)}{[2A_3 - (A_1+A_2)]\,s_1 - (A_1 - A_2)\,s_3}\right\}\times$$

$$\times\left\{1 + \frac{X_1\sin\vartheta - Y_1\cos\vartheta}{is_1\rho} + \left(\frac{X_1\sin\vartheta - Y_1\cos\vartheta}{is_1\rho}\right)^2 + \ldots\right\} \qquad (56)$$

Надо пытаться искать, по Ляпунову (стр. 112, 113), решения уравнений (55), (56) в виде рядов

$$\left.\begin{aligned} \rho &= c + u^{(2)}c^2 + u^{(3)}c^3 + \quad , \\ \xi &= u_1^{(1)}c + u_1^{(2)}c^2 + u_1^{(3)}c^3 + \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

где c малый параметр, а $u^{(j)}$, $u_1^{(j)}$ периодические функции от ϑ.

Беря сперва

$$\rho = c; \quad \xi = u_1^{(1)}c,$$

из уравнения (56) находим

$$\frac{du_1^{(1)}}{d\vartheta} = \frac{s_3}{is_1}u_1^{(1)} - \frac{2(s_1\cos\vartheta + is_3\sin\vartheta)}{is_1\{[2A_3 - (A_1+A_2)]\,s_1 - (A_1 - A_3)\,s_3\}}. \qquad (58)$$

Ищем частное решение последнего уравнения в виде

$$u_1^{(1)} = A\cos\vartheta + B\sin\vartheta.$$

Находим

$$A = 0, \quad B = \frac{2i}{[2A_3 - (A_1 + A_2)]s_1 - (A_1 - A_2)s_3}$$

и

$$\xi = \frac{2i\sin\vartheta \cdot c}{[2A_3 - (A_1 + A_2)]s_1 - (A_1 - A_2)s_3} \tag{59}$$

Затем в уравнения (55) и (56) подставляем

$$\rho = c + u^{(2)}c^2$$

$$\xi = u_1^{(1)}c + u_1^{(2)}c^2$$

и рассматриваем члены с c^2. Легко проверить, что функция $u^{(2)}$ и, следовательно, функция $u_1^{(2)}$ окажутся всегда периодическими (ср. Ляпунов, стр. 116), так как функция $u^{(2)}$ получается в результате интегрирования по ϑ однородного многочлена третьей степени относительно $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$, а функция $u_1^{(2)}$ — как частное решение уравнения аналогичного (58), где свободный член есть периодическая функция ϑ.

Затем последовательно подставляем в уравнения (55) и (56)

$$\rho = c + u^{(2)}c^2 + u^{(3)}c^3,$$
$$\xi = u^{(1)}{}_1c + u_1^{(2)}c^2 + u_1^{(3)}c^3;$$
$$\rho = c + u^{(2)}c^2 + u^{(3)}c^3 + u^{(4)}c^4,$$
$$\xi = u_1^{(1)}c + u_1^{(2)}c^2 + u_1^{(3)}c^3 + u_1^{(4)}c^4;$$
$$\rho = c + u^{(2)}c^2 + u^{(3)}c^3 + u^{(4)}c^4 + u^{(5)}c^5;$$
$$\xi = u_1^{(1)}c + u_1^{(2)}c^2 + u_1^{(3)}c^3 + u_1^{(4)}c^4 + u_1^{(5)}c^5;$$

и ищем функции

$$u^{(3)}, \quad u_1^{(3)}; \quad u^{(4)}, \quad u_1^{(4)}; \quad u^{(5)}, \quad u_1^{(5)}; \tag{60}$$

Если $u^{(3)}$ (и следовательно $u_1^{(3)}$) окажется периодической, то для решения вопроса об устойчивости рассматриваемого установившегося движения тяжелой точки по винтовой линии (1) на шероховатой поверхности (15) следует вычислить $u^{(4)}$, $u_1^{(4)}$ и $u^{(5)}$, причем $u^{(4)}$ (и следовательно $u_1^{(4)}$) окажется периодической, и т. д.

Пусть $u^{(m)}$ первая из непериодических функций ряда (60), тогда

$$u^{(m)} = G\vartheta + v,$$

где G постоянная, а v периодическая функция от ϑ. Число m будет нечетным, и при $G < 0$ рассматриваемое установившееся движение устойчиво, а при $G > 0$ неустойчиво (Ляпунов, стр. 114, 127).

Если в ряде (60), как бы далеко он ни был продолжен, все функции будут периодическими, то установившееся движение устойчиво и принадлежит к непрерывному ряду близких к нему периодических движений (Ляпунов, стр. 147).

Замечание 1. Отметим следующий прием разыскания эквивалентной (для решения рассматриваемой задачи) системы функций $u_j, j = 2, 3, \ldots$, представляющий видоизменение предыдущего и основанный на предварительном приведении данной системы уравнений возмущенного движения (74) к системе уравнений 2-го порядка (Ляпунов, стр. 145, 146). Такое приведение окажется особенно полезным в следующем параграфе при исследовании третьего особенного случая устойчивости рассматриваемого установившегося движения.

Составив уравнение с частными производными

$$\left\{-is_1y+\frac{1}{2}[2A_3-(A_1+A_2)]\,\Xi-s_3\,\mathrm{H}\right\}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\left\{is_1x-\frac{A_1-A_2}{2i}\,\Xi-is_1\,\mathrm{H}\right\}\frac{\partial\xi}{\partial y}=$$
$$=s_3\xi-\frac{2s_1x+2s_3iy}{[2A_3-(A_1+A_2)]\,s_1-(A_1-A_2)\,s_3},$$

ищем формальное решение его в виде голоморфного ряда

$$\xi=b_{10}x+b_{01}y+\ldots \tag{61}$$

для последовательного определения коэфициентов которого получим уравнение

$$\left\{-is_1y+\frac{1}{2}[2A_3-(A_1+A_2)]\,\Xi-s_3\,\mathrm{H}\right\}b_{10}+\ldots+\left\{is_1x-\frac{A_1-A_2}{2i}\,\Xi-\right.$$
$$\left.-is_1\,\mathrm{H}\right\}b_{01}+\ldots=s_3b_{10}x+s_3b_{01}y+\ldots-\frac{2s_1x+2s_3iy}{[2A_3-(A_1+A_2)]\,s_1-(A_1-A_2)\,s_3}$$

Первые два коэфициента определятся из такой системы

$$-is_1\,b_{10}=s_3b_{01}-\frac{2s_3i}{[2A_3-(A_1+A_2)]\,s_1-(A_1-A_2)\,s_3},$$

$$is_1b_{01}=s_3\,b_{10}-\frac{2s_1}{[2A_3-(A_1+A_2)]\,s_1-(A_1-A_2)s_3}.$$

и равны

$$\mathrm{b}_{10}=0,$$

$$\mathrm{b}_{01}=\frac{2i}{[2A_3-(A_1+A_2)]\,s_1-(A_1-A_2)\,s_3}.$$

Вводя опять вместо x, y переменные ρ, ϑ при помощи равенств

$$x=\rho\cos\vartheta,\quad y=\rho\sin\vartheta,$$

подставляем (61) в уравнение (55) и разлагаем правую часть его по степеням ρ. Затем пытаемся, как раньше, искать решение последнего уравнения в виде ряда

$$\rho=c+u_2c^2+u_3c^3+\ldots$$

коэфициенты которого определят эквивалентную прежней систему функций u_j, $j=2,\ 3\ldots$, от ϑ.

Замечание 2. Для определения постоянной G, от знака которой, когда она существует, зависит устойчивость рассматриваемого установившегося движения, можно трактовать непосредственно уравнения (27_3), применяя для решения их метод Lindstedt'a[1] (Ляпунов, стр. 123—125).

Вводя в уравнения (27_3) вместо t новое независимое переменное τ при помощи равенства

$$\tau=\frac{2\pi(t-t_0)}{T},$$

где

$$T=\frac{2\pi}{is_1}(1+h_2c^2+h_3c^3+\ldots),$$

c малый параметр и h_2, h_3, ... неопределенные коэфициенты, стараемся распорядиться этими коэфициентами так, чтобы преобразованным уравнениям удовлетворяли ряды

$$x=x^{(1)}c+x^{(2)}c^2+x^{(3)}c^3+\ldots$$
$$y=y^{(1)}c+y^{(2)}c^2+y^{(3)}c^3+\ldots$$
$$\xi=\xi^{(1)}c+\xi^{(2)}c^2+\xi^{(3)}c^3+\ldots$$

где $x^{(m)}$, $y^{(m)}$, $\xi^{(m)}$ периодические функции от τ с общим периодом 2π.

[1] Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg, 7 série, tome 31, № 4.

Легко находим сперва

$$x^{(1)} = \cos\tau,$$

$$y^{(1)} = \sin\tau,$$

$$\xi^{(1)} = \frac{2i\sin\tau}{[2A_3 - (A_1 + A_2)]\,s_1 - (A_1 - A_2)\,s_3}$$

Предположим затем, что вычислены все функции

$$x^{(\mu)},\ y^{(\mu)},\ \xi^{(\mu)},$$

$$\mu = 1,\ 2,\qquad m-1,$$

постоянные $h^{(\nu)}$, $\nu = 2,\ 3,\qquad m-2$, для определения функций $x^{(m)}$, $y^{(m)}$ имеем уравнения

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx^{(m)}}{d\tau} &= -y^{(m)} - h_{m-1}\sin\tau + X^{(m)},\\ \frac{dy^{(m)}}{d\tau} &= x^{(m)} + h_{m-1}\cos\tau + Y^{(m)},\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

где $X^{(m)}$, $Y^{(m)}$ известные целые рациональные функции от найденных $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$, $\xi^{(\mu)}$, представляющиеся в виде конечных тригонометрических рядов

$$\left.\begin{aligned}X^{(m)} &= A_1^{(m)}\cos\tau + A_2^{(m)}\sin\tau + \ldots\\ Y^{(m)} &= B_1^{(m)}\cos\tau + B_2^{(m)}\sin\tau + \ldots\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Ищем решения уравнений (62) в виде

$$\left.\begin{aligned}x^{(m)} &= a_1\cos\tau + a_2\sin\tau + \ldots\\ y^{(m)} &= b_1\cos\tau + b_2\sin\tau + \ldots\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Для определения постоянных a_1, a_2, b_1, b_2, h_{m-1} получим уравнения

$$a_2 + b_1 = A_1^{(m)},\quad -a_1 + b_2 + h_{m-1} = A_2^{(m)},$$

$$-a_2 - b_1 = B_2^{(m)},\quad -a_1 + b_2 - h_{m-1} = B_1^{(m)}.$$

Эти уравнения, а следовательно и решения (64), возможны лишь при выполнении условия

$$A_1^{(m)} + B_2^{(m)} = 0.$$

Постоянные a_1, b_1 определятся из добавочных условий

$$x^{(m)} = 0,\ y^{(m)} = 0$$

при $\tau = 0$.

Пусть $x^{(m)}$, $y^{(m)}$ первые из непериодических функций ряда

$$x^{(2)},\ y^{(2)};\ x^{(3)},\ y^{(3)};\ x^{(4)},\ y^{(4)};\ x^{(5)},\ y^{(5)};\ \ldots$$

Число m должно быть нечетным и

$$G = \frac{A_1^{(m)} + B_2^{(m)}}{2} \tag{65}$$

Обращаясь после приведенных замечаний к определению одним из указанных приемов общего выражения для постоянной G в случае рассматриваемого установившегося движения тяжелой точки по винтовой линии

$$r = r_0,\ z - z_0 = a\varphi \tag{1}$$

на шероховатой поверхности

$$z = a\varphi + f(r), \tag{15}$$

можно для этой цели остановиться, например, на формуле (65).

Мы установим, что постоянная G в нашем случае выражается следующим образом

$$G = G_m f^{(m+1)}(r_0) + V_m, \tag{66}$$

где m рассматриваемое выше нечетное число, G_m известная, *неравная нулю* постоянная, а V_m определенная функция от производных $f^{(\mu)}(r_0)$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, порядка ниже $m+1$, значением которой в настоящий момент мы ближе интересоваться не будем.

