Записки Ленинградского Горного Института. Том XIV, 1941
Annales de l'Institut des Mines à Leningrad. Vol. XIV, 1941

IV. Общий отдел

Определение упругих деформаций в канате при опускании груза

Доктор техн. наук *Н. П. Неронов*

Sur les déformations élastiques du cable pendant la descente de la cage du puits de mine

Prof. *N. F. Néronoff*

§ 1. Считая высоту опускания произвольно большой, будем учитывать как массу, так и вес каната. Поперечными размерами последнего обычно пренебрегают. Поэтому рассматриваем его как упругую нить и ограничимся случаем каната постоянного сечения.

Груз A подвешен в точке B к канату, навитому на барабан, вращающийся вокруг неподвижной горизонтальной оси O (рис. 1). Движение тела A предполагается поступательным и вертикальным.

Для какой-либо точки M каната ее расстояние MB от конца B (рис. 1) равно сумме двух слагаемых: первое x выражает нормальную (т. е. при отсутствии сил) длину рассматриваемой части MB каната, а второе $u(x, t)$ — ее деформацию (удлинение), являющуюся функцией переменных x и времени t.

Предполагая, что имеет место закон Гука, можно написать следующее выражение для величины силы упругости (натяжения) T каната в точке M:

$$T = k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \qquad (1)$$

где k обозначает некоторую положительную постоянную, имеющую для данного каната определенное численное значение, [1] а производная $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ относительное удлинение в точке M.

Помещаем начало координат в точке C набегания (контакта) каната на барабан и направляем координатную ось вертикально вниз. Обозначим координаты точек M и B соответственно через X и ξ (рис. 1). Имеем

$$X = \xi - x - u(x, t). \qquad (2)$$

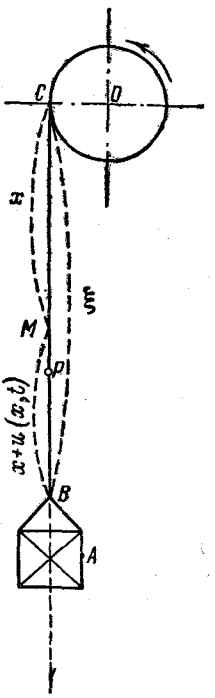


Рис. 1.

[1] Значение k может быть найдено по формуле $k = EF$, где E обозначает модуль упругости для каната и F площадь его сечения. Теоретическое и экспериментальное определение значения E составляло задачу ряда работ, указание на которые можно найти в статье акад. А. Н. Динника (Прикладная математика и механика, 1933, т. 1, № 2, стр. 335, § 7).

Вычисляем ускорение точки M:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}.$$

Пишем дифференциальное уравнение движения каната в точке M:

$$\varrho \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \varrho g - \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{3}$$

где ϱ обозначает массу единицы длины каната и g ускорение свободного падения.

Подставляем в уравнение (3) значения $\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial T}{\partial x}$:

$$\varrho\left[\frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}\right] = \varrho g - k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

Наконец, присоединяем к последнему уравнению дифференциальное уравнение движения груза:

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = mg - k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\Big|_{x=0}, \tag{4}$$

где m обозначает массу груза, и из полученной системы уравнений исключаем $\frac{d^2\xi}{dt^2}$.

Таким образом, неизвестная функция $u(x,t)$ должна удовлетворять следующему функционально-дифференциальному уравнению в частных производных типа волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - b \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\Big|_{x=0}, \tag{5}$$

где

$$c = +\sqrt{\frac{k}{\varrho}}, \quad b = \frac{k}{m}. \tag{6}$$

Общий интеграл предыдущего уравнения может быть представлен в виде:

$$u(x, t) = \varphi'(x + ct) + \psi'(x - ct) - \frac{b}{c^2}[\varphi(ct) + \psi(-ct)], \tag{7}$$

где φ и ψ обозначают произвольные функции соответствующих аргументов, а φ' и ψ' производные этих функций.

