Записки Ленинградского Горного Института, том XIII, вып. 2, 1940
Annales de l'Institut des Mines à Leningrad, vol. XIII, liv. 2, 1940

Особые свойства фигуры погрешности многократной обратной засечки при уравненных направлениях на точке стояния

Ассистент *Л. Н. Келль*

Besondere Eigenschaften der Fehlerfigur des mehrfachen Rückwärtseinschneiden bei ausgeglichener Richtungen am Standpunkt

Assist. *L. N. Kell*

Обратная засечка, или задача Потенота, является весьма распространенным способом вставки новой точки в имеющуюся триангуляционную опорную сеть в силу сравнительно малой затраты полевого труда. При этом наличие многократной обратной засечки, т. е. наличие более чем трех измеренных направлений на опорные пункты с искомой точки, неизбежно ставит вопрос об уравнивании.

Уравненное же значение искомой точки наиболее эффективно и, главное, чрезвычайно наглядно дает нам методика графического уравнивания, пригодная как для приближенного, так и строгого решения.

Полагаем, что основные вопросы графического уравнивания известны. Напомним только, что суть графического уравнивания — в построении и уравнивании фигуры погрешности.

И вот здесь совершенно естественна мысль о возможных преобразованиях и доказательствах, которые бы упрощали сам процесс уравнивания.

Ниже мы и рассмотрим некоторые интересные закономерности, которые нам в этом случае удалось установить.

Как известно, фигура погрешности многократной задачи Потенота имеет ряд тройных и ряд двойных точек пересечения, если направления на точке стояния предварительно уравнены, как неизбежно и бывает при обычном способе измерения круговыми приемами. Рассмотрение фигур погрешности различных „Потенотов" позволило первоначально сделать предположение, а затем и доказать следующее замечательное свойство фигуры погрешности любой многократной засечки: точка приложения равнодействующей весов двойных точек пересечения и точка приложения равнодействующей весов тройных точек пересечения совпадают между собой, причем сумма весов тройных точек находится в определенном простом отношении с суммой двойных. Поэтому для окончательного ответа нам нет надобности складывать и находить равнодействующую всех точек пересечения, а достаточно это проделать с двойными или тройными точками.

Доказательству этого и посвящена настоящая статья.

Возьмем для начала „Потенот" на четыре точки. На рис. 1 (фиг. а) в некотором масштабе изображена определяемая точка O с измеренными на ней направлениями на данные точки A, B C и D. Здесь же, но уже в своем масштабе, изображена инверсионная фигура $\alpha\beta\gamma\delta$ с градиентами обратных засечек g_{AB}, g_{AC}, g_{AD}, g_{BC},

g_{BD} и g_{CD}. А ниже (фиг. б) построена фигура погрешности с четырьмя тройными точками пересечения O_3^{I}, O_3^{II}, O_3^{III} и O_3^{IV} и с тремя двойными O_2^{I}, O_2^{II}, O_2^{III}, также в своем масштабе. Способ построения обеих фигур, повторяю, полагаем известным.

Придав соответствующие веса точкам пересечений, найдем точку приложений равнодействующей тройных и двойных точек раздельно. Уточним только веса. Очевидно, по нашим обозначениям вес тройной точки O_3' равен $3b^2$, т. е. утроенному квадрату площади, образованной градиентами g_{BC}, g_{BD}, g_{CD}, соответственно вес точки O_3^{II} равен $3d^2$, точки $O_3^{\mathrm{III}} - 3a^2$ и точки $O_3^{\mathrm{IV}} - 3c^2$. Так как у нас

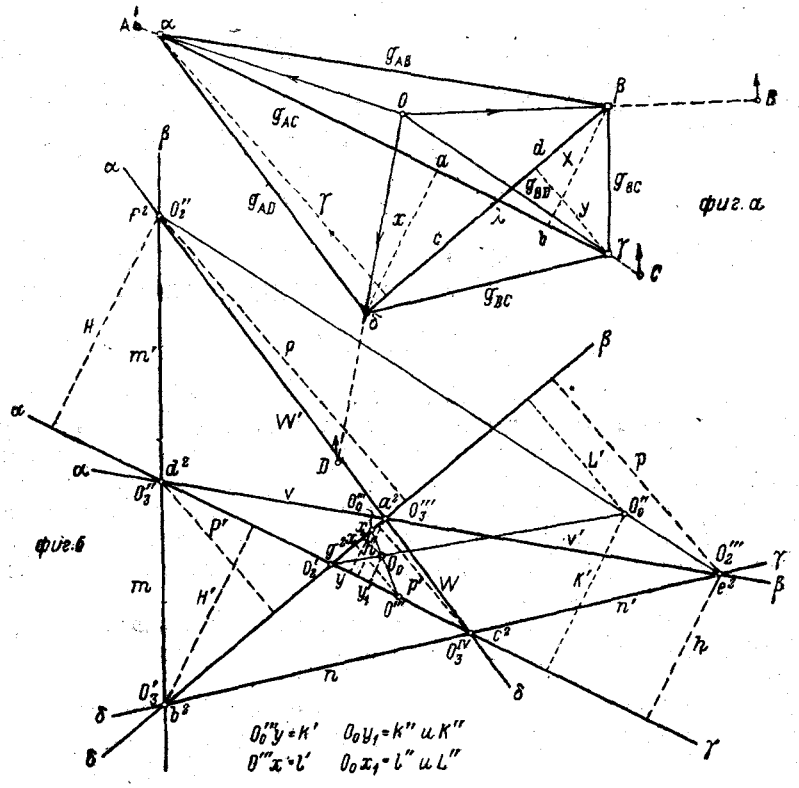


Рис. 1.

сложение пойдет раздельно, то цифра 3 может быть отброшена. Вес же двойной точки O_2^{I} равен $g_{AC}^2 \cdot g_{BD}^2 \cdot \sin^2 \varphi_{AC \cdot BD}$, т. е. учетверенному квадрату площади инверсионного четырехугольника, назовем ее через i, точки $O_2^{\mathrm{II}} = g_{BC}^2 \cdot g_{AD}^2 \cdot \sin^2 \varphi_{BC \cdot AD}$, т. е. учетверенному квадрату площади инверсионного треугольника со сторонами g_{BC} и g_{AD} и углом между ними, назовем ее через f, и точки $O_2^{\mathrm{III}} = g_{DC}^2 \cdot g_{AB}^2 \cdot \sin^2 \varphi_{DC \cdot AB}$ — учетверенному квадрату площади e соответствующего треугольника. Цифру 4 можно тоже, конечно, откинуть, как она у нас откинута и даже не упомянута при рассуждении о весах тройных точек.