Из выражения (66) следует, что для наименьшего значения $m = 3$, смотря по величине производной $f^{(4)}(r_0)$, возможен любой из случаев

$$G = G_3 f^{(4)}(r_0) + V_3 \begin{cases} < 0, \\ > 0, \\ = 0. \end{cases}$$

Если же значения производных $f^{(\nu+1)}(r_0)$, $\nu = 3, 5, \ldots, m-2$, таковы, что для каждой из них соответствующее значение постоянной

$$G = G_\nu f^{(\nu+1)}(r_0) + V_\nu$$

обращается в нуль, то, смотря по величине $f^{(m+1)}(r_0)$, может иметь место любой из случаев

$$G = G_m f^{(m+1)}(r_0) + V_m \begin{cases} < 0, \\ > 0, \\ = 0. \end{cases}$$

При ближайшем рассмотрении последовательных членов разложений

$$\Xi = f_2^{(1)} + f_3^{(1)} + \ldots,$$

$$\mathrm{H} = f_2^{(2)} + f_3^{(2)} + \ldots$$

нетрудно убедиться, что функция $f^{(m+1)}(r_0)$ появляется впервые в коэфициентах членов m-го измерения относительно малых величин ξ, ξ', η', притом лишь следующих двух из них (ср. стр. 2)

$$F_{r^m}^{(1)^{(m)}} \frac{\xi^m}{1 \cdot 2 \ldots m},$$

$$F_{r^m}^{(2)^{(m)}} \frac{\xi^m}{1 \cdot 2 \ldots m}$$

и соответственно в таких выражениях

$$\frac{g f^{(m+1)}(r_0)}{\Delta_0^2} \frac{\xi^m}{1 \cdot 2 \ldots m}$$

и

$$-\frac{a g f'(r_0) f^{(m+1)}(r_0)}{\Delta_0^2 (r_0^2 + a^2)} \frac{\xi^m}{1 \cdot 2 \ldots m}.$$

Следовательно, в состав членов m-го измерения относительно малых величин ξ, x, y разложений для X и Y функция $f^{(m+1)}(r_0)$ входит множителем соответственно таких выражений

$$\left\{\frac{1}{2}[2A_3 - (A_1 + A_2)] \frac{g}{\Delta_0^2} + s_3 \frac{a g f'(r_0)}{\Delta_0^2 (r_0^2 + a^2)}\right\} \frac{\xi^m}{1 \cdot 2 \ldots m}$$

и

$$\left\{-\frac{A_1 - A_2}{2i} \frac{g}{\Delta_0^2} + i s_1 \frac{a g f'(r_0)}{\Delta_0^2 (r_0^2 + a^2)}\right\} \frac{\xi^m}{1 \cdot 2 \ldots m}.$$

Заменяя здесь ξ через

$$\xi^{(1)} = \frac{2i \sin \tau}{[2A_3 - (A_1 + A_2)] s_1 - (A_1 - A_2) s_3} = A \sin \tau$$

и разлагая $\sin^m\tau$ в ряд по синусам кратных τ, убеждаемся, что производная $f^{(m+1)}(r_0)$ в постоянную $A_1^{(m)}$ вовсе не входит, а в постоянную $B_2^{(m)}$ входит множителем при

$$\frac{1}{is_1}\left\{-\frac{A_1-A_2}{2i}\frac{g}{\Delta_0^2}+is_1\frac{agf'(r_0)}{\Delta_0^2(r_0^2+a^2)}\right\}\frac{A^m}{\left(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\frac{m-1}{2}\right)^2(m+1)\ 2^{m-2}}$$

Из последнего выражения, в силу равенств

$$A_1-A_2=-2\frac{f_{r'}^{(1)'}s_1}{f_{\varphi'}^{(1)'}},$$

$$f_{r'}^{(1)'}=\frac{ag}{v_0\sqrt{r_0^2+a^2}}[\Delta_0^2+2f'^2(r_0)],$$

$$f_{\varphi'}^{(1)'}=\frac{2gf'(r_0)}{v_0}\sqrt{r_0^2+a^2},$$

следует, что постоянная G_m равна

$$-\frac{ag}{f'(r_0)(r_0^2+a^2)}\frac{A^m}{\left(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\frac{m-1}{2}\right)^2(m+1)2^m}$$

и, следовательно, существенно отрицательна, так как $A>0$.

Если существует такая функция $f(r)$, последовательные производные которой удовлетворяют равенству

$$G_m f^{(m+1)}(r_0)+V_m=0$$

при всяком нечетном m, начиная с $m=3$, то из рассуждений Ляпунова (стр. 147) следует, что рассматриваемое установившееся движение, имеющее место на соответствующей поверхности (15), когда соблюдается условие (17) и неравенство (41) обращается в равенство, устойчиво и принадлежит к непрерывному ряду близких движений с периодически меняющимися в зависимости от времени r, r' и φ'

Но вопрос о существовании функции, удовлетворяющей поставленным условиям, остается открытым, пока не установлена сходимость, при рассматриваемых условиях, ряда

$$f(r_0)+\frac{r-r_0}{1}f'(r_0)+\frac{(r-r_0)^2}{1\cdot 2}f''(r_0)+$$

Исследование этого вопроса, как и стоящее в связи с ним изыскание периодических решений системы уравнений (27_8), выходит из рамок настоящей работы.

§ 11. Два корня характеристического уравнения (33) или (36) равны нулю, третий корень отрицательный

В этом случае

$$D=0,\ BC-AD=0,$$

откуда также $C=0$.

Система (27) или (27_1) перепишется следующим образом

$$\frac{d\xi}{dt}-\xi'=0,$$

$$\frac{d\xi'}{dt}+\frac{f_{r'}^{(1)'}}{f_{r'}^{(1)'}}\xi'+\frac{f_{\varphi'}^{(1)'}}{f_{r'}^{(1)'}}y+\Xi=0,$$

$$\frac{dy}{dt}+\mathrm{H}=0,$$

или еще

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\xi}{dt}-x+\frac{f_{r'}{}^{(1)'}}{f_{r''}{}^{(1)'}}\xi=0,\\&\frac{dx}{dt}+\frac{f_{\varphi'}{}^{(1)'}}{f_{r''}{}^{(1)'}}y+\Xi=0,\\&\frac{dy}{dt}+\mathrm{H}=0,\end{aligned}\right\}\qquad(27_5)$$

где переменные x и y введены вместо ξ' и η' с помощью подстановок

$$\xi'=x-\frac{f_{r'}{}^{(1)'}}{f_{r''}{}^{(1)'}}\xi \qquad (67)$$

и

$$\eta'=y-\frac{f_{r'}{}^{(2)'}}{f_{\varphi''}{}^{(2)'}}\xi. \qquad (68)$$

Мы остановимся в дальнейшем лишь на тех вариантах рассматриваемого особенного случая, когда вопрос об устойчивости исследуемого установившегося движения решается конечным числом первых членов в разложениях левых частей уравнений (27_5), так что, если n означает достаточно большое целое число, система (27_5) может быть заменена любой другой системой

$$\begin{aligned}&\frac{d\xi}{dt}-x+\frac{f_{r'}{}^{(1)'}}{f_{r''}{}^{(1)'}}\xi+\Xi'=0,\\&\frac{dx}{dt}+\frac{f_{\varphi'}{}^{(1)'}}{f_{r''}{}^{(1)'}}y+\Xi=0,\\&\frac{dy}{dt}+\mathrm{H}=0,\end{aligned}$$

где Ξ' голоморфная функция от ξ, x, y, начинающаяся с членов выше n-го порядка.

Рассмотрим тогда уравнение с частными производными[1]

$$\left(\frac{f_{\varphi'}{}^{(1)'}}{f_{r''}{}^{(1)'}}y+\Xi\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}+\mathrm{H}\frac{\partial\xi}{\partial y}=-x+\frac{f_{r'}{}^{(1)'}}{f_{r''}{}^{(1)'}}\xi+\Xi',$$

допускающее формальное решение в виде голоморфного ряда

$$\xi=a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+\ldots \qquad (69)$$

коэфициенты которого определяются последовательно и первые два равны

$$a_{10}=\frac{f_{r''}{}^{(1)'}}{f_{r'}{}^{(1)'}},\quad a_{01}=\frac{f_{\varphi'}{}^{(1)'}\,f_{r''}{}^{(1)'}}{(f_{r'}{}^{(1)'})^2}.$$

Коэфициенты функции Ξ' можно, очевидно, подобрать так, что голоморфный ряд для ξ обратится в многочлен не выше n-ой степени относительно x и y.

Заменяя функцию ξ этим многочленом в уравнениях

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}+\frac{f_{\varphi'}{}^{(1)'}}{f_{r''}{}^{(1)'}}y+\Xi=0,\\&\frac{dy}{dt}+\mathrm{H}=0,\end{aligned}\right\}\qquad(70)$$

[1] Ср. § 10, Замечание 1.

зодим рассматриваемую задачу об устойчивости установившегося на интовой поверхности движения точки к исследованию системы уравнений торого порядка (70).

Исследованием подобной системы занимался акад. Ляпунов в опубликованной части своей работы[1] „Исследование одного из особенных лучаев задачи об устойчивости движения". Мы применим полученные м результаты к рассматриваемому случаю трактуемого в настоящей аботе движения.

Прежде всего, согласно Ляпунову (цитированное сочинение, стр. 283—85), необходимо подвергнуть систему (70) следующему преобразованию.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{f_{\varphi'}}{f_{r''^{(1)'}}}y+\Xi=0,$$

де после введения переменных x, y функция[2] Ξ имеет вид

$$\Xi=A_{20}x^2+A_{11}xy+A_{02}y^2+A_{30}x^3+\cdots.$$

Решая это уравнение относительно y, находим

$$B_1y=F(x)=B_2x^2+B_3x^3+\cdots \qquad B_1=-\frac{f_{\varphi'^{(1)'}}}{f_{r''^{(1)''}}},\ B_2=-A_{20},$$

Преобразуем затем уравнения (70), вводя вместо y новое переменное y_1 при помощи подстановки

$$B_1y=F(x)+y_1, \tag{71}$$

огда эти уравнения примут вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}+y_1+\Xi_1&=0,\\ \frac{dy_1}{dt}+\mathrm{H}_1&=0,\end{aligned}\right\} \tag{70$_1$}$$

де, как раньше,[3] Ξ_1, H_1, голоморфные функции переменных x, y_1, не содержащие в своих разложениях членов ниже второго порядка. При этом функция Ξ_1 делается теперь нулем при $y_1=0$, а функция H_1 имеет вид

$$\mathrm{H}_1=\varphi(x)+\psi(x)\,y_1+\cdots$$

де

$$\varphi(x)=a_0x^{\alpha}+a_1x^{\alpha+1}+\cdots.$$

олучается как результат замены B_1y функцией $F(x)$ в выражении $B_1\mathrm{H}$, а

$$\psi(x)=b_0x^{\beta}+b_1x^{\beta+1}+\cdots.$$

как результат той же замены в выражении

$$\frac{\partial\Xi}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial y}$$

Числа a_0, α, b_0, β будут играть в дальнейшем исследовании по Ляпунову вопроса об устойчивости рассматриваемого случая установившегося

[1] Математический сборник, т. 17 (1893), выпуск 2-й, стр. 253—333. Перепечатано в виде дополнительной статьи в книге А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения ОНТИ, 1935. Ссылки на страницы рассматриваемой работы даются по этому второму изданию.

[2] Функции Ξ, H определяются равенствами (52), где $f_m^{(i)}$, $m=2,\ 3,\ \ldots$, $i=1,2$, имеют вид, приведенный на стр. 2

[3] Ср. предыдущую сноску.

движения тяжелой точки на шероховатой винтовой поверхности весьма значительную роль. Мы остановимся на их определении.

Обращаясь к определению постоянных a_0, α, заметим, что H имеет вид [равенства (52)]

$$H = f_2^{(2)} + f_3^{(2)} +$$

а $f_m^{(2)}$, $m = 2, 3$ символически выражаются так

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \quad m} \left(\frac{\partial}{\partial r} \xi + \frac{\partial}{\partial r'} \xi' + \frac{\partial}{\partial \varphi'} \eta' \right)^m F^{(2)},$$

где

$$\frac{\partial^{i+j+k} F^{(2)}}{\partial r^i \partial r'^j \partial \varphi'^k} = F^{(2)}_{r^i r'^j \varphi'^k}{}^{(i+j+k)}$$

$F^{(2)}$ означает левую часть уравнения (21) после разделения ее на $r^2 \Delta^2$, значения производных берутся при $r = r_0$, $r' = 0$, $\varphi' = \omega_0$ и следует заменить ξ, ξ', η' их выражениями через x, y_1 на основании равенств (67), (68), (69) и (71).

Так как в рассматриваемом особенном случае движения удовлетворяются равенства (24) и (44), то для производных

$$F^{(2)}_{\varphi'^n}{}^{(n)} \quad F^{(2)}_{\varphi' l_r m}{}^{(l+m)}$$

имеют место те же соотношения, что и в § 9 (стр. 3).

Обращаясь к выражению ξ в виде ряда (69), в силу которого

$$\xi' = x - \frac{f_{r'}{}^{(1)'}}{f_{r''}{}^{(1)'}} \xi = - \frac{f_{\varphi'}{}^{(1)'}}{f_{r'}{}^{(1)'}} y - \frac{f_{r'}{}^{(1)'}}{f_{r''}{}^{(1)'}} a_{20} \quad x^2 - \frac{f_{r'}{}^{(\cdot)'}}{f_{r''}{}^{(1)'}} a_{11} xy -$$

$$- \frac{f_{r'}{}^{(1)'}}{f_{r''}{}^{(1)}}, a_{02} y^2 - \qquad (72)$$

из рассмотрения уравнения с частными производными для (69) заключаем что если

$$F^{(2)}_{r^j}{}^{(j)} = 0, \; j = 2, \; 3, \; . \qquad m - 1,$$

то после подстановки в (72)

$$B_1 \; y = F(x) + y_1$$

член в наинизшей степени относительно x, не содержащий y_1, там будет

$$- \frac{a_{01} a_{10}{}^m}{1 \cdot 2 \cdot \quad . m} F^{(2)}_{r^m}{}^{(m)} x^m$$

Вследствие этого, если

$$F^{(2)}_{r^j}{}^{(j)} = 0, \; j = 2, \; 3, \; . \qquad m - 1, \qquad (73)$$

то после указанных подстановок член наинизшей степени относительно x, не содержащий y_1, в выражении H_1 будет

$$\frac{a_{10}{}^m}{1 \cdot 2 \cdot \quad . m} B_1 \; F^{(2)}_{r^m}{}^{(m)} x^m.$$

Следовательно, при выполнении условий (73), постоянные a_0 и α равны

$$a_0 = \frac{a_{10}{}^m}{1 \cdot 2 \cdot \; . \; . \; m} B_1 \; F^{(2)}_{r^m}{}^{(m)}, \; \alpha = m.$$

Наименьшее значение α есть 2 и тогда

$$a_0 = \frac{a_{10}^2}{1\cdot 2} B_1 F_{r^2}^{(2)''}$$

Если же условия (73) удовлетворяются при всяком целом и положительном j, как бы велико оно ни было, то $\varphi(x)$ тождественно равна нулю и рассматриваемое установившееся движение происходит на поверхности

$$z = a\varphi + \int_{\rho}^{r} \sqrt{\left(\frac{1}{k^2}\frac{a^2}{r^2} - 1\right)\left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right)}\, dr$$

Обратимся к определению постоянных b_0 и β.