Функции φ и ψ определяются при помощи начальных и пограничных условий. Начальные условия таковы:

$$u(x, t)\Big|_{t=0} = f_1(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_2(x) \tag{8}$$

для значений переменного x, заключающихся в интервале

$$0 \leqslant x \leqslant l_0,$$

где l_0 обозначает нормальную длину вертикальной части BC каната (рис. 1) в начальный момент времени $(t=0)$ рассматриваемого движения. Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ предполагаются непрерывными и имеющими столько непрерывных производных, сколько потребуется обстоятельствами вычислений.

Процесс опускания груза будет сопровождаться продольными упругими колебаниями каната, характеризуемыми функцией $u(x, t)$, которая остается непрерывной по отношению к переменным x и t. Что же касается ее частных производных различных порядков, то они, вообще говоря, испытывают в некоторых точках разрыв непрерывности. Будем называть этот разрыв слабым (второго порядка), если частные производные первого порядка $\frac{\partial u(x, t)}{dx}$ и $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ непрерывны и разрыв непрерывности испытывает хотя бы одна из частных производных второго порядка. Наоборот, разрыв непрерывности будет сильным (первого порядка), если он имеет место по отношению хотя бы одной из частных производных первого порядка. Аналогично можно ввести понятие о разрыве непрерывности порядка i.

Ограничиваясь в настоящем исследовании нормальным режимом опускания груза, которому соответствуют слабые разрывы непрерывности, мы должны считать непрерывными сами функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, а также производную $f_1'(x)$.

Сделаем еще следующее замечание. В силу первого пограничного условия, относящегося к точке B:

$$u(x, t)|_{x=0} = 0 \tag{9}$$

и сохраняющего силу при всяком значении t, имеем равенства

$$f_1(0) = 0, \quad f_2(0) = 0. \tag{10}$$

Переходим ко второму пограничному условию, относящемуся к точке C. Предполагая отсутствие скольжения каната по барабану, выделим на последнем в некоторой точке N элемент каната, находящийся в деформированном (растянутом) состоянии, длины $d\sigma$. Пусть ему соответствует нормальная длина dl и относительное удлинение $\varepsilon(\sigma)$, являющееся заданной функцией длины σ части каната, заключенной между элементом каната в точке C_0 и рассматриваемым элементом в точке N. Положение первого элемента определяется условием, что в начальный момент времени $t=0$ он занимает положение C, совпадающее с верхним концом вертикальной части BC каната. Имеем

$$dl = \frac{d\sigma}{1+\varepsilon(\sigma)}. \tag{11}$$

Далее обозначим через s, $s = s(t)$, длину дуги поворота точки барабана, отсчитываемую от ее начального положения при $t=0$, и через $v(t)$ линейную скорость этой точки. При этом мы рассматриваем $v(t)$ как заданную функцию времени. Имеем

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}, \quad s = s(t) = \int_0^t v(t)\, dt. \tag{12}$$

Применяем уравнение (11) к элементу каната в точке C, полагая $\sigma = s$, и переписываем его в следующем виде:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\frac{ds}{dt}}{1+\varepsilon(s)}$$

или

$$\frac{dl}{dt} = \frac{v(t)}{1+\varepsilon(s)}. \tag{13}$$

Сделаем обычное в теории упругости предположение о малости относительного удлинения $\varepsilon(s)$. Тогда последнее равенство может быть приближенно заменено следующим:

$$\frac{dl}{dt} = v(t). \tag{14}$$

Отсюда путем интегрирования находим значение l нормальной длины вертикальной части BC каната в произвольный момент времени:

$$l = l_0 + \int_0^t v(t)\, dt = l_0 + s(t), \tag{15}$$

где l_0 сохраняет прежнее значение.

Возвращаемся ко второму пограничному условию, относящемуся к точке C, для которой

$$X = 0, \quad x = l.$$

Применяя уравнение (2) к точке C, получим

$$\xi - l - u(x, t)|_{x=l} = 0. \tag{16}$$

Диференцируем последнее уравнение два раза по t:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{x=l} + \frac{dl}{dt}\left[1 + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l}\right], \tag{17}$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2l}{dt^2}\left[1 + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l}\right] + 2\frac{dl}{dt}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\,\partial t}\Big|_{x=l} + \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=l} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\Big|_{x=l}. \tag{18}$$