На чертеже эти веса подписаны. Теперь можно по общим правилам приступать и к отысканию точки приложения равнодействующих. Пусть это будет в обоих случаях точка O_0. Нетрудно видеть, что для тройных точек последовательно можем написать:

$$\overline{O_2^{\mathrm{I}} O_0^{\mathrm{III}}} = \overline{O_3^{\mathrm{I}} O_3^{\mathrm{III}}} - \frac{\overline{O_3^{\mathrm{I}} O_3^{\mathrm{III}}} \cdot b^2}{a^2 + b^2},$$

причем вес точки $O_0^{III} = a^2 + b^2$,

$$\overline{O_2^I O^{III}} = \overline{O_3^{II} O_3^{IV}} - \frac{\overline{O_3^{II} O_3^{IV}} \cdot d^2}{a^2 + d^2},$$

причем вес точки $O^{III} = c^2 + d^2$,

$$\overline{O_0^{III} O_0} = \frac{\overline{O_0^{III} O^{III}}\,(c^2 + d^2)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

причем вес точки $O_0 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

А также и для двойных точек:

$$\overline{O_0^{II} O_2^{III}} = \frac{\overline{O_2^{II} O_2^{III}} \cdot f^2}{e^2 + f^2},$$

причем вес точки $O_0^{II} = e^2 + f^2$,

$$\overline{O_2^I O_0} = \frac{\overline{O_2^I O_0^{II}} \cdot (e^2 + f^2)}{e^2 + f^2 + i^2},$$

причем вес точки $O_0 = e^2 + f^2 + i^2$.

Далее, пользуясь пропорциональностью отрезков двух прямых, пересекаемых рядом параллельных линий, заменим указанные длины $\overline{O_2^I O_0^{III}}$, $\overline{O_3^I O_3^{III}}$ и т. д. вспомогательными H, H', P, P', h, h', p, p', проведенными перпендикулярно к диагоналям четырехугольника погрешности. При этом в обоих случаях будем считать расстояния только от точки O_2^I (пересечение диагоналей) и опять-таки по перпендикулярам к диагоналям. Тогда для равнодействующей тройных точек согласно чертежу и предыдущим выражениям напишем:

$$k'' = \frac{k' \cdot (a^2 + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \quad \text{и} \quad l'' = \frac{l' \cdot (c^2 + d^2)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

В свою очередь:

$$k' = h' - \frac{(H' + h') \cdot b^2}{a^2 + b^2}; \qquad l' = p' - \frac{(P' + p') \cdot d^2}{c^2 + d^2}.$$

Откуда, подставляя и преобразовывая, напишем окончательно:

$$\left.\begin{aligned} k'' &= \frac{a^2 \cdot h' - b^2 \cdot H'}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \\ l'' &= \frac{c^2 \cdot p' - d^2 \cdot P'}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Для равнодействующей двойных точек те же расстояния очевидно будут:

$$K'' = \frac{K' \cdot (e^2 + f^2)}{e^2 + f^2 + i^2} \quad \text{и} \quad L'' = \frac{L' \cdot (e^2 + f^2)}{e^2 + f^2 + i^2},$$

где, смотря на чертеж:

$$K' = h + \frac{(H - h)\, f^2}{e^2 + f^2}, \text{ а } L' = p - \frac{(P + p)\, f^2}{e^2 + f^2},$$

т. е. окончательно:

$$\left.\begin{aligned} K'' &= \frac{e^2 \cdot h + f^2 \cdot H}{e^2 + f^2 + i^2} \\ L'' &= \frac{e^2 \cdot p - f^2 \cdot P}{e^2 + f^2 + i^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Легко убедиться, что, доказав равенства $k'' = K''$ и $l'' = L''$, можем считать доказанной и всю теорему в целом.

Для этого заменим сперва величины H', H и h через h', а величины P', P и p через p', причем переводные множители выразим через отношения площадей инверсионных треугольников a, b, c и d. Пользуясь общеизвестными закономерностями геометрии, это нетрудно сделать. В инверсионной фигуре проведем

дополнительно ряд высот треугольников x, X и y, Y аналогично высотам h', H' и p', P' фигуры погрешности. Смотря на рис. 1, напишем:

$$\frac{h'}{x}=\frac{\overline{O_2^{\mathrm{I}}O_3^{\mathrm{IV}}}}{\overline{a\lambda}}\ ;\quad \frac{h'}{X}=\frac{\overline{O_2^{\mathrm{I}}O_3^{\mathrm{II}}}}{\overline{a\lambda}},$$

откуда: $\dfrac{\overline{O_2^{\mathrm{I}}O_3^{\mathrm{IV}}}}{\overline{O_2^{\mathrm{I}}O_3^{\mathrm{II}}}}$, равное в свою очередь $\dfrac{p'}{P'}=\dfrac{X}{x}$,

$$\frac{p'}{y}=\frac{\overline{O_2^{\mathrm{I}}O_3^{\mathrm{III}}}}{\overline{\delta\lambda}}\ ;\quad \frac{p'}{Y}=\frac{\overline{O_2^{\mathrm{I}}O_3^{\mathrm{I}}}}{\overline{\delta\lambda}},$$

откуда: $\dfrac{\overline{O_2^{\mathrm{I}}O_3^{\mathrm{III}}}}{\overline{O_2^{\mathrm{I}}O_3^{\mathrm{I}}}}$, равное в свою очередь $\dfrac{h'}{H'}=\dfrac{Y}{y}$.

Заменяя отношения высот X к x и Y к y через отношения площадей при соответственно равных основаниях, получим:

$$H'=\frac{a}{b}\cdot h' \quad\text{и}\quad P'=\frac{c}{d}\ p'. \tag{3}$$

Далее, переходя к фигуре погрешности, составим следующие соотношения:

1)

$$\frac{H}{H'}=\frac{m'}{m}\ ,\quad \frac{P}{P'}=\frac{m+m'}{m},$$

откуда:

$$\frac{P}{P'}=\frac{H+H'}{H'}.$$

2)

$$\frac{h}{H'}=\frac{n'}{n}\ ,\quad \frac{p}{p'}=\frac{n+n'}{n},$$

откуда:

$$\frac{p}{p'}=\frac{h+H'}{H'}.$$

3)

$$\frac{P}{p'}=\frac{w'}{w}\ ,\quad \frac{H}{h'}=\frac{w+w'}{w},$$

откуда:

$$\frac{H}{h'}=\frac{P+p'}{p'}.$$

4)

$$\frac{p}{P'}=\frac{v'}{v}\ ,\quad \frac{h}{h'}=\frac{v'+v}{v},$$

откуда:

$$\frac{h}{h'}=\frac{p+P'}{P'}.$$

Выпишем эти соотношения в строчку, в виде уравнений:

$$\begin{aligned}
PH'-P'H-P'H'&=0,\\
pH'-p'h-p'H'&=0,\\
Hp'-h'P-p'h'&=0,\\
hP'-h'p-h'P'&=0.
\end{aligned}$$