Для определения постоянной b_0 рассмотрим член первой степени относительно x в выражении

$$\frac{\partial \Xi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}$$

после введения вместо ξ, ξ', η' переменных x, y на основании равенств (67), (68), (69) и замены $B_1 y$ через $F(x)$.

Для определения коэфициента рассматриваемого члена необходимо вычислить значения производных

$$F_{r^2}^{(1)''},\ F_{r\varphi'}^{(1)''},\ F_{\varphi'^2}^{(1)''}$$

и

$$F_{rr'}^{(2)''},\ F_{r'\varphi'}^{(2)''}$$

в исследуемом особенном случае установившегося движения, когда кроме

$$-\frac{a}{r_0} + k\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{a^2 + r_0^2} f'^2(r_0)} = 0$$

удовлетворяются также условия

$$D = 0,\quad BC - AD = 0,$$

т. е.

$$f'^2(r_0) = \frac{(r_0^2 + a^2)^2}{r_0^2 (2r_0^2 + 5a^2)},$$

$$f'(r_0) f''(r_0) = -\frac{(3r_0^2 + 7a^2)(r_0^2 + a^2)}{r_0^3 (2r_0^2 + 5a^2)},$$

откуда

$$k^2 = \frac{a^2}{r_0^2}\frac{2r_0^2 + 5a^2}{3r_0^2 + 6a^2},$$

$$\Delta^2 = \frac{r_0^2 + a^2}{r_0^2}\frac{3r_0^2 + 6a^2}{2r_0^2 + 5a^2},$$

$$f''(r_0) = -\frac{3r_0^2 + 7a^2}{\sqrt{2r_0^2 + 5a^2}}\frac{1}{r_0^2},$$

$$-\frac{a^2}{r_0^3} + f'(r_0) f''(r_0) = -\frac{3(r_0^2 + 2a^2)^2}{r_0^3 (2r_0^2 + 5a^2)}.$$

Из дальнейшего будет следовать, что для устойчивости рассматриваемого движения необходимо

$$F_{r^2}^{(2)''} = 0.$$

Воспользуемся этим уравнением или эквивалентным ему уравнением

$$\frac{dS}{dr_0} = 0$$

для вычисления

$$f'(r_0)f'''(r_0).$$

Находим

$$S = r_0^3(r_0^2+a^2)f'(r_0)f''(r_0)+r_0^2(r_0^2+2a^2)f'^2(r_0)+(r_0^2+a^2)^2,$$

$$\frac{dS}{dr_0} = r_0^3(r_0^2+a^2)f'(r_0)f'''(r_0)+r_0^3(r_0^2+a^2)f''^2(r_0)+7r_0^2(r_0^2+a^2)f'(r_0)f''(r_0)+$$

$$+4r_0(r_0^2+a^2)[f'^2(r_0)+1],$$

$$r_0^2 f'(r_0)f'''(r_0) = -\frac{(3r_0^2+7a^2)^2}{(2r_0^2+5a^2)r_0^2}+\frac{7(3r_0^2+7a^2)(r_0^2+a^2)}{(2r_0^2+5a^2)r_0^2}-\frac{4(3r_0^4+7r_0^2a^2+a^4)}{(2r_0^2+5a^2)r_0^2} =$$

$$= -\frac{4a^4}{(2r_0^2+5a^2)r_0^2}.$$

$$f'(r_0)f'''(r_0) = -\frac{4a^4}{(2r_0^2+5a^2)r_0^4}.$$

Обратимся к вычислению производных

$$f_{r^2}^{(1)''} \quad f_{r\varphi'}^{(1)''} \quad f_{\varphi'^2}^{(1)''}$$

где $f^{(1)}$ левая часть уравнения (20) или (20_1).

Пользуясь результатами предыдущих вычислений (см. также § 7), находим

$$f_{r^2}^{(1)''} = -\frac{2a^2\omega_0^2}{r_0^3}+gf'''_{(r_0)} = -\frac{2a^2\omega_0^2}{r_0^3}+g\,r_0\,f'(r_0)\frac{f'''(r_0)}{f'(r_0)\,r_0} =$$

$$= -\frac{2a^2\omega_0^2}{r_0^3}-v_0^2\frac{4a^2}{(r_0^2+a^2)^2\,r_0^3} = -\frac{2a^2\omega_0^2}{r_0^3}\left[1+\frac{2a^2}{r_0^2+a^2}\right] = -\frac{2a^2\omega_0^2(r_0^2+3a^2)}{(r_0^2+a^2)r_0^3}$$

$$f_{r\varphi'}^{(1)''} = -2\frac{r_0^2-a^2}{r_0^2}\omega_0$$

$$f_{\varphi'^2}^{(1)''} = -2\frac{r_0^2+a^2}{r_0}$$

Коэфициент при первой степени x в выражении

$$\frac{\partial\Xi}{\partial x}$$

будет

$$\left[F_{r^2}^{(1)''}-2F_{r\varphi'}^{(1)''}\frac{f_{r'}^{(2)'}}{f_{\varphi''}^{(2)'}}+F_{\varphi'^2}^{(1)''}\left(\frac{f_{r'}^{(2)'}}{f_{\varphi''}^{(2)'}}\right)^2\right]a_{10}^2.$$

Но

$$F_{r^2}^{(1)''} = \left\{f_{r^2}^{(1)''}-f_r^{(1)'}\frac{2}{\Delta_0^2}\left[-\frac{a^2}{r_0^3}+f'(r_0)f''(r_0)\right]\right\}\frac{1}{\Delta_0^2},$$

$$F_{r\varphi'}^{(1)''} = \left\{f_{r\varphi'}^{(1)''}-f_{\varphi'}^{(1)'}\frac{2}{\Delta_0^2}\left[-\frac{a^2}{r_0^3}+f'(r_0)f''(r_0)\right]\right\}\frac{1}{\Delta_0^2},$$

$$F_{\varphi'^2}^{(1)''} = f_{\varphi'^2}^{(1)''}\frac{1}{\Delta_0^2}$$

и

$$f_r^{(1)'} = \left(\frac{a^2}{r_0^2}-1\right)\frac{v_0^2}{r_0^2+a^2}+gf''(r_0) = \frac{\omega_0^2}{r_0^2}\left[a^2-r_0^2+(a^2+r_0^2)\,r_0\frac{f''(r_0)}{f'(r_0)}\right] =$$

$$= -\frac{2\omega_0^2}{r_0^2}(2r_0^2+3a^2),$$

$$f_{\varphi'}^{(1)'} = -\frac{2(r_0^2+a^2)}{r_0}\omega_0,$$

$$\frac{f^{(2)'}_{r'}}{f^{(2)'}_{\varphi''}} = \frac{2r_0^2+3a^2}{(r_0^2+a^2)\,r_0}\,\omega_0.$$

Следовательно

$$-2\,f^{(1)''}_{r\varphi'}\frac{f^{(2)'}_{r'}}{f^{(2)'}_{\varphi''}} + f^{(1)''}_{\varphi'^2}\left(\frac{f^{(2)'}_{r'}}{f^{(2)'}_{\varphi''}}\right)^2 =$$

$$= -2\,\omega_0^2\,\frac{a^2\,(r_0^2+3a^2) - 2\,(r_0^2-a^2)\,(2r_0^2+3a^2) + (2r_0^2+3a^2)^2}{(r_0^2+a^2)\,r_0^3} =$$

$$= -\frac{2\omega_0^2\,a^2\,(11r_0^2+18a^2)}{(r_0^2+a^2)\,r_0^3},$$

$$-\frac{2}{\Delta_0^2}\left[-\frac{a^2}{r_0^3} + f'(r_0)\,f''(r_0)\right]\left(f^{(1)'}_{r} - 2\,f^{(1)'}_{\varphi'}\frac{f^{(2)'}_{r'}}{f^{(2)'}_{\varphi''}}\right) =$$

$$= \frac{2\,(r_0^2+2a^2)}{(r_0^2+a^2)\,r_0}\;\;\frac{2\omega_0^2\,(2r_0^2+3a^2)}{r_0^2}.$$

Таким образом коэфициент при первой степени x в выражении $\frac{\partial \Xi}{\partial x}$ равен

$$\frac{2\omega_0^2\,(4r_0^4+3r_0^2\,a^2-6a^4)}{(r_0^2+a^2)\,r_0^3}\left(\frac{a_{10}}{\Delta_0}\right)^2$$

Займемся теперь вычислением значений для рассматриваемого случая производных

$$f^{(2)''}_{rr'},\quad f^{(2)''}_{r'\varphi''},$$

где $f^{(2)}$ есть левая часть уравнения (21).

Принимая во внимание результаты предыдущих вычислений и равенства, выведенные в § 7, имеем [1]

$$f^{(2)''}_{rr'} = 2\omega_0\left|\frac{d\,(r\Delta^2)}{dr}\right|_0 + \left\{\left|\frac{d\,(\Delta N)}{dr}\right|_0 kr_0^2\,\Delta_0\,\omega_0 + \Delta_0 N_0 k\,\omega_0\left|\frac{d\,(r^2\Delta)}{dr}\right|_0\right\}\left|\frac{d\,\frac{1}{v}}{dr'}\right|_0 +$$

$$+ \Delta_0^2\,N_0\,r_0^2\,k\,\omega_0\left|\frac{d^2\left(\frac{1}{v}\right)}{dr\,dr'}\right|_0,$$

$$\left|\frac{d\,(r\Delta^2)}{dr}\right|_0 = 1 - \frac{a^2}{r_0^2} + f'^2(r_0) + 2\,r_0\,f'(r_0)f''(r_0) = -\frac{3\,(r_0^4+5r_0^2a^2+6a^4)}{(2r_0^2+5a^2)\,r_0^2}$$

$$\left|\frac{d\,(\Delta N)}{dr}\right|_0 k\,r_0^2\,\Delta_0\,\omega_0\left|\frac{d\,\frac{1}{v}}{dr'}\right|_0 = \omega_0^2\left[f'(r_0) + r_0 f''(r_0)\right]\,av_0\,\frac{af'(r_0)\,\omega_0}{v_0^3} =$$

$$= -\frac{2\omega_0\,a^2\,(r_0^2+3a^2)}{(2r_0^2+5a^2)\,r_0^2}.$$

$$\Delta_0 N_0 k\,\omega_0\left|\frac{d\,(r^2\Delta)}{dr}\right|_0\left|\frac{d\,\frac{1}{v}}{dr'}\right|_0 = -\Delta_0 N_0 k\omega_0\,r_0^2\,\Delta_0\,v_0\left|\frac{d\,\frac{1}{v}}{dr}\right|_0\left|\frac{d\,\frac{1}{v}}{dr'}\right|_0 =$$

$$= -\omega_0\,\Delta_0^2\,r_0^2\,N_0\,k\,v_0\,\frac{r_0\,\omega_0^2}{v_0^3}\,\frac{af'(r_0)\,\omega_0}{v_0^3} =$$

$$= -\omega_0\,(r_0^2+a^2)\;\;\frac{3\,(r_0^2+2a^2)}{2r_0^2+5a^2}\;\frac{ag}{\sqrt{r_0^2+a^2}}\;\frac{r_0}{r_0^2+a^2}\;\frac{af'(r_0)}{v_0^2}\;\frac{\omega_0}{v_0} =$$

$$= \frac{3\omega_0\,a^2\,(r_0^2+2a^2)}{(2r_0^2+5a^2)\,(r_0^2+a^2)},$$

[1] Значок 0 при производной указывает, что производная берется при $r=r_0$, $r'=0$, $\varphi'=\omega_0$.

$$= -\frac{3\omega_0 a^2 (r_0^2 + 2a^2)(6r_0^2 + 7a^2)}{(2r_0^2 + 5a^2)(r_0^2 + a^2) r_0^2}.$$

Следовательно

$$f^{(2)''}_{rr'} = -\frac{\omega_0 (6r_0^6 + 53r_0^4 a^2 + 125r_0^2 a^4 + 84a^6}{(2r_0^2 + 5a^2)(r_0^2 + a^2) r_0^2}.$$

Далее

$$f^{(2)''}_{r'\varphi'} = 2r_0 \Delta_0^2 + \left|\frac{d(\Delta N)}{dr'}\right|_0 k r_0^2 \Delta_0 \left|\frac{d\frac{\varphi'}{v}}{d\varphi'}\right|_0 + \left|\frac{d(\Delta N)}{d\varphi'}\right|_0 k r_0^2 \Delta_0 \omega_0 \left|\frac{d\frac{1}{v}}{dr'}\right|_0 +$$

$$+ \Delta_0^2 r_0^2 N_0 k \left|\frac{d^2\left(\frac{\varphi'}{v}\right)}{dr'\, d\varphi'}\right|_0 = 2r_0 \Delta_0^2 - 2\frac{a}{r_0} \omega_0 k r_0^2 \Delta_0 \frac{1}{v_0} +$$

$$+ 2\frac{a}{r_0} \omega_0 k r_0^2 \Delta_0 \omega_0 \frac{(r_0^2 + a^2)\omega_0}{v_0^3} -$$

$$- 2r_0 \omega_0 f'(r_0) k r_0^2 \Delta_0 \omega_0 \frac{af'(r_0)\omega_0}{v^3} - \Delta_0^2 r_0^2 N_0 k \frac{af'(r_0)\omega_0}{v^3} +$$

$$+ \Delta_0^2 r_0^2 N_0 k \omega_0 \left[-\frac{af'(r_0)}{v^3} + 3\frac{af'(r_0)\omega_0 (r_0^2 + a^2)\omega_0}{v_0^5}\right] =$$

$$= 2r_0 \Delta_0^2 + \frac{2r_0 a^2 f'^2(r_0)}{r_0^2 + a^2} - \frac{\Delta_0^2 r_0 a^2}{r_0^2 + a^2} = r_0\left[\frac{2r_0^2 + 3a^2}{r_0^2 + a^2} f'^2_{(r_0)} + \frac{2r_0^2 + a^2}{r_0^2}\right] =$$

$$= r_0\left[\frac{(2r_0^2 + 3a^2)(r_0^2 + a^2)}{r_0^2 (2r_0^2 + 5a^2)} + \frac{2r_0^2 + a^2}{r_0^2}\right] = \frac{6r_0^4 + 17r_0^2 a^2 + 8a^4}{r_0 (2r_0^2 + 5a^2)}.$$