С другой стороны диференцирование равенства (13) по t дает

$$\frac{d^2l}{dt^2} = \frac{[1+\varepsilon(s)]\,v'(t) - v^2(t)\,\varepsilon'(s)}{[1+\varepsilon(s)]^2}, \tag{19}$$

где

$$v'(t) = \frac{dv(t)}{dt}, \quad \varepsilon'(s) = \frac{d\varepsilon(\sigma)}{d\sigma}\Big|_{\sigma=s}.$$

Имея в виду приложение теории главным образом к вопросам шахтного подъема, сохраняем обычное в теории упругости предположение о малости относительного удлинения $\varepsilon(s)$. Благодаря этому уравнения (13) и (19) могут быть заменены следующими:

$$\frac{dl}{dt} = v(t), \quad \frac{d^2l}{dt^2} = v'(t) - v^2(t)\varepsilon'(s). \tag{20}$$

Наконец, из уравнения (4) имеем

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = g - b\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}, \quad b = \frac{k}{m}. \tag{21}$$

На основании равенств (20) и (21) вносим значения $\frac{dl}{dt}$, $\frac{d^2l}{dt^2}$, $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ в уравнение (18). Удерживая прежнее предположение о малости относительного удлинения $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, будем иметь:

$$[c^2 + v^2(t)]\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=l} + 2v(t)\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\,\partial t}\Big|_{x=l} = g - v'(t) + v^2(t)\,\varepsilon'(s), \tag{22}$$

если принять во внимание уравнение (5).

Полученное нами уравнение (22) и представляет искомое второе пограничное условие.

Завися от вида функции $\varepsilon(s)$, это последнее существенно отличается от аналогичного условия при подъеме груза. В период подъема элементы каната, навиваясь на барабан, выключаются из системы, состоящей из вертикальной части каната с грузом на конце.

Наоборот, при опускании груза элементы каната, находившиеся ранее на барабане, включаются в рассматриваемую систему. Поэтому движение последней будет зависеть от состояния, в котором ранее находились вновь включенные элементы каната, другими словами, от вида функции $\varepsilon(s)$.

Заметим еще, что для рассматриваемого интервала времени мы считаем непрерывными как функции $v(t)$, $\varepsilon(s)$, так и их производные $v'(t)$, $\varepsilon'(s)$.

Воспользуемся теперь первым пограничным условием (9) для того, чтобы привести вопрос к определению одной неизвестной функцим вместо двух φ и ψ, входящих в выражение (7) искомой деформации $u(x,t)$.

Упомянутое условие дает

$$\varphi'(ct) + \psi'(-ct) - \frac{b}{c^2}[\varphi(ct) + \psi(-ct)] = 0$$

или, полагая $z = ct$,

$$\varphi'(z) + \psi'(-z) - \frac{b}{c^2}[\varphi(z) + \psi(-z)] = 0. \tag{23}$$

Вводим функция $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ на основании равенств:

$$\varphi(z)+\psi(-z)=2\Phi(z),\ \varphi'(z)+\psi'(-z)=2\Psi(z). \tag{24}$$

Тогда в силу уравнения (23)

$$\Psi(z)=\frac{b}{c^2}\Phi(z). \tag{25}$$

Диференцируя по z первое из уравнений системы (24) и заменяя во втором функцию $\Psi(z)$ ее значением на основании равенства (25), получаем:

$$\varphi'(z)-\psi'(-z)=2\Phi'(z),\quad \varphi'(z)+\psi'(-z)=\frac{2b}{c^2}\Phi(z).$$

Решение предыдущей системы дает:

$$\varphi'(z)=\frac{b}{c^2}\Phi(z)+\Phi'(z),\quad \psi'(z)=\frac{b}{c^2}\Phi'(-z)-\Phi'(-z). \tag{26}$$

На основании вышеизложенного выражение (7) функции $u(x, t)$ может быть переписано в виде:

$$u(x,t)=\frac{b}{c^2}[\Phi(x+ct)+\Phi(-x+ct)]+$$
$$+\Phi'(x+ct)-\Phi'(-x+ct)-\frac{2b}{c^2}\Phi(ct), \tag{27}$$