Заменяя H' и P' через h и p по формуле (3) и преобразовывая, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&1.\ h'adP-p'bcH-p'h'ac=0\\
&2.\ h'ap-p'bh-p'h'a=0\\
&3.\ p'H-h'P-p'h'=0\\
&4.\ p'ch-h'dp-p'h'c=0
\end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Помня о нашей задаче замены P, H, p и h через p' и h', решим полученную таким образом систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными P, H, p и h. Умножая уравнение 3 на $b \cdot c$ и складывая с первым, имеем:

$$h'adP - h'bcP - h'p'ac - h'p'bc = 0,$$

откуда

$$P = \frac{c(a+b)}{ad-bc}\ p'.$$

Умножая уравнения (3) на ad и также складывая с первым, в свою очередь напишем:

$$p'adH - p'bc - p'h'ac - p'h'ad = 0,$$

откуда

$$H = \frac{a(c+d)}{ad-bc}\ h'.$$

Беря уравнения (2) и (4) и умножая сперва первое на c, второе на b, затем в том же порядке на d и на a, получим после последовательного сложения и преобразования:

$$p = \frac{c(a+b)}{ac-bd}\ p' \quad \text{и} \quad h = \frac{a(c+d)}{ac-bd}\ h'.$$

Знаменатели выражений P, H, p и h (их только два вида) для сокращения можно преобразовать, прибегнув к очевидному равенству: $d = a+b-c$. Тогда:

$$ad - bc = a(a+b-c) - bc = a(a+b) - ac - bc = a(a+b) - c(a+b) = (a+b)(a-c)$$

и

$$ac - bd = ac - b(a+b-c) = ac + bc - b(a+b) = c(a+b) - b(a+b) = (a+b)(b-c).$$

Подставляя преобразованные знаменатели на свои места и зная, что $a+b = c+d$, сокращая, получим окончательно:

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{c}{a-c}\ p', \\ H &= \frac{a}{a-c}\ h', \\ p &= \frac{c}{c-b}\ p', \\ h &= \frac{a}{c-b}\ h'. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Теперь можем вернуться и к написанным ранее выражениям, k'', l'', K'' и L'', т. е. к основному доказательству. Отбрасывая пока знаменатели этих выражений и произведя замену в числителях, согласно формулам (3) и (5), напишем:

$$\left.\begin{aligned} &\text{числитель } k'' = a^2h' - \frac{b^2a}{b}\ h' = a(a-b)\ h', \\ &\text{числитель } l'' = c^2p' - \frac{d^2c}{d}\ p' = c(c-d)\ p', \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$\text{числитель } K'' = \frac{ae^2}{c-b}\ h' + \frac{af^2}{a-c}\ h',$$

$$\text{числитель } L'' = \frac{ce^2}{c-b}\ p' - \frac{cf^2}{a-c}\ p'.$$

Обратимся опять к инверсионной фигуре и попробуем найти зависимость между e и f и a, b, c и d. Оказывается, это нетрудно сделать. Начертим инверсионную фигуру отдельно (рис. 2) и проделаем дополнительные построения. Через точку α проведем линию, параллельную диагонали $\delta\beta$, и отложим в обе стороны от указанной точки отрезки $\alpha\alpha'$ и $\alpha\alpha''$, равные $\delta\beta$. Выше в суждениях о весах указывались следующие выражения:

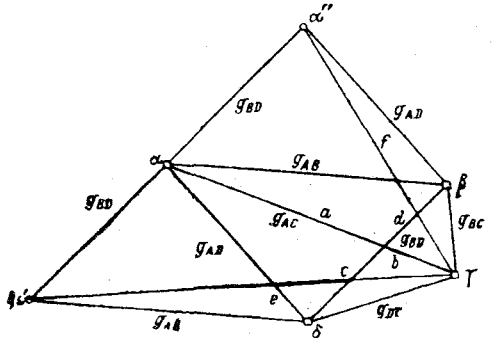


Рис. 2.

$$f^2 = \frac{1}{4}\, g_{BC}^2 \cdot g_{AD}^2 \cdot \sin^2 \varphi_{BC \cdot AD},$$

$$e^2 = \frac{1}{4}\, g_{AB}^2 \cdot g_{DC}^2 \cdot \sin^2 \varphi_{AB \cdot DC},$$

$$i^2 = \frac{1}{4}\, g_{AC}^2 \cdot g_{BD}^2 \cdot \sin^2 \varphi_{AC \cdot BD}.$$

По чертежу же нетрудно видеть, что:

$f =$ площ. $\Delta\alpha''\beta\gamma$; $e =$ площ. $\Delta\alpha'\gamma\delta$; $i = a + b = c + d =$ площ. $\Delta\alpha\alpha''\gamma =$ площ. $\Delta\alpha'\alpha\gamma$,

а

$$\text{площ. } \Delta\alpha\alpha''\beta = \text{площ. } \Delta\alpha'\alpha\delta = a.$$

Пользуясь этим, напишем далее очевидные равенства:

$$\text{площ. фиг. } \alpha\alpha''\beta\gamma = d + \overbrace{\text{пл. } \Delta\alpha\alpha''\beta}^{a} = \overbrace{i}^{c+d} + f$$

$$\text{площ. фиг. } \alpha'\alpha\gamma\delta = c + \overbrace{\text{пл. } \Delta\alpha'\alpha\delta}^{a} = \overbrace{i}^{a+b} + e$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} f &= a - c \\ e &= c - b \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Получив необходимую нам зависимость в равенствах (7), продолжим наши преобразования числителей K'' и L''. С подстановкой e и f

$$\text{числитель } K'' = \frac{a\,(c-b)^2}{c-b} \cdot h' + \frac{a\,(a-c)}{a-c}\, h',$$

а

$$\text{числитель } L'' = \frac{c\,(c-b)^2}{c-b}\, p' + \frac{c\,(a-c)}{a-c}\, p'.$$

Сокращая, имеем:

$$\left.\begin{aligned} \text{числитель } K'' &= a\,[c - b + a - c]\, h' = a\,(a-b)\, h', \\ \text{числитель } L'' &= c\,[c - \overbrace{(a+b)}^{c+d} + c]\, p' = c\,(c-d)\, p'. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Смотря на выражения (6) и (8), мы видим полное тождество числителей k'' и K'', а также l'' и L''. Остается доказать лишь равенство знаменателей, т. е. доказать, что:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + i^2.$$

Поступим опять, как прежде: e, f и i заменим через a, b и c. У нас по формуле (7) получены уже:

$$\left.\begin{aligned} f &= a - c, \\ e &= c - b, \\ \text{остается добавить, что } i &= a + b \\ \text{и что } d &= a + b - c. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Тогда:

$$e^2+f^2+i^2=a^2+c^2-2ac+c^2+b^2-2bc+a^2+b^2+2ab.$$

Группируя, напишем снова:

$$e^2+f^2+i^2=a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc)=$$
$$=a^2+b^2+c^2+(a+b-c)^2,$$

или

$$e^2+f^2+i^2=a^2+b^2+c^2+d^2. \qquad (10)$$

А это значит, что

$$k''=K'' \text{ и } l''=L'', \qquad (11)$$

т. е., что точки приложений обеих равнодействующих действительно совпадают.