Коэфициент при первой степени x в выражении

$$\frac{\partial H}{\partial y}$$

равен

$$-\left[F^{(2)''}_{rr'} - F^{(2)''}_{r'\varphi'} \frac{f^{(2)'}_{r'}}{f^{(2)'}_{\varphi''}}\right] \frac{f^{(1)'}_{\varphi'}}{f^{(1)'}_{r''}} a_{10}^2.$$

Но

$$F^{(2)''}_{rr'} = \left\{ f^{(2)''}_{rr'} - f^{(2)'}_{r'} \frac{2[1 + f'^2(r_0) + r_0 f'(r_0) f''(r_0)]}{r_0 \Delta_0^2} \right\} \frac{1}{r_0^2 \Delta_0^2},$$

$$f^{(2)'}_{r'} = \frac{\omega_0 r_0 \Delta_0^2 (2r_0^2 + 3a^2)}{r_0^2 + a^2},$$

$$1 + f'^2(r_0) + r_0 f'(r_0) f''(r_0) = -\frac{3a^2 (r_0^2 + 2a^2)}{r_0^2 (2r_0^2 + 5a^2)},$$

$$F^{(2)''}_{r'\varphi'} = \frac{1}{r_0^2 \Delta_0^2} f^{(2)''}_{r'\varphi'},$$

$$F^{(2)''}_{rr'} - F^{(2)''}_{r'\varphi'} \frac{f^{(2)'}_{r'}}{f^{(2)'}_{\varphi''}} = \left[f^{(2)''}_{rr'} - \frac{\omega_0 (2r_0^2 + 3a^2)(6r_0^4 + 17r_0^2 a^2 + 8a^4)}{(2r_0^2 + 5a^2)(r_0^2 + a^2) r_0^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{6\omega_0 a^2 (2r_0^2 + 3a^2)(r_0^2 + 2a^2)}{(2r_0^2 + 5a^2)(r_0^2 + a^2) r_0^2}\right] \frac{1}{r_0^2 \Delta_0^2} =$$

$$= -\frac{3\omega_0 [6r_0^4 + 23r_0^2 a^2 + 18a^4 - 2a^2 (2r_0^2 + 3a^2)](r_0^2 + 2a^2)}{(2r_0^2 + 5a^2)(r_0^2 + a^2) r_0^2} \frac{1}{r_0^2 \Delta_0^2} =$$

$$= -\frac{3\omega_0 (6r_0^4 + 19r_0^2 a^2 + 12a^4)(r_0^2 + 2a^2)}{(2r_0^2 + 5a^2)(r_0^2 + a^2) r_0^2} \frac{1}{r_0^2 \Delta_0^2} = -\frac{\omega_0 (6r_0^4 + 19r_0^2 a^2 + 12a^4)}{(r_0^2 + a^2)^2 r_0^2},$$

$$f^{(1)'}_{\varphi'} = -\frac{2\omega_0 (r_0^2 + a^2)}{r_0}.$$

Следовательно, коэфициент при первой степени x в выражении $\frac{\partial H}{\partial y}$ равен

$$-\frac{2\omega_0^2\,(6r_0^4+19r_0^2a^2+12a^4)}{(r_0^2+a^2)\,r_0^3}\left(\frac{a_{10}}{\Delta_0}\right)^2,$$

а коэфициент при первой степени x в выражении

$$\frac{\partial \Xi}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y},$$

т. е. постоянная b_0, будет

$$-\frac{4\omega_0^2\,(r_0^4+8r_0^2a^2+9a^4)}{(r_0^2+a^2)\,r_0^3}\left(\frac{a_{10}}{\Delta_0}\right)^2$$

И очевидно $\beta=1$.

Определив постоянные a_0, α; b_0, β, можно применить теперь для исследования рассматриваемого особенного случая устойчивости установившегося движения общие относящиеся сюда результаты, установленные акад. Ляпуновым в цитированной на стр. 16 работе (стр. 337—339).

Согласно этим результатам установившееся движение тяжелой точки на шероховатой винтовой поверхности с вертикальной осью при рассматриваемых в этом § условиях $D=0$, $BC-AD=0$, неустойчиво во всех следующих случаях:

1. α число четное.
2. α число нечетное, $a_0>0$.
3. β число нечетное (у нас $\beta=1$); функция $\varphi(x)$ не содержит членов ниже $2(\beta+1)$-ой степени. Случай, когда $\varphi(x)$ тождественно равна нулю, содержится здесь как частный.
4. β число нечетное; $\alpha=2\beta+1$, $b_0^2+4(\beta+1)\,a_0\geq 0$.

Последний, возможный для нашего движения, случай

5. β число нечетное; $\alpha=2\beta+1$, $b_0^2+4(\beta+1)\,a_0<0$ требует специального исследования и будет разобран дальше.

Случаи 1, 2, 3, 4 допускают в нашем движении следующее геометрическое толкование.

В плоскости z,R (см. рис. 1, т. X, вып. 1) проведем кривую

$$z=f_1(r),\quad f_1(r)=\int_\rho^r\sqrt{\left(\frac{1}{k^2}\,\frac{a^2}{r^2}-1\right)\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right)}\,dr$$

касающуюся в точке $M[r_0, f(r_0)]$ кривой

$$z=f(r),$$

производящей винтовой поверхности

$$z=a\varphi+f(r). \tag{15}$$

Рассматриваемое установившееся движение тяжелой точки по винтовой линии

$$r=r_0,\quad z-z_0=a\varphi$$

на шероховатой поверхности (15), при выполнении условий

$$D=0,\quad BC-AD=0,$$

т. е.

$$F_r^{(2)'}=0,\quad k^2=\frac{a^2}{r_0^2}\,\frac{2r_0^2+5a^2}{3r_0^2+6a^2},$$

т. е. иначе

$$f''(r_0)=f_1''(r_0),\quad k^2=\frac{a^2}{r_0^2}\,\frac{2r_0^2+5a^2}{3r_0^2+6a^2},$$

неустойчиво в каждом из следующих случаев.

1. Первая из неравных нулю производных в ряде

$$F_{rj}^{(2)(l)},\ j=3,4,\ldots$$

четного порядка, т. е. первые из последовательных производных функций $f(r)$ и $f_1(r)$, удовлетворяющие неравенству

$$f^{(l)}(r_0)\neq f_1^{(l)}(r_0),$$

нечетного порядка. В этом случае между кривыми

$$z=f_1(r) \tag{48}$$

и

$$z=f(r) \tag{49}$$

имеет место соприкасание четного порядка, т. е. кривые в точке касания пересекаются (рис. на стр. 5).

2. Первая из неравных нулю производных в ряде

$$F_{rj}^{(2)(l)},\ j=3,4,$$

нечетного порядка, т. е. первые из последовательных производных функций $f(r)$ и $f_1(r)$, удовлетворяющие неравенству

$$f^{(l)}(r_0)\neq f_1^{(l)}(r_0),$$

четного порядка, но

$$F_{rl-1}^{(2)(l-1)}>0,$$

т. е.

$$f^{(l)}(r_0)<f_1^{(l)}(r_0).$$

В этом случае между кривыми (48) и (49) имеет место соприкасание нечетного порядка, т. е. кривые в точке касания не пересекаются, но точки кривой (49), близкие к точке касания M, лежат ниже соответствующих (данному r) точек кривой (48).

3. Между кривыми (48) и (49) имеет место соприкасание выше третьего порядка. В частности

$$f(r)=f_1(r)$$

тождественно, т. е. движение происходит на поверхности

$$z=a\varphi+f_1(r).$$

4. Между кривыми (48) и (49) имеет место соприкасание третьего порядка (кривые в точке касания не пересекаются), и точки кривой (49), близкие к точке касания, лежат выше соответствующих (данному r) точек кривой (48), но величина производной

$$F_{r^2}^{(2)'''}$$

достаточно велика, т. е. величина производной

$$f^{\mathrm{IV}}(r_0)$$

достаточно мала, так что удовлетворяется неравенство

$$b_0^2+8a_0\geqslant 0.$$

В случаях 3 и 4 исследованием Ляпунова (цитированная работа, стр. 288—291 и 297) предусмотрена условная устойчивость рассматриваемого установившегося движения.

Именно, движение устойчиво для возмущений, подчиненных условию

$$b_0 y_1 \geqslant 0,$$

т. е.

$$y_1 \leqslant 0$$

или для возмущений, подчиненных условиям

$$y_1 = \Phi(x), \quad b_0 x > 0,$$

т. е.

$$y_1 = \Phi(x), \quad x < 0,$$

где

$$y_1 = \Phi(x)$$

голоморфный интеграл уравнения

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{H_1}{y_1 + \Xi_1}$$

обращающийся в нуль при $x = 0$.

В том варианте 3-го случая, когда функция $\varphi(x)$ тождественно равна нулю (ср. Ляпунов, стр. 289—291), т. е. когда движение происходит на поверхности

$$z = a\varphi + f_1(r),$$

возмущенное движение асимптотически приближается к одному из движений, соответствующих уравнениям

$$x = C', \quad y_1 = 0$$

при произвольном достаточно малом C' Те движения, для которых $b_0 C' > 0$, т. е. $C' < 0$ устойчивы, а те, для которых $C' > 0$, неустойчивы.

При этом ξ' асимптотически приближается к 0, а ξ и η' к значениям, связанным в силу равенства (68) соотношением

$$\eta' = \frac{1}{B_1} F(C') - \frac{f^{(2)'}_{r'}}{f^{(2)'}_{\varphi''}} \xi,$$

которое нетрудно проверить непосредственно, рассматривая ξ и η' как вариации величин r и φ', диференцируя обе части равенства

$$v^2 = gr f'(r)$$

и принимая во внимание значения $f'(r)$ и $f''(r)$, вычисленные для рассматриваемого случая движения выше.

Рассмотрим в заключение вопрос об устойчивости в 5-м возможном для нашего движения случае

$$\beta = 1, \quad \alpha = 3, \quad b_0^2 + 8a_0 < 0.$$

Преобразуя уравнения (70_1) при помощи подстановки

$$x = \frac{x_2}{\sqrt{-a_0}}, \quad y_1 = \frac{-y_2}{\sqrt{-a_0}},$$

можно считать $a_0 = -1$.

Введем затем в преобразованных уравнениях (70_1) вместо x_2, y_2 новые переменные ρ, ϑ при помощи равенств (Ляпунов, стр. 299 и 303),

$$x_2 = \rho \operatorname{Cs} \vartheta, \quad y_2 = -\rho^2 \operatorname{Sn} \vartheta, \tag{74}$$

где

$$\mathrm{Cs}\,\vartheta = \mathrm{cn}\,\vartheta,\ \mathrm{Sn}\,\vartheta = \mathrm{sn}\,\vartheta\,\mathrm{dn}\,\vartheta,$$

а sn, cn и dn эллиптические функции, модуль которых равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Пользуясь известными равенствами

$$\mathrm{sn}^2\vartheta + \mathrm{cn}^2\vartheta = 1,$$

и

$$\frac{1}{2}\mathrm{sn}^2\vartheta + \mathrm{dn}^2\vartheta = 1$$

$$\frac{d\,\mathrm{sn}\,\vartheta}{d\vartheta} = \mathrm{cn}\,\vartheta\,\mathrm{dn}\,\vartheta,$$

$$\frac{d\,\mathrm{cn}\,\vartheta}{d\vartheta} = -\mathrm{sn}\,\vartheta\,\mathrm{dn}\,\vartheta,$$

$$\frac{d\,\mathrm{dn}\,\vartheta}{d\vartheta} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{sn}\,\vartheta\,\mathrm{cn}\,\vartheta,$$

легко проверить следующие

$$\mathrm{Cs}^4\vartheta + 2\mathrm{Sn}^2\vartheta = 1. \tag{75}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\,\mathrm{Cs}\,\vartheta}{d\vartheta} &= -\mathrm{Sn}\,\vartheta,\\ \frac{d\,\mathrm{Sn}\,\vartheta}{d\vartheta} &= \mathrm{Cs}^3\,\vartheta.\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

В силу (75) равенства (74) дают

$$x_2^4 + 2y_2^2 = \rho^4,$$

откуда

$$x_2^3\frac{dx_2}{dt} + y_2\frac{dy_2}{dt} = \rho^3\frac{d\rho}{dt}.$$

Из тех же равенств в силу (76) и (75) находим

$$2y_2\frac{dx_2}{dt} - x_2\frac{dy_2}{dt} = \rho^3\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Заменяя здесь производные $\frac{dx_2}{dt}$ и $\frac{dy_2}{dt}$ их выражениями из преобразованных уравнений (70_1), получим следующие уравнения

$$\rho^3\frac{d\rho}{dt} = -x_2^3\,\Xi_2 + y_2\,(x_2^3 + \mathrm{H}_2),$$

$$\rho^3\frac{d\vartheta}{dt} = \rho^4 - 2y_2\,\Xi_2 - x_2\,(x_2^3 + \mathrm{H}_2),$$

вторые части которых, выраженные в переменных ρ и ϑ, представятся рядами, расположенными по целым положительным степеням ρ с периодическими относительно ϑ коэфициентами.