Для того чтобы подтвердить равенствами (11), как указывалось в начале, и вторую часть нашей теоремы, где говорится об определенном соотношении весов равнодействующих, напишем сперва выражения для самих весов.

Вес равнодействующей двойных точек пересечения

$$P_2=e^2+f^2+i^2.$$

Вес равнодействующей тройных точек пересечения

$$P_3=3\,(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

Отсюда по равенству (10) ясно, что

$$P_3=3P_2. \qquad (12)$$

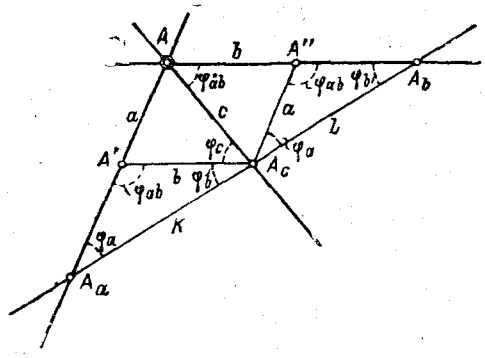


Рис. 3.

Таким образом, совокупность равенств (11) и (12) дает нам полное доказательство высказанного выше интересного свойства фигуры погрешности обратных засечек на четыре точки, которое легко распространить на „Потенот" с любым числом направлений (см. ниже).

Дадим еще другое доказательство разобранной теоремы, облегчающее вывод различных следствий. Путь этого доказательства разработан совместно с проф. Н. Г. Келль.

Докажем прежде всего такую лемму. Имеется тройная точка A (рис. 3) какой либо фигуры погрешности, полученной в результате „Потенота". AA_a, AA и AA_b — образующие эту точку линии положения. То обстоятельство, что эти линии относятся к задаче Потенота, характеризуется тем, что если из любой точки A_c провести A_cA' или A_cA'' параллельно AA_b или AA_a, то стороны полученных треугольников $A'AA_c$ или AA_cA'' — a, b и c — будут пропорциональны градиентам линий положения, дающим точку A. Это свойство мы и используем для доказательства намеченной леммы.

Пусть указанные три линии положения задачи Потенота пересекает некоторая новая линия положения A_a и A_b с градиентом g и дает точки пересечения A_a, A_b и A_c и весами P_a, P_b и P_c. Эти веса относятся, очевидно, следующим образом:

$$P_a:P_b:P_c=a^2g^2\sin^2\varphi_a:b^2g^2\sin^2\varphi_b:c^2g^2\sin^2\varphi_c=a^2\sin^2\varphi_a:b^2\sin^2\varphi_b:c^2\sin^2\varphi_c.$$

Помножим вторую часть равенства на $\dfrac{\sin^2\varphi_{ab}}{\sin^2\varphi_a\cdot\sin^2\varphi_b}$.

Получим:

$$P_a:P_b:P_c=\frac{a^2\sin^2\varphi_{ab}}{\sin^2\varphi_b}:\frac{b^2\sin^2\varphi_{ab}}{\sin^2\varphi_a}:\frac{c\sin^2\varphi_c\cdot\sin^2\varphi_{ab}}{\sin^2\varphi_a\cdot\sin^2\varphi_b}.$$

Как легко заметить из треугольника $A_cA''A_b$:

$$\frac{a\sin\varphi_{ab}}{\sin\varphi_b}=\overline{A_cA_b}=l,$$

а из треугольника $A_aA'A_c$:

$$\frac{b\sin\varphi_{ab}}{\sin\varphi_a}=\overline{A_aA_c}=k.$$

Далее из треугольника A_aAA_c: $\dfrac{c\sin\varphi_c}{\sin\varphi_a}=\overline{A_aA}$, и из треугольника A_aAA_b:

$$\frac{\overline{A_aA}\cdot\sin\varphi_{ab}}{\sin\varphi_b}=\frac{c\sin\varphi_c\cdot\sin\varphi_{ab}}{\sin\varphi_a\cdot\sin\varphi_b}=\overline{A_aA_b}=k+l.$$

Значит:

$$P_a:P_b:P_c=l^2:k^2:(k+l)^2, \tag{13}$$

что и выражает предложенную нами лемму.

Точка приложения равнодействующей точек A_a и A_b будет находиться от точки A_a на расстоянии k', которое вычисляется из следующего равенства:

$$k'=\frac{k+l}{k^2+l}\cdot k^2,$$

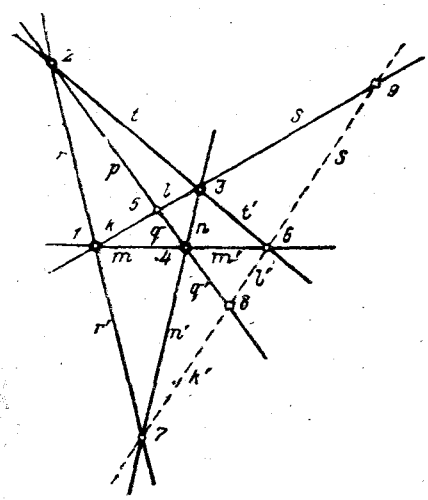


Рис. 4.

а от точки A_c на расстоянии $n_c=k'-k=\dfrac{k+l}{k^2+l^2}\cdot k^2-k$.

$$n_c=\frac{k^3+k^2l-k^3-kl^2}{k^2+l^2}=\frac{kl\,(k-l)}{k^2+l^2}. \tag{14}$$

Равенство (14) в дальнейшем будет использовано, почему мы и привели его здесь помимо равенства (13). В дополнение интересно привести еще два равенства, определяющие положение точки приложения равнодействующих уже всех трех точек A_a, A_b и A_c. А именно: расстояние до этой точки от точки A_c выразится

$$p_c=\frac{n_c\,(k^2+l^2)}{k^2+l^2+(k+l)^2}=\frac{kl\,(k-l)}{2\,(k^2+l^2+kl)}, \tag{15}$$

а от точки A_a

$$p_a=k+p_c=k\cdot\frac{k^2+1{,}5\,kl+0{,}5\,l^2}{k^2+l^2+kl}=k\cdot\frac{1+1{,}5\,\dfrac{l}{k}+0{,}5\left(\dfrac{l}{k}\right)^2}{1+\dfrac{l}{k}+\left(\dfrac{l}{k}\right)^2}. \tag{16}$$

Когда $k=l$, то $p_c=0$ и $p_a=k$.

Перейдем теперь к основному доказательству.

На рис. 4 мы имеем некоторую фигуру погрешности Потенота на 4 точки с точками пересечения: тройными *1*, *2*, *3* и *4* и двойными *5*, *6* и *7*.

Из этой фигуры на основании равенства (13) можем написать:

$$P_1':P_3':P_5=l^2:k^2:(k+l)^2$$

и $P_2:P_4':P_5=q:p^2:(q+p)^2$, причем P_1', P_2', P_3', P_4' = соответственно $\dfrac{1}{3}$ веса

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4 \tag{17}$$

тройных точек *1*, *2*, *3* и *4*.

P_5, P_6 и P_7 — веса двойных точек *5*, *6* и *7*.

Соединяя в одно, легко убедиться, что

$$P_1' : P_3' : P_2' : P_4' : P_5 = l^2 : k^2 : \frac{q^2 (k+l)^2}{(p+q)^2} : \frac{p^2 (k+l)^2}{(p+q)^2} : (k+l)^2. \qquad (18)$$

Попробуем приключить к этой зависимости и веса P_6 и P_7.
Обозначим $t + t' = a$, тогда

$$P_2' : P_3' = \frac{q^2 (k+l)^2}{(p+q)^2} : k^2 = t'^2 : a^2 \text{ и } t'^2 = a^2 \frac{q^2 (k+l)^2}{k^2 (p+q)^2},$$

откуда

$$t' = a \frac{q (k+l)}{k (p+q)}, \text{ а } t = a - t' = a \left(1 - \frac{q (k+l)}{k (p+q)}\right) = a \frac{kp - ql}{k (p+q)}.$$

По предыдущему напишем отношение:

$$P_3' : P_6 = a^2 : t^2 = a^2 : a^2 \left(\frac{kp - ql}{k (p+q)}\right)^2 = \frac{k^2 (p+q)^2}{(kp - ql)^2},$$

откуда

$$P_6 = P_3' \frac{(kp - ql)^2}{k^2 (p+q)^2}.$$

Так как P_6 мы хотим приключить к ряду отношений (18), то очевидно, вместо P_3' мы можем взять просто k^2; следовательно

$$P_6 = \frac{(kp - ql)^2}{(p+q)^2}. \qquad (19)$$

Для получения равенства (19) мы могли бы избрать и иной путь, взяв за основу другую линию положения из образующих точку *6*, а именно *1—6*. Приведем это доказательство.
Обозначая $m + m' = b$, напишем:

$$P_1' : P_4' = m'^2 : b^2; \quad m'^2 = \frac{P_1'}{P_4} b^2 = b^2 \cdot \frac{l^2 (p+q)^2}{p^2 (k+l)^2}; \quad m' = b \frac{l (p+q)}{p (k+l)},$$

$$m = b - m' = b \cdot \frac{pk + pl - pl - lq}{p (k+l)} = b \frac{pk - lq}{p (k+l)}; \quad P_6 : P_1' = \frac{m^2}{m'^2}.$$

Подставляя, получим:

$$P_6 = P_1' \frac{(pk - lq)^2}{l^2 (p+q)^2},$$

заменяя P_1' через l^2, получим $P_6 = \frac{(pk - lq)^2}{(p+q)^2}$, т. е. то же самое, что и выше в равенстве (19).

Воспользуемся аналогичным рассуждением и для установления соотношений веса P_7. Проведя соответствующие обозначения, очевидно, будем иметь:

$$r + r' = c; \quad P_1' : P_2' = \frac{l^2 (p+q)^2}{q^2 (k+l)^2} = \frac{c^2}{r'^2}; \quad r' = c \frac{q (k+l)}{l (p+q)};$$

$$r = c - r' = c \frac{lp + lq - qk - lq}{l (p+q)} = c \frac{lp - qk}{l (p+q)}; \quad P_7 : P_1' = \frac{r^2}{c^2},$$

откуда

$$P_7 = P_1' \frac{(lp - qk)^2}{l^2 (p+q)^2} = \frac{(lp - kq)^2}{(p+q)^2}. \qquad (20)$$

Сопоставляя равенства (18), (19) и (20) и умножая вес P на $(p+q)^2$, напишем интересующее нас соотношение всех весов

$$P_1' : P_3' : P_2' : P_4' : P_5 : P_6 : P_7 =$$
$$= l^2 (p+q)^2 : k^2 (p+q)^2 : q^2 (k+l)^2 : p^2 (k+l)^2 : (k+l)^2 (p+q)^2 : (pk - lq)^2 : (lp - kq)^2 \qquad (21)$$

Приравнивая веса P_1', P_2' и т. д. соответственно каждый своему члену правой части равенства (21), легко убедиться, что

$$P_1'+P_2'+P_3'+P_4' = P_5+P_6+P_7 =$$
$$=2\,(l^2p^2+l^2q^2+k^2p^2+l^2pq+k^2pq+p^2kl+q^2kl). \qquad (22)$$

Равенства (21) и (22) дают нам чрезвычайно интересную зависимость между весами точек пересечения и отрезками диагоналей фигуры погрешности, с одной стороны, и между самими весами, с другой. Кроме этого равенство (22) дает нам доказательство второй части нашей теоремы аналогично равенству (12) и предшествующим ему рассуждениям.

Напишем еще ряд дополнительных следствий, очевидных по выводу, который нам позволит сделать формула (21):

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{P_1'}+\sqrt{P_3'}=\sqrt{P_2'}+\sqrt{P_4'}=\sqrt{P_5}=(k+l)\,(p+q),\\ &P_1'+P_3'-(P_2'+P_4') = 2\sqrt{P_6P_7}=2\,(lp-qk)\,(ql-kp). \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

$$\left.\begin{aligned} &P_5=(P_1'+P_3') = 2kl\,(p+q)^2,\\ &P_5-(P_2'+P_4') = 2pq\,(k+l)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

В частном случае, когда $k=l$, то $P_6=P_7$ и прямая *6—7* параллельна прямой *1—3*, так как равнодействующая точек *6* и *7* должна лежать на прямой *2—4*.