По характеру исследуемого случая функция H_2 такова, что если x_2 рассматривать как величину первого измерения, y_2 как величину второго измерения, то члены наинизшего измерения в ней будут

$$-x_2^3, -\frac{b_0}{\sqrt{-a_0}}\,x_2\,y_2.$$

Вследствие этого во второй части первого из последних уравнений младшим членом будет

$$-\frac{b_0}{\sqrt{-a_0}}\,x_2\,y_2^2,$$

а во второй части второго уравнения

$$\rho^4 + \frac{b_0}{\sqrt{-a_0}} x_2^2\, y_2.$$

Таким образом рассматриваемые уравнения приводятся к виду

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{b_0}{\sqrt{-a_0}} \rho^2\, \mathrm{Sn}^2\,\vartheta\, \mathrm{Cs}\,\vartheta + \rho^3\, R,$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \left(1 - \frac{b_0}{\sqrt{-a_0}}\, \mathrm{Sn}\,\vartheta\, \mathrm{Cs}^2\,\vartheta\right)\rho + \rho^2\, \Theta,$$

где R и Θ означают ряды, расположенные по целым положительным степеням ρ с периодическими относительно ϑ коэфициентами.

Решение задачи об устойчивости движения зависит в данном случае от исследования уравнения (Ляпунов, стр. 316)

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = \frac{-\frac{b_0}{\sqrt{-a_0}} \rho\, \mathrm{Sn}^2\,\vartheta\, \mathrm{Cs}\,\vartheta + \rho^2 R}{1 - \frac{b_0}{\sqrt{-a_0}}\, \mathrm{Sn}\,\vartheta\, \mathrm{Cs}^2\,\vartheta + \rho\,\Theta}, \tag{77}$$

вторая часть которого представляется в виде ряда

$$R_1 \rho + R_2 \rho^2 + R_3 \rho^3 + .$$

расположенного по целым положительным степеням ρ с периодическими относительно ϑ коэфициентами.

Коэфициент R_1 равен

$$R_1 = \frac{-\frac{b_0}{\sqrt{-a_0}}\, \mathrm{Sn}^2\,\vartheta\, \mathrm{Cs}\,\vartheta}{1 - \frac{b_0}{\sqrt{-a_0}}\, \mathrm{Sn}\,\vartheta\, \mathrm{Cs}^2\,\vartheta}$$

Полагая

$$\rho = \rho'\, e^{\int_0^{\vartheta} R_1\, d\,\vartheta}$$

из уравнения (77) выведем уравнение

$$\frac{d\rho'}{dt} = R'_2 \rho'^2 + R'_3 \rho'^3 + \ldots \tag{78}$$

в котором коэфициенты

$$R'_s = R_s\, e^{(s-1)\int_0^{\vartheta} R_1\, d\,\vartheta}$$

будут также периодическими функциями ϑ.

Полученное уравнение того же характера, что и в § 10 (Замечание 1), поэтому и задача об устойчивости движения в данном случае решается так же, как было намечено там.

---

[1] Наименьшее значение функции

$$1 - \frac{b_0}{\sqrt{-a_0}}\, \mathrm{Sn}\,\vartheta\, \mathrm{Cs}^2\,\vartheta$$

равно

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\, \frac{b_0}{\sqrt{-a_0}}$$

и в силу условий рассматриваемого случая положительно.

Функция ρ', удовлетворяющая уравнению (78), ищется под видом ряда

$$\rho' = c + u_2 c^2 + u_3 c^3 + \ldots,$$

расположенного по целым положительным степеням постоянного произвольного c, причем

$$u_2,\ u_3, \ldots \tag{79}$$

суть не зависящие от c функции ϑ, определяемые последовательно из уравнений

$$\frac{du_2}{d\vartheta} = R'_2,\ \frac{du_3}{d\vartheta} = R'_3 + 2u_2 R'_2, \ldots$$

Первая непериодическая функция в ряду (79) u_m, если таковая окажется, будет здесь соответствовать четному значению m и иметь вид

$$u_m = G\vartheta + v,$$

где G постоянное, а v некоторая периодическая функция ϑ.

Если $G > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво, а если $G < 0$ устойчиво. В последнем случае возмущенные движения, достаточно близкие к невозмущенному, будут асимптотически приближаться к нему.

Если в ряду (79), как бы далеко он ни был продолжен, содержатся только одни периодические функции, то имеет место устойчивость.

Заметим теперь, что для исследуемого установившегося движения по винтовой линии в рассматриваемом случае, когда

$$\beta = 1,\ \alpha = 3,\ b_0^2 + 8a_0 < 0,$$

между кривыми

$$z = f_1(r) \tag{48}$$

и

$$z = f(r) \tag{49}$$

имеет место соприкасание третьего порядка и точки кривой (49), близкие к точке касания, лежат выше соответствующих (данному r) точек кривой (48), но величина производной $f^{IV}(r_0)$ настолько велика, что удовлетворяется неравенство

$$b_0^2 + 8a_0 < 0.$$

Устойчивость установившегося движения зависит в этом случае от значений производных высших порядков

$$f^{(5)}(r_0),\ \text{или}\ f^{(7)}(r_0),\ \text{или}\ f^{(9)}(r_0)\ \text{и т. д.}$$

Можно установить, как в § 10, что постоянная G в нашем случае выражается следующим образом

$$G = G_m f^{(m+3)}(r_0) + V_m, \tag{80}$$

где m рассматриваемое выше четное число, G_m известная неравная нулю постоянная, а V_m определенная функция от предыдущих производных $f^{(\mu)}(r_0)$, $\mu = 1, 2. \ , m+2$, порядка ниже $m+3$, значением которой в данный момент мы ближе интересоваться не будем.

Рассматривая, как в § 10, последовательные члены разложений

$$\Xi = f_2^{(1)} + f_3^{(1)} +$$

$$\text{H} = f_2^{(2)} + f_3^{(2)} + \ldots,$$

убеждаемся, что функция $f^{(m+3)}(r_0)$ появляется впервые в коэфициентах членов $m+2$-го измерения относительно малых величин ξ, ξ' η', именно лишь следующих двух из них

$$\frac{F^{(1)(m+2)}}{r^{(m+2)}\ 1.\ 2\ldots(m+2)}\ \xi^{m+2},$$

$$\frac{F^{(2)(m+2)}}{r^{(m+2)}\ 1.\ 2\ldots(m+2)}\ \xi^{m+2}.$$

Для нашей цели, как видно из дальнейшего, достаточно рассмотреть второй из этих членов, куда функция $f^{(m+3)}(r_0)$ входит в таком выражении

$$-\frac{a\,\omega_0^2\,f^{(m+3)}\ (r_0)}{r_0\,\Delta_0^2\ 1.\ 2\ldots(m+2)}\ \xi^{m+2}$$

После перехода к переменным x_2, y_2 разложение для H примет вид

$$H_2 = \varphi\,(x_2) + \psi\,(x_2)\,y_2 + \ldots$$

где

$$\varphi\,(x_2) = -x_2^{\,3} + a_1\,x_2^{\,4} + \ldots + a_{m-1}\,x_2^{\,m+2} + .$$

и функция $f^{(m+3)}(r_0)$ встретится здесь впервые в коэфициенте a_{m-1} в таком выражении, входящем слагаемым в этот коэфициент,

$$\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}\,a\,\omega_0^2\,f^{(m+3)}(r_0)\,a_{10}^{\ m}a_{01}}{r_0\,\Delta_0^2\,1.\,2\ldots\,(m+2)\ a_0^{\ \frac{m}{2}+1}}$$

Рассматривая далее разложения по степеням ρ правой части уравнения (77) и функций

$$R = \frac{1}{\rho^6}\,[-x_2^{\,3}\,\Xi_2 + y_2\,(x_2^{\,3} + H_2)] + \frac{1}{\rho}\,\frac{b_0}{\sqrt{-a_0}}\,\mathrm{Sn}^2\,\vartheta\ \mathrm{Cs}\ \vartheta =$$

$$= R^{(0)} + R^{(1)}\,\rho + R^{(2)}\,\rho^2 + \ldots$$

$$\Theta = \frac{1}{\rho^5}\,[-2y_2\,\Xi_2 - x_2\ (x_2^{\,3} + H_2)] + \frac{1}{\rho}\,\frac{b_0}{\sqrt{-a_0}}\,\mathrm{Sn}\ \vartheta\ \mathrm{Cs}^2\ \vartheta =$$

$$= \Theta^{(0)} + \Theta^{(1)}\rho + \Theta^{(2)}\rho^2 + \ldots$$

убеждаемся, что коэфициент a_{m-1} встречается впервые в таком выражении

$$-\frac{a_{m-1}\,\mathrm{Sn}\ \vartheta\ \mathrm{Cs}^{m+2}\,\vartheta}{\left(1-\frac{b_0}{\sqrt{-a_0}}\,\mathrm{Sn}\,\vartheta\ \mathrm{Cs}^2\,\vartheta\right)^2},$$

входящем слагаемым в часть коэфициента R_m

$$\frac{\left(1-\frac{b_0}{\sqrt{-a_0}}\ \mathrm{Sn}\ \vartheta\ \mathrm{Cs}^2\ \vartheta\right)R^{(m-2)} + \frac{b_0}{\sqrt{-a_0}}\,\mathrm{Sn}^2\,\vartheta\ \mathrm{Cs}\ \vartheta\ \Theta^{(m-2)}}{\left(1-\frac{b_0}{\sqrt{-a_0}}\,\mathrm{Sn}\ \vartheta\ \mathrm{Cs}^2\ \vartheta\right)^2}$$

и вместе с ним в следующую часть постоянной G (ср. Ляпунов, стр. 331),

$$\frac{1}{2K}\int_0^{2K} e^{(m-1)\int_0^{\vartheta} E_1\,d\,\vartheta}\,R_m\,d\vartheta,$$

где $2K$ период эллиптических функций.

Таким образом постоянная G_m равна

$$-\frac{(-1)^{\frac{m}{2}} a\omega^2_0 a_{10}{}^m a_{01}}{r_0\Delta_0{}^2 1.\ 2\ldots(m+2)\, a_0{}^{\frac{m}{2}+1}} I_m,$$

где

$$I_m = \frac{1}{2K}\int_0^{2K} e^{(m-1)\int_0^{\vartheta} R_1\, d\vartheta} \frac{\mathrm{Sn}\,\vartheta\ \mathrm{Cs}^{m+2}\,\vartheta}{\left(1-\frac{b_0}{\sqrt{-a_0}}\,\mathrm{Sn}\,\vartheta\ \mathrm{Cs}^2\vartheta\right)^2} d\vartheta =$$

$$= \Phi\left(\frac{b_0}{\sqrt{-a_0}}\right) - \Phi\left(-\frac{b_0}{\sqrt{-a_0}}\right) \neq 0,$$

если положить (ср. Ляпунов, стр. 325, 326)

$$\Phi(u) = \frac{1}{K}\int_0^{\frac{K}{2}} e^{(m-1)\int_0^{\vartheta} R_1\, d\vartheta} \frac{\mathrm{Sn}\,\vartheta\ \mathrm{Cs}^{m+2}\,\vartheta}{(1-u\ \mathrm{Sn}\,\vartheta\ \mathrm{Cs}^2\,\vartheta)^2} d\vartheta.$$

Из выражения (80) следует, что для наименьшего значения $m=2$, смотря по величине производной $f^{(5)}(r_0)$, возможен любой из случаев

$$G = G_2 f^{(5)}(r_0) + V_2 \begin{cases} <0, \\ >0, \\ =0. \end{cases}$$

Если же значения производных $f^{\nu+3}(r_0)$, $\nu=2,\ 4,\ldots,\ (m-2)$, таковы, что для каждой из них соответствующее значение постоянной

$$G = G_\nu f^{(\nu+3)}(r_0) + V_\nu$$

обращается в нуль, то, смотря по величине $f^{(m+3)}(r_0)$, может иметь место любой из случаев

$$G = G_m f^{(m+3)}(r_0) + V_m \begin{cases} <0, \\ >0, \\ =0. \end{cases}$$

Если существует такая функция $f(r)$, последовательные производные которой удовлетворяют равенству

$$G_m f^{(m+3)}(r_0) + V_m = 0$$

при всяком четном m, начиная с $m=2$, то из рассуждений Ляпунова (стр. 334) следует, что установившееся движение в рассматриваемом особенном случае устойчиво и принадлежит к непрерывному ряду близких движений с периодически меняющимися в зависимости от времени

$$r,\ \frac{dr}{dt},\ \frac{d\varphi}{dt}.$$

Но вопрос о существовании функции, удовлетворяющей поставленным условиям, остается открытым, пока не установлена сходимость при рассматриваемых условиях рядов

$$a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots,$$

$$f(r_0) + \frac{r-r_0}{1} f'(r_0) + \frac{(r-r_0)^2}{1.\ 2} f''(r_0) + \ldots$$

Исследование этого вопроса, как и аналогичного вопроса в § 10, выходит из рамок настоящей работы.