Для дальнейшего шага в нашем доказательстве, т. е. для нахождения положения точки приложения обеих равнодействующих, прибегнем к группировке весов точек пересечения относительно тех же диагоналей, как наиболее удобных для этой цели линий, что далее будет видно. Под группировкой же подразумевается процесс разложения каждого из интересующих нас весов на две составляющие и перенесение этих составляющих параллельно самих себе в соответствующие точки, лежащие на диагоналях.

Очевидно, объектами разложений будут точки *6* и *7*, как не лежащие на диагоналях, и точка *5*, как лежащая сразу на двух диагоналях.

Применяя здесь принцип разложения весов по принципу разложения параллельных сил, мы действуем в соответствии с принципами графического уравнивания, ибо, как нам известно, нахождение наиболее вероятного результата связано со сложением параллельных сил.

Группировка весов на двух диагоналях позволит легко установить равенство расстояний по этим диагоналям от каких-либо определенных точек на диагоналях до точек равнодействующих, чтобы доказать их совпадение.

Согласно этому и поведем наши дальнейшие рассуждения. Сложим сперва P_6 и P_7 точек *6* и *7*; на основании формулы (14) равнодействующая P_6+P_7 этих двух точек будет находиться от точки *8* на расстоянии:

$$\omega = \frac{k'\cdot l'\,(k'-l')}{k'^2+l'^2}.$$

Мы рассматриваем здесь точки *6* и *7* как тройные точки, считая линию *7—6* некоторой линией положения с соответствующим градиентом.

Затем разложим вес P_6+P_7 на две составляющие: одну, приложенную в точке *8*, а другую в точке *9*, и назовем эти составляющие соответственно через P_8 и P_9.

Очевидно:

$$P_9 = \frac{P_6+P_7}{l'+s'}\,\omega \quad \text{и} \quad P_8 = \frac{P_6+P_7}{l'+s'}\,(l'+s'-\omega).$$

Воспользуемся из проективной геометрии теоремой о гармоническом отношении отрезков, лежащих на прямой, соединяющей точки пересечения противоположных сторон полного четырехугольника, и заключенных между этими точками и

точками пересечения продолжения диагоналей с этой прямой,[1] причем направление (знаки) отрезков не будем принимать во внимание. В нашем случае при четырехугольнике *1—2—3—4* и указанных точках пересечения *6*, *7*, *8* и *9* это будут отрезки $7—8 = k'$, $7—9 = k + l' + s'$, $6—8 = l'$ и $6—9 = s'$. По этой теореме:

$$\frac{k'}{k'+l'+s'} = \frac{l'}{s'}, \text{ или } \frac{s'}{k'+l'+s'} = \frac{l'}{k'}.$$

Преобразовывая эти равенства, нетрудно видеть, что

$$\frac{s'}{k'+l'} = \frac{l'}{k'-l'}; \quad \frac{s'}{l'} = \frac{k'+l'}{k'-l'}; \quad \frac{l'+s'}{l'} = \frac{2k'}{k'-l'}$$

и наконец:

$$l' + s' = \frac{2k'l'}{k'-l'}. \tag{25}$$

В свою очередь:

$$l' + s' - \omega = \frac{2k'l'}{k'-l'} - \frac{k'l'(k'-l')}{k'^2+l'^2} = \frac{k'l'(2k'^2+2l'^2-k'^2+2k'l'-l'^2)}{(k'-l')(k'^2+l'^2)} =$$

$$= \frac{k'l'(k'+l')^2}{(k'-l')(k'^2+l'^2)}.$$

Отсюда:

$$P_9 = (P_6+P_7)\frac{k'l'(k'-l')(k'-l')}{(k'^2+l'^2)2k'l'} = (P_6+P_7)\frac{(k'-l')^2}{2(k'^2+l'^2)},$$

$$P_8 = (P_6+P_7)\frac{k'l'(k'+l')^2(k'-l')}{(k'-l')(k'^2+l'^2)2k'l'} = (P_6+P_7)\frac{(k'+l')^2}{2(k'^2+l'^2)}.$$

Заметим, что по формуле (13):

$$\frac{P_6}{P_7} = \frac{k'^2}{l'^2} \text{ или } \frac{k'}{l'} = \frac{\sqrt{P_6}}{\sqrt{P_7}}.$$

Так как в выражениях для P_9 и P_8 множители при $\frac{1}{2}(P_6+P_7)$ нулевого измерения, то в них можно вместо k взять $\sqrt{P_6}$, а вместо l' величину $\sqrt{P_7}$, после чего получим:

$$\left.\begin{aligned} P_9 &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{P_6}-\sqrt{P_7})^2, \\ P_8 &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{P_6}+\sqrt{P_7})^2. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Из этого равенства видно, что $P_9 + P_8 = P_6 + P_7$, как и должно быть. Подставив в равенства (26) значения P_6 и P_7 из равенства (21) и преобразовывая, получим

$$\left.\begin{aligned} P_8 &= \tfrac{1}{2}(p-q)^2(k+l)^2, \\ P_9 &= \tfrac{1}{2}(k-l)^2(p+q)^2. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Поставленную выше задачу о замене весов P_6 и P_7, как видим по равенству (27), можем считать таким образом выполненной.

Разобьем теперь P_5 на два слагаемых P_5' и P_5'' так, чтобы

$P_6' + P_8$ равнялось бы $P_2' + P_4'$, тогда

$P_5'' + P_9$ будет равняться $P_1' + P_3'$.

---

[1] См. об этом хотя бы в книге проф. Н. Г. Келль „Фотография и фотограмметрия", § 13, ОНТИ, 1938.

В возможности этого нетрудно убедиться, так как $P_5'+P_5''+P_8+P_9$ по условиям разложения P_5 и суммы P_6+P_7 равняется $P_5+P_6+P_7$. А эта сумма по равенству (22) равна $P_1'+P_2''+P_3'+P_4''$.

Заменяя веса по равенствам (21) и (27), получим

$$\left.\begin{aligned} P_5' &= P_2'+P_4'-P_8=(k+l)^2(p^2+q^2)-\tfrac{1}{2}(k+l)^2(p^2-2pq+q^2)= \\ &= \tfrac{1}{2}(k+l)^2(p+q)^2, \\ P_5'' &= P_1''+P_3''-P_9=(k^2+l^2)(p+q)^2-\tfrac{1}{2}(k^2-2kl+l^2)(p+q)^2= \\ &= \tfrac{1}{2}(k+l)^2(p+q)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Далее по сказанному выше, очевидно, надо находить положение точек приложения равнодействующих весов по группам и для каждой диагонали, т. е. находить расстояния их от некоторой исходной точки на диагоналях (за эту точку, видимо, удобнее всего взять точку *5*). Для равнодействующей P_2'' и P_4'' и для равнодействующей P_1' и P_3' это нетрудно сделать, так как интересующее нас расстояние будет выражаться через отрезки k, l, p и q, через которые мы выражаем вообще все наши соотношения. Для равнодействующих же P_5'' и P_8'' и соответственно для P_5' и P_9 придется необходимые здесь отрезки s и q' выразить через известные нам те же k, l, p и q.

Из теоремы о равенстве двойных отношений в проективной геометрии вытекает, что двойное отношение отрезков отдельных прямых, пересекающих какой либо веер из четырех лучей, остается постоянным.[1] Проведя в нашем случае луч *2—9* (на рис. 4 он не показан), будем иметь четыре луча: *2—7*, *2—8*, *2—6*, *2—9*, пересеченных двумя линиями *7—9* и *1—9*. Мы уже выше выяснили, что отрезки линии *7—9* находятся в гармоническом отношении.

Следовательно и отрезки линии *1—9* находятся в таком же отношении, т. е. мы можем написать аналогично равенству (25), что:

$$l+s=\frac{2kl}{k-l}. \qquad (29)$$

Так же, проведя луч *1—8*, мы получим пучок четырех лучей с вершиной в точке *1* и двумя секущими *2—8* и той же *7—9*. Отсюда и для диагонали *2—8* получим:

$$q+q'=\frac{2pq}{p-q}. \qquad (30)$$

Теперь можно приступать к нахождению точек положения равнодействующих уже окончательно.

Сложим P_5'' и P_8, находящиеся на расстоянии $q+q'$ друг от друга. Получим расстояние ω' равнодействующей $P_5''+P_8=P_2''+P_4''$ от точки *5* в таком виде:

$$w'=\frac{2pq}{p-q}\cdot\frac{P_8}{P_2''+P_4''}.$$

Заменяя P_2'' и P_4'' значениями из формулы (21), а P_8 из (27) и подставляя, имеем:

$$w'=\frac{2pq}{p-q}\cdot\frac{\frac{1}{2}(p-q)^2(k+l)^2}{(k+l)^2(p^2+q^2)}=\frac{pq(p-q)}{p^2+q^2}.$$

[1] См. цитированную выше книгу проф. Н. Г. Келль, § 13.

А по формуле (14) расстояние ω'' равнодействующей $P_2'+P_4''$ или по (17) $3P_2'+3P_4''=P_2+P_4$ от той же точки *5* выразится так:

$$\omega''=\frac{pq(p-q)}{p^2+q^2},$$

т. е. $\omega'=\omega''$ и точки приложения равнодействующих $P_2'+P_8$ и P_2+P_4 между собой совпадают.

Так же расстояние ω''' равнодействующей $P_5''+P_9$ от точки *5*, представляющееся в таком виде:

$$\omega'''=\frac{l+s}{P_1'+P_2'}\cdot P_9=\frac{2kl}{k-l}\cdot\frac{\frac{1}{2}(k-l)^2\cdot(p+q)^2}{(k^2+l^2)(p+q)^2}=\frac{kl(k-l)}{k^2+l^2},$$

равно расстоянию ω^{IV} от той же точки *5* равнодействующей $P_1'+P_3'$ или P_1+P_3, найденному по формуле (14):

$$\omega^{IV}=\frac{kl(k-l)}{k^2+l^2}.$$

Итак точки приложения $P_5''+P_8$ и P_2+P_4, с одной, и $P_5''+P_9$ и P_1+P_3, с другой стороны, между собой совпадают. Значит, и точки приложения дальнейших равнодействующих $P_5'+P_5''+P_8+P_9=P_5+P_8+P_9=P_5+P_6+P_7$ и $P_1+P_2+P_3+P_4$ между собой совпадают, так как $P_5''+P_8=\frac{1}{3}(P_2+P_4)$, а $P_5''+P_9=\frac{1}{3}(P_1+P_3)$; таким образом, повторим еще раз, там, где получается равнодействующая двойных точк *5*, *6* и *7*, приходится и равнодействующая тройных точек *1*, *2*, *3* и *4*.

Вес равнодействующей, или иначе сумма весов всех точек $[P]=W$, будет:

$$W=4(P_1'+P_2'+P_3'+P_4')=\frac{4}{3}(P_1+P_2+P_3+P_4)=4(P_5+P_6+P_7), \qquad (31)$$

что вытекает и находится в соответствии с равенствами (17) и (22), которые гласят, что сумма весов двойных точек в три раза меньше суммы весов тройных точек.

Замечательно, что в частном случае, когда P_6 и P_7 равны нулю или почти равны нулю, т. е. когда инверсионный четырехугольник близок к параллелограмму (прямоугольнику, квадрату, ромбу, или просто параллелограмму), общая равнодействующая попадет в пересечение диагоналей фигуры (четырехугольника) погрешности (точка *5* на рис. 4) и общий вес, очевидно, будет равен шестнадцати квадратам площади указанного параллелограмма. Значит, в этом случае после уравнивания углов на станции, взятых во всех комбинациях, можно совершенно строго провести только две диагональных линии положения и найти их точку пересечения, которая и будет ответом. Т. е. мы сразу же получаем уравненные координаты искомой точки по двум обратным диагональным засечкам (засечки на разные точки через одну, например: *1—3* и *2—4*, если точки расположены так: *1*, *2*, *3* и *4*). Подобным образом хорошо бы и в других случаях подбирать данные точки так, чтобы уравненные результаты засечек от всех точек заведомо равнялись бы результатам только двух засечек, двух линий положения, если произвести некоторое предварительное простое уравнивание, связывающее все засечки, все линии положения.

Вообще, при задаче Потенота на 4 точки достаточно строить только 4 линии положения — 4 стороны инверсионного четырехугольника, т. е. линии *1—2*, *2—3*, *3—4* и *4—1* на рис. 4, и брать только четыре точки пересечения — четыре вершины *1*, *2*, *3* и *4* фигуры погрешности, найти их равнодействующую; она будет равна $P_1'+P_2'+P_3''+P_4''$, т. е. $\frac{1}{4}$ от общей суммы весов всех точек. Точка приложения этой равнодействующей будет и решением задачи, т. е. точкой прило-

жения самой W. Диагональные линии положения *1—3* и *2—4* проводятся лишь для контроля построения.

Распространим доказанную теорему и на случаи более четырех направлений. Возьмем пять направлений:

„Потенот" из пяти направлений, уравненных на точке, образует:

$N_5^{IV} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 5$ четырехугольников в фигуре погрешности, имеющих $5 \times 4 = 20$ вершин.