§ 12. Движение тяжелой точки по винтовой линии на шероховатой поверхности при наличии других сил и в случае вращения поверхности вокруг оси винтовой линии

Если, кроме силы тяжести и силы трения, на материальную точку, движущуюся по поверхности (2), действуют другие силы, проекции которых на оси цилиндрической системы координат (§ 2) обозначим через R, Φ, Z, то диференциальные уравнения движения точки по рассматриваемой поверхности будут. [1]

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 &= -N\frac{f(r,\varphi)+(r-r_0)\frac{\partial f}{\partial r}}{\Delta} - k\,N\frac{\frac{dr}{dt}}{v} + R,\\
r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} &= -N\frac{\frac{1}{r}\left[a+(r-r_0)\frac{\partial f}{d\varphi}\right]}{\Delta} - kNr\frac{\frac{d\varphi}{dt}}{v} + \Phi,\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= -g + N\frac{1}{\Delta} - k\,N\frac{\frac{dz}{dt}}{v} + Z,
\end{aligned}\right\} \qquad (3')$$

$$\Delta = \sqrt{\left[f(r,\varphi)+(r-r_0)\frac{\partial f}{\partial r}\right]^2 + \frac{1}{r^2}\left[a+(r-r_0)\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right]^2 + 1}.$$

Повторяя рассуждения § 2-го, найдем

$$N\Delta = g - Z + \left[r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + R\right]\left[f(r,\varphi)+(r-r_0)\frac{\partial f}{\partial r}\right] -$$

$$-\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} - \Phi\right]\left[a+(r-r_0)\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right]\frac{1}{r} + 2\frac{dr}{dt}u_1 + (r-r_0)u_2.$$

Два первые из этих уравнений после подстановки в них значения z из уравнения поверхности (2) выразят движение проекции точки M на горизонтальную плоскость (r, φ).

Полагая в этих уравнениях $r = r_0$, найдем [2], как в § 3, из первого

$$v = \sqrt{r_0(g-Z)f(r_0,\varphi) - \frac{a^2+r_0^2}{r_0}R + af(r_0,\varphi)\Phi}, \qquad (8')$$

а затем из второго

$$\frac{d}{d\varphi}\left[-\frac{R}{\cos^2\alpha} + f(r_0,\varphi)(\Phi\operatorname{tg}\alpha + g - Z)\right] =$$

$$= -2(\Phi\operatorname{tg}\alpha + g - Z)\left[\operatorname{tg}\alpha - k\sqrt{1+[f(r_0,\varphi)]^2\cos^2\alpha}\right] + \frac{2\Phi}{\cos^2\alpha} \qquad (9')$$

Уравнения (8′) и (9′) играют, при наличии силы (R, Φ, Z), роль уравнений (8) и (9) § 3-го.

Можно вывести их элементарным путем, как уравнения (8) и (9) в § 4.

Уравнение (9′) обращается в (9), если сила (R, Φ, Z) не зависит от φ и z и кроме того $\Phi = 0$. В этом случае шероховатая поверхность, допускающая движение материальной точки по винтовой линии на ней, будет такой же, как при отсутствии силы [3] (R, Φ, Z).

В случае сопротивления среды $S(v)$, зависящего от скорости, имеем

---

[1] Эти уравнения являются исходными в работе Н. Р. Малкина „О движении материальной точки в заданном силовом поле по винтовой линии на шероховатой поверхности".

[2] Равенства (8′) и (9′) выведены в цитированной работе Н. Р. Малкина.

[3] Н. Р. Малкин, цитированная работа. А. В. Светлов „О винтовых поверхностях, допускающих движение точки по винтовым линиям". В обеих работах исследуются силы, под действием которых материальная точка движется по винтовой линии на соответствующей гладкой или шероховатой поверхности.

и уравнения (8′), (9′) примут вид

$$v = \sqrt{r_0\, g\, f\,(r_0,\ \varphi)},$$

$$\frac{d\, f\,(r_0\, \varphi)}{d\, \varphi} = -2\left\{\operatorname{tg}\alpha - k\sqrt{1 + [f\,(r_0,\ \varphi)]^2\,\cos^2\alpha}\right\} + \frac{2\,S\,(v)}{\cos\alpha}$$

В случае относительного движения тяжелой точки по винтовой линии на шероховатой поверхности, вращающейся вокруг вертикальной оси Oz расположенных на ней винтовых линий, следует принять вектор $(R,\ \Phi,\ Z)$ за равнодействующую сил инерции переносного движения

$$R = r\left(\frac{d\,\theta}{d\,t}\right)^2 + 2\,\frac{d\,\theta}{d\,t}\,r\,\frac{d\,\varphi}{d\,t},$$

$$\Phi = -\,r\,\frac{d^2\theta}{d\,t^2} - 2\,\frac{d\,\theta}{d\,t}\,\frac{d\,r}{d\,t},$$

$$Z = 0,$$

где θ угол поворота вращающейся поверхности вокруг вертикальной оси Oz.

Исследование характеристического уравнения соответствующей системы уравнений в вариациях ξ, η' (если положить

$$r = r_0 + \xi,\quad \frac{d\,\varphi}{d\,t} = \omega_0 + \eta',$$

ср. § 7) показывает, что диссипативные силы ($S\,(v) = \text{const}\ v$), как и вращение поверхности (гироскопические силы), изменяют характер устойчивости установившегося движения

$$r = r_0,\ \frac{d\,\varphi}{d\,t} = \omega_0$$

тяжелой точки на шероховатой ($k \neq 0$) винтовой поверхности (15) и теорема Томсона и Тэта, установленная для консервативных систем ($k = 0$) при наличии диссипативных и гироскопических сил, [1] здесь не сохраняет места.

§ 13. Движение тяжелой точки по винтовой линии на шероховатой поверхности, соответствующей общему решению уравнения (9)

Общее решение уравнения (9), соответствующее произвольному начальному значению

$$f\,(r_0,\ \varphi_0) \geqslant 0,$$

получается легко выполняемым его интегрированием.

Для этой цели положим

$$\cos\alpha\, f\,(r_0,\ \varphi) = \operatorname{tg}\,\psi,$$

где ψ новая функция от φ, тогда уравнение (9) примет вид

$$\frac{1}{2\cos\alpha\,\cos^2\psi}\,\frac{d\,\psi}{d\,\varphi} = -\operatorname{tg}\alpha + k\,\sec\,\psi$$

или, по разделении переменных,

$$\frac{1}{2\sin\alpha}\,\frac{d\,\psi}{\cos\,\psi\,(k\,\operatorname{ctg}\,\alpha - \cos\,\psi)} = d\varphi,$$

[1] W. Thomson and P. G. Tait, Treatise on Natural Philosophy, P. I (1903), p. 391.

Интегрируя имеем:

а) при $k > \operatorname{tg}\alpha$

$$\frac{1}{2k\cos\alpha}\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{k\cos\alpha}\frac{1}{\sqrt{k^2\operatorname{ctg}^2\alpha-1}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k\operatorname{ctg}\alpha-1}{k\operatorname{ctg}\alpha+1}}\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}\right)=\varphi+C_1;$$

б) при $k=\operatorname{tg}\alpha$

$$\frac{1}{2\sin\alpha}\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)-\frac{1}{2\sin\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}=\varphi+C_2;$$

в) при $k<\operatorname{tg}\alpha$

$$\frac{1}{2k\cos\alpha}\left[\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{1-k^2\operatorname{ctg}^2\alpha}}\lg\frac{\pm\left(\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}-\sqrt{\frac{1-k\operatorname{ctg}\alpha}{1+k\operatorname{ctg}\alpha}}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}+\sqrt{\frac{1-k\operatorname{ctg}\alpha}{1+k\operatorname{ctg}\alpha}}}\right]=\varphi+C_3,$$

$$\pm\left(\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}-\sqrt{\frac{1-k\operatorname{ctg}\alpha}{1+k\operatorname{ctg}\alpha}}\right)>0,$$

если положить

$$k\operatorname{ctg}\alpha=\cos\varepsilon$$

и воспользоваться равенством

$$\frac{1}{\cos\varepsilon-\cos\psi}=\frac{1}{2\sin\varepsilon}\frac{\sin\frac{\psi+\varepsilon}{2}\cos\frac{\psi-\varepsilon}{2}-\cos\frac{\psi+\varepsilon}{2}\sin\frac{\psi-\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\psi+\varepsilon}{2}\sin\frac{\psi-\varepsilon}{2}}.$$

Таким образом изменению ψ в промежутке

$$\frac{\pi}{2}\geqslant\psi\geqslant 0$$

соответствуют изменения φ, $f(r_0, \varphi)$ в промежутках — в первом случае

$$+\infty\geqslant\varphi\geqslant-\varphi_1,$$
$$+\infty\geqslant f\geqslant 0,$$

а во втором

$$+\infty\geqslant\varphi\geqslant-\infty,$$
$$+\infty\geqslant f\geqslant 0.$$

В третьем случае при изменении ψ в промежутках

$$\frac{\pi}{2}\geqslant\psi\geqslant\psi_1,\ \operatorname{tg}\frac{\psi_1}{2}=\sqrt{\frac{1-k\operatorname{ctg}\alpha}{1+k\operatorname{ctg}\alpha}},$$

и

$$0\leqslant\psi\leqslant\psi_1,$$

φ и $f(r_0, \varphi)$ изменяются соответственно в промежутках

$$+\infty\geqslant\varphi\geqslant-\infty,$$

и

$$+\infty\geqslant f\geqslant b,$$

$$-\varphi_2\geqslant\varphi\geqslant-\infty,$$
$$0\leqslant f\leqslant b,$$

где φ_1, φ_2 и b конечные постоянные, причем

$$\varphi_1 = \frac{1}{k \cos \alpha \sqrt{k^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}} \frac{\pi}{2} + C_1, \quad \varphi_2 = C_2$$

и определяются из условия, что $f(r_0, \varphi)$ имеет заданное начальное значение при $\varphi = \varphi_0$, а b удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg} \alpha - k\sqrt{1 + b^2 \cos^2 \alpha} = 0 \qquad (17')$$

При $k < \operatorname{tg} \alpha$ и неограниченном изменении $\varphi \longrightarrow -\infty$ величина $f(r_0, \varphi)$ стремится, следовательно, к постоянному значению b, определяемому из уравнения (17').

При $k \geqslant \operatorname{tg} \alpha$ предельное значение для $f(r_0, \varphi)$ нуль.

Простейшая соответствующая поверхность, на которой, при наличии трения, происходит движение тяжелой точки по винтовой линии

$$r = r_0, \quad z - z_0 = a\varphi,$$

будет линейчатой поверхностью и определяется уравнением

$$z - z_0 = a\varphi + (r - r_0) f(r_0, \varphi).$$

Скорость движения изменяется по закону

$$v = \sqrt{g r_0 f(r_0, \varphi)}$$

Случай $a = 0$ соответствует шероховатой поверхности, допускающей движение тяжелой точки по горизонтальной окружности. [2]

Тогда из уравнения (9) имеем

$$f = \sin \operatorname{hyp} 2k(\varphi - \varphi_0),$$

а из того же уравнения (9) и равенства $v = -r_0 \frac{d\varphi}{dt}$

$$\frac{d\sqrt{f}}{\sqrt{1 + (\sqrt{f})^4}} = -k\sqrt{\frac{g}{r_0}}\, dt.$$

Следовательно скорость выражается лемнискатной функцией времени.

Résumé

En généralisant le problème de Catalan [3] sur le mouvement d'un point pesant sur une surface polie, l'auteur cherche les surfaces qui admettent le mouvement d'un point pesant sur une hélice à axe vertical en présence de frottement et étudie la nature de la stabilité du mouvement d'un point pesant sur une hélice située sur une surface hélicoïde dépolie à axe vertical, ainsi que l'influence sur ce mouvement de la résistance du milieu, dépendant de la vitesse, et de la rotation de la surface autour de l'axe des hélices.

Si l'axe Oz est dirigé verticalement en haut, l'équation, en coordonnées cylindriques, de la surface passant par l'hélice

$$r \quad r_0, \quad z - z_0 = a\varphi \qquad (1)$$

sera

$$z - z_0 = a\varphi + (r - r_0) f(r_0, \varphi) + (r - r_0)^2 f_1(r, \qquad (2)$$

[1] Это и предыдущее заключения непосредственно вытекают и из рассмотрения самого уравнения (9).

[2] Ср. F. Wittenbauer, Aufgaben aus der technischen Mechanik, Bd. 1 (1919), № 506.

[3] E. Catalan. Note sur un problème de mécanique. Journal de mathématiques pures et appliquées, t. 11 (1846), p. 212.

où

$$a = r_0 \operatorname{tg} \alpha, \quad f(r_0, \varphi) = \operatorname{tg} \beta,$$

$f_1(r, \varphi)$ reste finie quand $r = r_0$ et α, β désignent les angles formés avec le plan horizontal respectivement par la tangente à l'hélice et par la droite L de l'intersection du plan tangent à la surface cherchée au point (r_0, φ, z) avec le plan vertical passant par ce point et l'axe Oz.

Le mouvement du point pesant sur la surface dépolie (2) est déterminé par les équations de Lagrange ci-dessous

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -N\frac{f(r,\varphi) + (r-r_0)\frac{\partial f}{\partial r}}{\Delta} - kN\frac{\frac{dr}{dt}}{v},$$

$$r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} = -N\frac{\frac{1}{r}\left[a + (r-r_0)\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right]}{\Delta} - kN\frac{r\frac{d\varphi}{dt}}{v},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + N\frac{1}{\Delta} - kN\frac{\frac{dz}{dt}}{v},$$

où g est le poids du point en mouvement (de masse $m = 1$), k le coefficienr de frottement, N la réaction normale et

$$\Delta = \sqrt{\left[f(r,\varphi) + (r-r_0)\frac{\partial f}{\partial r}\right]^2 + \frac{1}{r^2}\left[a + (r-r_0)\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right]^2 + 1},$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

En éliminant entre ces équations, à l'aide de (2), la réaction normale, nous obtenons ces deux équations pour le mouvement de la projection du point M sur le plan horizontal

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 &= -N\left\{\frac{f(r,\varphi) + (r-r_0)\frac{\partial f}{\partial r}}{\Delta} + k\frac{\frac{dr}{dt}}{v}\right\}, \\ r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} &= -N\left\{\frac{\frac{1}{r}\left[a + (r-r_0)\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right]}{\Delta} + k\frac{r\frac{d\varphi}{dt}}{v}\right\}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

où

$$N = \frac{g + r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\left[f(r,\varphi) + (r-r_0)\frac{\partial f}{\partial r}\right] - \frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\left[a + (r-r_0)\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right] + 2\frac{dr}{dt}u_1 + (r-r_0)u_2}{\Delta}$$

et

$$u_1 = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt},$$

$$u_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi}\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$v = \sqrt{\left\{1 + \left[f(r,\varphi) + (r-r_0)\frac{\partial f}{\partial r}\right]^2\right\}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left\{r^2 + \left[a + (r-r_0)\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right]^2\right\}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2\left[f(r,\varphi) + (r-r_0)\frac{\partial f}{\partial r}\right]\left[a + (r-r_0)\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right]\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}}$$

Posons dans ces équations $r = r_0$. Alors la première déterminera la vitesse du mouvement considéré sur l'hélice

$$v = \sqrt{g r_0 f(r_0, \varphi)}. \qquad (4)$$

La seconde des équations (3) conduit à l'équation différentielle

$$\frac{df(r_0, \varphi)}{d\varphi} = -2(\operatorname{tg}\alpha - k\sqrt{1+\cos^2\alpha \quad [f(r_0, \varphi)]}) \tag{5}$$

pour la détermination du coefficient $f(r_0, \varphi)$ dans l'équation (2), $f_1(r, \varphi)$ restant dans cette dernière équation une fonction arbitraire conservant une valeur finie quand $r = r_0$.

Les égalités (4) et (5) qu'on peut vérifier directement en partant des équations du mouvement en question sur l'hélice en projections sur la tangente à celle-ci et sur la droite L, donnent la vitesse du mouvement sur l'hélice et déterminent les surfaces qui admettent un tel mouvement.[1]

En discutant ces équations, nous distinguons d'abord deux cas particuliers

$$1)\ k = 0;$$

alors de l'équation (5) nous aurons

$$f(r_0, \varphi) = -2\operatorname{tg}\alpha \quad \varphi$$

et parmi les surfaces (2) nous trouverons la surface de Catalan

$$z - z_0 = a r_0^2 \frac{\varphi}{r^2}. \tag{6}$$

Le mouvement d'un point pesant sur une surface polie (6) en commençant, sans vitesse initiale, d'une position quelconque sur une droite horizontale ($z = z_0$, $\varphi = 0$) à la hauteur $z = z_0$, se fait ensuite sur l'hélice correspondante avec la vitesse

$$v = \sqrt{2g(z_0 - z)}.$$

$$2)\ k \neq 0.$$

Parmi les surfaces correspondant à la solution particulière de l'équation (5)

$$f(r_0, \varphi) = f'(r_0)$$

nous avons une surface hélicoïde

$$z = a\varphi + f(r) \tag{7}$$

Le mouvement le long de l'hélice sur cette surface se fait avec la vitesse constante [2]

$$v_0 = \sqrt{g r_0 f'(r_0)},\ f'(r_0) > 0, \tag{8}$$

et la condition suivante

$$\operatorname{tg}\alpha - k\sqrt{1+\cos^2\alpha \quad [f'(r_0)]^2} = 0 \tag{9}$$

doit être satisfaite.[3]

---

[1] M. I. Akimoff. Sur un problème de mécanique. Communication faite à la Conférence de mécanique de l'URSS à Moscou le 13 mai 1932, publiée dans le recueil „Mathématiques appliquées et Mécanique", t. I, Léningrade (1933), p. 56, et résumée sous le titre „Sur un problème de mécanique" dans „Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich", 1932, Bd. 2, S. 287.

[2] Cette formule est identique à celle pour la vitesse du mouvement d'un point pesant le long d'un parallèle sur une surface polie de révolution à axe vertical. Voir P. Appell, Traité de mécanique rationnelle, t. I (1926), p. 513.

[3] Dans le cas de $f'(r_0) = b$ (surface hélicoïde gauche) cette égalité et la précédente ont été déduites pour la première fois par un procédé élémentaire par le professeur Levenson dans son ouvrage „Le Séparateur spiral", Léningrade, 1925, pp. 33 et 34. Voir aussi M. I. Akimoff „Sur un cas du mouvement d'un point pesant sur une surface hélicoïde gauche—Communication faite au Congrès de mathématiciens de l'URSS à Kharkov le 26 juin 1930. Un résumé de cette communication a été publié dans „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik", Bd. 11 (1931), S. 74.

Les particules à coefficients de frottement k différents parcourent par conséquent des hélices de rayons différents r_0. On peut y voir une raison pour l'application de surfaces hélicoïdes dans les séparateurs spiraux en usage dans la préparation mécanique des minerais et en agriculture.[1]

Dans les cas particuliers

$$\text{a) } f(r) = C \lg r,$$

$$\text{b) } f(r) = C\left(\frac{r^2}{2} + a^2 \lg r\right),$$

$$\text{c) } f(r) = \int_{\rho}^{r} \sqrt{\left(\frac{1}{k^2}\frac{a^2}{r^2} - 1\right)\left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right)}\, dr,$$

$$C = \text{const},$$

$$0 < \rho \leqslant r \leqslant \frac{a}{k},$$

nous aurons

a) $v_0 = \text{const}$, et le mouvement des particules pesantes le long de toutes les hélices sur une surface dépolie (7) se produit avec une même vitesse;

b) $\frac{dz}{dt} = \text{const}$, et le mouvement des particules pesantes le long de toutes les hélices sur une surface dépolie (7) se produit avec une même vitesse verticale.[2]

c) $\operatorname{tg}\alpha - k\sqrt{1 + \cos^2\alpha \quad [f'(r_0)]^2} = 0$ identiquement, et le mouvement des particules pesantes avec le coefficient de frottement k peut se produire le long d'une hélice quelconque sur la surface (7).

Pour discuter la question de la stabilité du mouvement considéré d'un point pesant le long de l'hélice ($r = r_0$) sur la surface (7), posons dans les équations (3)

$$r = r_0 + \xi, \quad \varphi = \omega_0 t + \eta,$$

en supposant que

$$\omega_0 = -\frac{v_0}{\sqrt{a^2 + r_0^2}}.$$

Pour déterminer ξ, η nous aurons, en tenant compte des conditions (8) et (9), le système suivant d'équations de première approximation (système d'équations aux variations)

$$\Delta_0^2 \frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{ag}{v_0\sqrt{r_0^2 + a^2}}\left[\Delta_0^2 + 2f'(r_0)\right]\frac{d\xi}{dt} + \left[\left(\frac{a^2}{r_0^2} - 1\right)\frac{v_0^2}{r_0^2 + a^2} + gf''(r_0)\right]\xi +$$

$$2\frac{1}{v_0} g f'(r_0)\sqrt{r_0^2 + a^2}\frac{d\eta}{dt} = 0,$$

$$- v_0 r_0 \Delta_0^2 \frac{2r_0^2 + 3a^2}{(r_0^2 + a^2)^{3/2}}\frac{d\xi}{dt} -$$

$$- \frac{ag}{(r_0^2 + a^2)^2}\frac{1}{r_0}\left\{r_0^4[1 + f'^2(r_0)] + [2r_0^2(1 + f'^2(r_0)) + a^2]a^2 + \right.$$

$$\left. + (r_0^2 + a^2) r_0^3 f'(r_0) f''(r_0)\right\}\xi + r_0^2 \Delta_0^2 \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0,$$

---

[1] L. B. Levenson, ouvrage cité, p. 34.

[2] Une telle surface hélicoïde peut trouver une application dans les constructions de séparateurs quand la décharge de différentes particules du mélange devra se faire simultanément.

qui se réduit à un systéme du troisième ordre vu que la coordonnée η n'y entre pas explicitement.[1]

L'équation caractéristique correspondante sera celle-ci

$$As^3 + Bs^2 + Cs + D = 0 \tag{10}$$

où

$$A = r_0^2 \Delta_0^2,$$

$$B = \frac{agr_0^2 \Delta_0^2}{v_0 \sqrt{r_0^2 + a^2}} [\Delta_0^2 + 2f'^2(r_0)],$$

$$C = \frac{g\Delta_0^2}{r_0(r_0^2 + a^2)f'(r_0)} \quad [S + r_0^2(5a^2 + 2r_0^2)f'^2(r_0) - (r_0^2 + a^2,^2],$$

$$D = \frac{2ag^2 f'(r_0)}{r_0(r_0^2 + a^2)^{3/2} v_0} S,$$

$$BC - AD =$$

$$= \frac{ag^2 r_0 \Delta_0^2}{v_0(r_0^2 + a^2)^{3/2} f'(r_0)} \left\{ S + \left[1 + \frac{2f'^2(r_0)}{\Delta_0^2}\right] [r_0^2(2r_0^2 + 5a^2)f'^2(r_0) - (r_0^2 + a^2)^2] \right\}$$

et

$$S = r_0^3(r_0^2 + a^2)f'(r_0)f''(r_0) + r_0^2(r_0^2 + 2a^2)f'^2(r_0) + (r_0^2) + a^2)^2.$$

Les conditions, nécessaires et suffisantes, pour que toutes les racines de l'équation (10), quand $A > 0$, soient négatives ou (dans le cas de racines complexes) avec parties réelles négatives, sont exprimées par les inégalités suivantes

$$B > 0,\ D > 0,\ BC - AD > 0,$$

qui dans le cas présent se réduisent à deux

$$S > 0,$$

$$S + \left[1 + \frac{2f'^2(r_0)}{\Delta_0^2}\right] [r_0^2(2r_0^2 + 5a^2)f'^2(r_0) - (r_0^2 + a^2)^2] > 0.$$

Et l'on peut exprimer un critérium général de la stabilité du mouvement permanent.

$$r = r_0,\ v^2 = gr_0 f'(r_0)$$

d'un point pesant le long de l'hélice (1), se produisant sur la surface hélicoïde dépolie (7) á la condition

$$R = -\frac{a}{r_0} + k\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{a^2 + r_0^2} f'^2(r_0)} = 0,$$

de la manière suivante.[2]

Posons

$$\frac{dR}{dr_0} = \frac{a}{r_0^4(r_0^2 + a^2)\Delta_0^2} S,$$

alors, si

$$0 < k^2 \leqslant \frac{a^2}{r_0^2} \frac{2r_0^2 + 5a^2}{3r_0^2 + 6a^2},$$

---

[1] Pour le cas $f(r) = br$ (surface hélicoïde gauche), ce systéme a été déduit pour la première fois par N. P. Neronoff, „Théorie du séparateur spiral", communication faite à la Société de Mécanique à Léningrad le 20 novembre 1930.—„Sur quelques problèmes de dynamique".—Annales de l'Institut des Mines à Léningrad, t. 8 (1924), p. 252. Voir aussi la note de l'auteur, citée ci-dessus, dans „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik", Bd. II (1931), S. 74.

[2] Akimoff M. Über die Stabilitätsbedingung der ständigen Bewegung eines schweren Punktes auf einer rauhen Schraubenfläche. Proceedings of the Fourth International Congress for Applied Mechanics, Cambridge, 1934, p. 151.

on doit avoir

$$S > 0, \tag{11}$$

mais si

$$\frac{a^2}{r_0^2}\,\frac{2r_0^2+5a^2}{3r_0^2+6a^2} \leqslant k^2 < \frac{a^2}{r_0^2},$$

on doit avoir

$$S > \left[1+\frac{2f'^2(r_0)}{\Delta_0^2}\right]\left[(r_0^2+a^2)^2 - r_0^2\,(2r_0^2+5a^2)\,f'^2(r_0)\right]. \tag{12}$$

La condition

$$r_0 f''(r_0) + f'(r_0) \geq 0 \tag{13}$$

est suffisante pour la stabilité du mouvement permanent considéré puisque à cette condition les deux inégalités (11) et (12) sont satisfaites.

En vertu de la condition (13) le mouvement permanent considéré d'un point pesant le long de l'hélice (1) sur chacune des surfaces

$$z = a\varphi + br,$$

$$z = a\varphi + C\lg r,$$

$$z = a\varphi + C\left(\frac{r^2}{2} + a^2 \lg r\right),$$

en présence de frottement est stable.[1]

Pour l'équation de la surface hélicoïde

$$z = a\varphi + \int_{\rho}^{r} \sqrt{\left(\frac{1}{k^2}\frac{a^2}{r^2}-1\right)\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right)}\,dr, \quad \rho = \text{const}, \tag{14}$$

a lieu l'identité

$$R = -\frac{a}{r_0} + k\sqrt{1+\frac{r_0^2}{r_0^2+a^2}f'^2(r_0)} = 0,$$

par conséquent

$$\frac{dR}{dr_0} = 0.$$

Dans ce cas, une des racines de l'équation caractéristique correspondante (10) est égale à zéro, et les autres racines si la condition

$$0 < k^2 < \frac{a^2}{r_0^2}\,\frac{2r_0^2+5a^2}{3r_0^2+6a^2} \tag{15}$$

est satisfaite seront négatives ou auront les parties réelles négatives.

Sur la surface (14) a lieu une série continue de mouvements permanents parmi lesquels se trouve le mouvement considéré

$$r = r_0,\ v^2 = gr_0 f'(r_0).$$

---

[1] La stabilité du mouvement permanent considéré sur une surface hélicoïde gauche a été démontrée pour la première fois par N. P. Neronoff qui dans son ouvrage cité ci-dessus, a étudié des mouvements sur la surface

$$z = a\varphi + br,$$

isins des mouvements permanents.