$p_5 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ линий положения.

$N_5''' = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ тройных точек, т. е. каждая тройная точка будет играть два раза роль вершины четырехугольника погрешности.

$N_5'' = \frac{p_5(p_5-1)}{1 \cdot 2} - 3N_5''' = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} - 30 = 45 - 30 = 15$ двойных точек $= 3N_5^{IV}$, т. е. на каждый четырехугольник по три точки.

Разложим вес каждой тройной точки пополам. Таким образом, в каждом четырехугольнике будет в каждой вершине по $^1/_2$ тройной точки и целой двойной точке. На основании предыдущего равнодействующая этих половинок в каждом четырехугольнике пройдет там, где пройдет и равнодействующая двойных точек, сами же равнодействующие будут пропорциональны между собой. Отсюда следует, что вообще равнодействующая всех N_5''' тройных точек W_5''' будет там же, где равнодействующая W_5'' всех N_5'' двойных точек. При этом очевидно:

$$W_5''' = \frac{3}{2} W_5'' \text{ и } W_5'' = \frac{2}{3} W_5''',$$

а общая равнодействующая

$$W_5 = W_5''' + W_5'' = \frac{5}{3} W_5''' = \frac{5}{2} W_5''.$$

Тройных точек меньше, значит их выгоднее суммировать.

Возьмем n направлений, тогда:

число четырехугольников $N_n^{IV} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, имеющих

$$4N_n^{IV} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ вершин,} \tag{32}$$

число тройных точек

$$N_n''' = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \tag{33}$$

т. е. каждая тройная точка будет играть роль вершины того или иного четырехугольника.

$$\frac{4N_n^{IV}}{N_n'''} = n - 3 \text{ раз.} \tag{34}$$

Число линий положения

$$p_n = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = \frac{n^2 - n}{2}. \tag{35}$$

Число двойных точек

$$N_n'' = \frac{p_n(p_n-1)}{1 \cdot 2} - 3N_n''' = 3N_n^{IV}, \tag{36}$$

т. е. $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

Пользуясь тем же методом рассуждения, как и при 5 направлениях, можно доказать, что равнодействующая W'''_n всех тройных точек совпадает с равнодействующей W_n всех вообще точек. При этом

$$W'''_n = \frac{3}{n-3} W''_n \tag{37}$$

и

$$W_n = W''_n + W'''_n = \frac{n}{n-3} W''_n = \frac{n}{3} W'''_n \tag{38}$$

Остается доказать, что

$$\frac{p_n (p_n - 1)}{1 \cdot 2} - 3N'''_n = 3N^{IV}_n.$$

Подставив значения p_n и N'''_n, получим

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n^2-n}{2}\right)\left(\frac{n^2-n-2}{2}\right) - \frac{n(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)(n^2-1-n-1) - n(n-1)(n-2)4}{8} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)(n-2) - 4n(n-1)(n-2)}{8} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8} = 3N^{IV}_n,$$

что и требовалось доказать, хотя это и должно вытекать из того, что двойные точки входят в отдельные четырехугольники только один раз; они в четырехугольниках не повторяются, потому что представляют сочетание двух совершенно различных пар в каждой комбинации из четырех направлений, в каждом четырехугольнике.

Zusammenfassung

Das Rückwärtseinschneiden oder die Potenotsche Aufgabe ist ein sehr verbreitetes Verfahren der Einschaltung eines neuen Punktes. Das Vorhandensein eines mehrfachen Rückwärtseinschneidens macht immer eine Ausgleichung erforderlich. Die einfachste und anschaulichste Ausgleichungsart ist in diesem Falle die graphische, wo bekanntlich die Linienlagen ausgenutzt werden. Unter Voraussetzung der Grundsätze dieser Ausgleichung als bekannt, behandelt dieser Artikel, ohne weiteres, die von den Lagelinien des Rückwärtseinschneidens gebildete Fehlerfigur ohne sich mit der Bildungsart der letzteren eingehend zu bescheftigen, und zwar wird ein Einzelfall der Fehlerfigur besprochen. Am Standpunkt werden bei uns die Festpunktrichtungen gemessen und dann ausgeglichen. Wie bekannt, bei einer solchen Vorausausgleichung, hat die Fehlerfigur eine Reihe Doppel- und Tripeldurchschneidungspunkten.

Der Sinn der graphischen Ausgleichung besteht in der Ausgleichung der Fehlerfigur, und dieses, naturgemäss, macht die Forschungen begreiflich, die nach einer Vereinfachung dieses Prozesses gerichtet waren. Solche Forschungen haben uns zu einer wichtigen Folgerung geführt. Es ergab sich, nämlich, dass der Anwendungspunkt der Resultierenden der Doppeldurchschneidungspunkten und der Anwendungspunkt der Resultierenden der Tripeldurchschneidungspunkten miteinander zusammenfallen, wobei die Summe der Gewichte der Tripelpunkten in einem einfachen Verhältnis zur Summe der Gewichte der Doppelpunkten steht, nähmlich:

$$W'''_n = \frac{3}{n-3} \cdot W''_n,$$

wo W'''_n —die Summe der Tripelpunktgewichte, W''_n— die Summe der Doppelpunktgewichte und n— die Zahl der gemessenen Richtungen bedeuted.

Im vorliegenden Artikel wird zuerst die Potenotsche Aufgabe mit vier Punkten behandelt, und es werden hier zwei Beweise unseres Satzes gegeben. Der erste Beweis ist der einfachere und ist auf den einfachsten geometrischen Verhältnissen gegründet, während im zweiten Beweis der Grundsatz über dem harmonischen Verhältnis der Projektionslehre benutzt wird.

Von den Potenotschen Aufgabe mit vier Punkten wird ferner ein Übergang zu einer beliebigen Anzahl der gegebenen Punktrichtungen gemacht. Durch einfache Auseinandersetzungen wird die Gültigkeit unseres Satzes auch für diese Fälle bewiesen.

Schliesslich sind noch einige augenscheinliche Folgerungen aus dem oben angeführten Zusammenhange zwischen der Summe der Doppelpunktgewichte und der Summe der Tripelpunktgewichte zu erwänen. Bei einer überflüssigen Richtung, d. h. bei vier gemessenen Richtungen, ist die Summe der Tripelpunktgewichte drei Mal grösser als die Summe der Doppelpunktgewichte. Jedoch bei Vermehrung der gemessenen Richtungen, beginnt die Summe der Doppelpunktgewichte auf Bezug zur Summe der Tripelpunktgewichte zuzunehmen derart, dass schon bei 6 Richtungen die Summe der Doppelpunktgewichte dieser der Tripelpunktgewichte gleich ist.