Les mouvements sur la surface

$$z = a\varphi + C\left(\frac{r^2}{2} + a^2 \lg r\right),$$

voisins du mouvement permanent sur l'hélice (1), ont été étudiés par V. A. Egounov, „Annales de l'Institut des Mines à Léningrade", vol. X, liv. 1 (1936), p. 23.

Les mouvements de cette série seront stables si la condition (15) est satisfaite. [1]

Mais si

$$\frac{a^2}{r_0^2}\frac{2r_0^2+5a^2}{3r_0^2+6a^2} < k^2 < \frac{a^2}{r_0^2},$$

les mouvements considérés seront instables.

En appliquant la méthode de Liapounoff[2] l'auteur considére les cas où

$$D=0,$$

ou

$$BC-AD=0,$$

ou bien

$$D=0,\ BC-AD=0,$$

c'est-à-dire quand l'équation caractéristique (10) dont les autres racines sont négatives (ou à partie réelle négative) a une racine égale à zéro, ou deux racines purement imaginaires, ou deux racines égales à zéro.

Dans le cas où

$$D=0$$

la condition nécessaire et suffisante de la stabilité du mouvement permanent considéré sur l'hélice ($r=r_0$) à la surface

$$z=a\varphi+f(r) \tag{7}$$

consiste en ce que les courbes

$$z=f(r) \tag{16}$$

$$z=\int^{r}\sqrt{\left(\frac{1}{k^2}\frac{a^2}{r^2}-1\right)\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right)}\,dr \tag{17}$$

(dans le plan des coordonnées r, z) doivent avoir au point $P\,[r_0, f(r_0)]$ un contact d'ordre impair et les points de la courbe (16) voisins de P doivent être situés plus haut que les points correspondant (à la même valeur de r) de la courbe (17).

Dans le cas où

$$BC-AD=0$$

le système d'équations différentielles du mouvement troublé voisin du mouvement permanent sur l'hélice, obtenu de (3) par la substitution

$$r=r_0+\xi,\quad \varphi=\omega t+\eta,$$

se transforme en le suivant

$$\frac{dx}{dt}=-\lambda y+X,$$

$$\frac{dy}{dt}=\lambda x+Y,$$

$$\frac{d\xi}{dt}=\mu\xi-\frac{2(\lambda x-\mu y)}{[2A_3-(A_1+A_2)]\lambda-\sqrt{-1}(A_1-A_2)\mu},$$

où x, y sont de nouvelles fonctions de temps t, introduites au lieu de ξ', η'; X, Y des séries ordonnées suivant les puissances de x, y, ξ ne contenant pas de termes de première dimension, et λ, μ, A_1, A_2, A_3 des constantes.

---

[1] A. M. Liapounoff. Problème général de la stabilité du mouvement, 1892, pp. 105, 106. 2-e édition. ONTI, 1935, p. 126.

[2] Ouvrage cité (1935), pp. 106—128. Étude d'un des cas singuliers du problème de la stabilité du mouvement. Recueil mathématique, t. 17 (1893), livr. 2, pp. 253—333. (réimprimé en forme d'article supplémentaire dans l'ouvrage de Liapounoff, Problème général de la stabilité du mouvement. ONTI. 1935).

Conformément à Liapounoff, il faut chercher à satisfaire à ce système, en se servant de la méthode de Lindstedt modifiée, par les séries

$$x = x^{(1)}c + x^{(2)}c^2 + x^{(3)}c^3 +$$
$$y = y^{(1)}c + y^{(2)}c^2 + y^{(3)}c^3 +$$
$$\xi = \xi^{(1)}c + \xi^{(2)}c^2 + \xi^{(3)}c^3 +$$

où c est un petit paramètre arbitraire, et

$$x^{(j)},\ y^{(j)},\ \xi^{(j)},\ j = 1,2 \tag{18}$$

fonctions périodiques de la nouvelle variable τ introduite, au lieu de t, par la substitution

$$\tau = \frac{2\pi(t - t_0)}{T}$$

dont le dénominateur est une série ordonnée suivant les puissances du paramètre c avec des coefficients à déterminer.

Si $x^{(m)}$, $y^{(m)}$, $\xi^{(m)}$ sont les premières des fonctions non-périodiques de la série (18), alors m sera un nombre impair et la stabilité du mouvement permanent considéré dépendra, selon Liapounoff, du signe de la constante G qui est exprimée dans notre cas comme ceci

$$G_m f^{(m+1)}(r_0) + V_m,$$

où G_m est une constante connue et non égale à zéro, et V_m une fonction déterminée des dérivées $f^{(\mu)}(r_0)$ d'ordre $\mu < m+1$.

Pour la valeur la plus petite $m = 3$, selon la grandeur de la dérivée $f^{(4)}(r_0)$, sera possible un quelconque des cas

$$G_3 f^{(4)}(r_0) + V_3 \begin{cases} < 0, \text{ stabilité,} \\ > 0, \text{ instabilité,} \\ = 0, \text{ cas douteux.} \end{cases}$$

Si les valeurs des dérivées $f^{(\nu+1)}(r_0)$, $\nu = 3,5,\ \ldots,\ m-2$, sont telles que pour chacune d'elles la valeur correspondante de la constante $G_\nu f^{(\nu+1)}(r_0) + V_\nu$ devient égale à zéro, alors suivant à la grandeur de $f^{(m+1)}(r_0)$ il peut venir un quelconque des cas

$$G_m f^{(m+1)}(r_0) + V_m \begin{cases} < 0, \text{ stabilité,} \\ > 0, \text{ instabilité,} \\ = 0, \text{ cas douteux.} \end{cases}$$

En se conformant à l'égalité

$$G_m f^{(m+1)}(r_0) + V_m = 0$$

pour chaque nombre impair m, en commençant par $m = 3$, il suit des raisonnements de Liapounoff [1] que le mouvement en question sur la surface (7) est stable.

Mais la question de l'existence d'une telle surface reste ouverte.

Dans le cas où

$$D = 0,\ BC - AD = 0$$

le système d'équations différentielles pour ξ, η obtenu de (3) par substitution

$$r = r_0 + \xi,\ \varphi = \omega_0 t + \eta,$$

[1] Problème général de la stabilité du mouvement (1935), pp. 172—173.

se transforme en celui-ci

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + B_1 y + \Xi = 0, \\ \frac{dy}{dt} \qquad + \mathrm{H} = 0, \\ \frac{d\xi}{dt} - x \ - B_2 \xi = 0, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

où x, y sont de nouvelles fonctions de temps introduites au lieu de ξ', η'; Ξ, H des séries ordonnées suivant les puissances des variables x, y, ξ, ne contenant pas de termes de première dimension, et B_1, B_2 des constantes.

En considérant la solution formelle

$$\xi = a_{10}\, x + a_{01}\, y + a_{20}\, x^2 + a_{11}\, xy + a_{02}\, y^2 +$$

de l'équation aux dérivées partielles

$$(B_1 y + \Xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \mathrm{H} \frac{\partial \xi}{\partial y} + x + B_2 \xi + \Xi' = 0,$$

où Ξ' est une fonction holomorphe de x, y, ξ, commençant par des termes d'ordre supérieur à m, nous ramenons le problème de la stabilité du mouvement permanent sur l'hélice, dans les cas où la question de la stabilité de ce mouvement se résout par un nombre fini de m termes dans le développement des parties gauches des équations (19), à l'étude du système des équations du second ordre

$$\frac{dx}{dt} + B_1 y + \Xi = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} \qquad + \mathrm{H} = 0.$$

En appliquant la méthode indiquée pour l'étude de pareils systèmes par Liapounoff,[1] nous cherchons les premiers termes des développements suivant les puissances de x

$$a_0 x^{\alpha} + a_1 x^{\alpha+1} +$$

$$b_0 x^{\beta} + b_1 x^{\beta+1} +$$

des expressions

$$\mathrm{H}, \ \frac{\partial \Xi}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y},$$

où y est exprimé en fonction de x de l'équation

$$B_1 y + \Xi = 0.$$

En déterminant les constantes a_0, α, b_0, β, nous concluons que dans le cas considéré le mouvement permanent sur l'hélice est instable, si les conditions spéciales

$$\beta = 1, \ \alpha = 3, \ b_0^2 + 8a_0 < 0$$

ne sont pas remplies.

Si ces dernières conditions sont satisfaites, une analyse analogue à celle faite pour le cas de deux racines purement imaginaires de l'équation caractéristique ramène la solution du problème de la stabilité du mouvement permanent en question à la détermination du signe de la constante

$$G_m f^{(m+3)}(r_0) + V_m,$$

[1] Étude d'un des cas singuliers du problème de la stabilité du mouvement (1935), p. 280.

m est un nombre pair, G_m une certaine constante non égale à zéro, et V_m une fonction déterminée des dérivées précédentes $f^{(\nu)}(r_0)$ d'ordre inférieur à $m+3$.

Pour la valeur la plus petite $m=2$, suivant la grandeur de la dérivée $f^{(5)}(r_0)$, sera possible un quelconque des cas

$$G_2 f^{(5)}(r_0) + V_2 \begin{cases} <0, \text{ stabilité,} \\ >0, \text{ instabilité,} \\ =0, \text{ cas douteux.} \end{cases}$$

Mais si les valeurs des dérivées

$$f^{(\nu+3)}(r_0), \quad \nu = 2, 4, \qquad m-2,$$

sont telles que pour chacune d'elles la valeur correspondante de la constante

$$G_\nu f^{(\nu+3)}(r_0) + V_\nu$$

devient égale à zéro, alors suivant la grandeur de $f^{(m+3)}(r_0)$ il peut venir un quelconque des cas

$$G_m f^{(m+3)}(r_0) + V_m \begin{cases} <0, \text{ stabilité,} \\ >0, \text{ instabilité,} \\ =0, \text{ cas douteux.} \end{cases}$$

S'il existe une fonction $f(r)$ telle que ses dérivées successives satisfont à l'égalité

$$G_m f^{(m+3)}(r_0) + V_m = 0$$

pour chaque m pair, en commençant par $m=2$, alors il suit des raisonnements de Liapounoff [1] que le mouvement permanent dans le cas particulier considéré est stable et appartient à une série continue de mouvements voisins avec r, $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ changeant périodiquement quand le temps croît.

Mais la question de l'existence d'une fonction qui satisfasse les conditions posées reste ouverte, tant qu'on n'a pas établi la convergeance des séries

$$a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 +$$

$$f(r_0) + \frac{r-r_0}{1} f'(r_0) + \frac{(r-r_0)^2}{1\cdot 2} f''(r_0) +$$

Si le point matériel M, qui se meut le long d'une hélice sur une surface dépolie est soumis, outre la force de la pesanteur, à une résistance $S(v)$ dépendant de la vitesse v du mouvement du point, ou si la surface tourne autour de l'axe des hélices situées sur elle, les équations du mouvement du point M sur la surface seront celles-ci [2]

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -N\frac{f(r,\varphi) + (r-r_0)\frac{\partial f}{\partial r}}{\Delta} - kN\frac{\frac{dr}{dt}}{v} + R,$$

$$r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} = -N\frac{\frac{1}{r}\left[a + (r-r_0)\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right]}{\Delta} - kN\frac{r\frac{d\varphi}{dt}}{v} + \Phi,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + N\frac{1}{\Delta} \qquad -kN\frac{\frac{dz}{dt}}{v} + Z,$$

[1] Ouvrage cité au bas de la page 41, p. 334.

[2] Ces équations sont des points de départ de l'ouvrage de N. R Malkin „Sur le mouvement d'un point matériel dans un champ donné de forces le long d'une hélice sur une surface dépolie".

Ic

$$R = -S(v)\frac{\frac{dr}{dt}}{v},\ \Phi = -S(v)\frac{r\frac{d\varphi}{dt}}{v},\quad Z = -S(v)\frac{\frac{dz}{dt}}{v},$$

ou

$$R = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2\frac{d\theta}{dt}r\frac{d\varphi}{dt},$$

$$\Phi = -r\frac{d^2\theta}{dt^2} - 2\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt},$$

$$Z = 0$$

et θ angle de rotation de la surface autour de l'axe vertical $0z$.

La résistance du milieu et la rotation uniforme de la surface modifient le caractère de stabilité du mouvement permanent considéré du point pesant le long de l'hélice sur la surface hélicoïde.

Une solution générale $f(r, \varphi)$ de l'équation

$$\frac{df(r_0, \varphi)}{d\varphi} = -2(\operatorname{tg}\alpha - k\sqrt{1 + \cos^2\alpha\ [f(r_0, \varphi)]^2}),$$

correspondant à la valeur initiale quelconque

$$f(r_0, \varphi) \geqslant 0$$

s'obtient par une intégration facile.

Quand $k < \operatorname{tg}\alpha$ et si φ change d'une manière illimitée, $\varphi \longrightarrow -\infty$, la valeur de $f(r_0, \varphi)$ tend à une valeur constante b, qui se détermine de l'équation

$$\operatorname{tg}\alpha - k\sqrt{1 + \cos^2\alpha\ b^2} = 0.$$

Quand $k \geqslant \operatorname{tg}\alpha$ la valeur limite de $f(r_0, \varphi)$ est zéro.

La surface la plus simple correspondante, sur laquelle, en présence de frottement, le point pesant se meut le long de l'hélice

$$r = r_0,\ z - z_0 = a\varphi,$$

sera une surface réglée et se détermine par l'équation

$$z - z_0 = a\varphi + (r - r_0)f(r_0, \varphi).$$

La vitesse du mouvement change d'après la loi

$$v = \sqrt{gr_0 f(r_0, \varphi)}.$$

Le cas $a = 0$ correspond à la surface dépolie qui admet le mouvement du point pesant sur une circonférence horizontale.