содержащем только одну неизвестную функцию Φ. Последняя может быть определена при помощи начальных условий (8). Первое из них имеет вид

$$u(x,t)|_{t=0}=f_1(x),$$

где

$$0\leqslant x\leqslant l_0.$$

Отсюда

$$\frac{b}{c^2}[\Phi(x)+\Phi(-x)]+\Phi'(x)-\Phi'(-x)-\frac{2b}{c^2}\Phi(+0)=f_1(x).$$

Полагая

$$y=\Phi(x)+\Phi(-x), \tag{28}$$

заменяем написанное выше функционально-диференциальное уравнение обыкновенным диференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dx}+\frac{b}{c^2}y-\frac{2b}{c^2}\Phi(+0)-f_1(x)=0.$$

Его интеграл

$$y=2\Phi(+0)+\alpha e^{-\frac{bx}{c^2}}+e^{-\frac{bx}{c^2}}\int_0^x e^{\frac{bx}{c^2}}f_1(x)\,dx, \tag{29}$$

где e обозначает основание натуральных логарифмов и α произвольную постоянную, $\alpha=\Phi(-0)-\Phi(+0)$.

Аналогично изложенному выше поступаем со вторым начальным условием

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=f_2(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l_0,$$

которое после подстановки значения $u(x, t)$ на основании равенства (27) принимает вид

$$\frac{b}{c}[\Phi'(x)+\Phi'(-x)]+c[\Phi''(x)-\Phi''(-x)]-\frac{2b}{c}\Phi'(+0)=f_2(x).$$

Подстановка

$$z=\Phi'(x)+\Phi'(-x) \tag{30}$$

позволяет переписать предыдущее функционально-диференциальное уравнение в виде обыкновенного диференциального уравнения

$$\frac{dz}{dx}+\frac{b}{c^2}\,z-\frac{2b}{c^2}\,\Phi'(+0)-\frac{1}{c}\,f_2(x)=0.$$

Его интеграл

$$z=2\Phi'(+0)+\beta e^{-\frac{bx}{c^2}}+\frac{1}{c}\,e^{-\frac{bx}{c^2}}\int_0^x e^{\frac{bx}{c^2}}\,f_2(x)\,dx, \tag{31}$$

где β обозначает произвольную постоянную,

$$\beta=\Phi'(-0)-\Phi'(+0).$$

Итак, мы имеем систему уравнений:

$$y=\Phi(x)+\Phi(-x),\quad z=\Phi'(x)+\Phi'(-x).$$

Заменяем ее следующей:

$$\frac{dy}{dx}=\Phi'(x)-\Phi'(-x),\quad z=\Phi'(x)+\Phi'(-x).$$

Отсюда

$$2\Phi'(x)=z+\frac{dy}{dx},\quad 2\Phi'(-x)=z-\frac{dy}{dx}.$$

Наконец, вносим найденные ранее значения y и z:

$$\left.\begin{aligned}
2\Phi'(x)&=2\Phi'(+0)+f_1(x)+e^{\frac{-bx}{c^2}}\left(\beta-\alpha\frac{b}{c^2}\right)+\\
&+\frac{1}{c}e^{-\frac{bx}{c^2}}\int_0^x e^{\frac{bx}{c^2}}\left[f_2(x)-\frac{b}{c}f_1(x)\right]dx,\\
2\Phi'(-x)&=2\Phi'(+0)-f_1(x)+e^{-\frac{bx}{c^2}}\left(\beta+\alpha\frac{b}{c^2}\right)+\\
&+\frac{1}{c}e^{-\frac{bx}{c^2}}\int_0^x e^{\frac{bx}{c^2}}\left[f_2(x)+\frac{b}{c}f_1(x)\right]dx.
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Напоминаем, что полученные выражения для $\Phi'(x)$ и $\Phi'(-x)$ сохраняют силу только для значений переменного x, заключающихся в интервале

$$0\leqslant x\leqslant l_0.$$

Полагая в уравнениях (32) $x=+0$ и принимая во внимание первое из равенств (10), находим:

$$\beta-\alpha\frac{b}{c^2}=0,$$

$$2\Phi'(-0)=2\Phi'(+0)+\beta+\alpha\frac{b}{c^2}.$$

Отсюда

$$\beta=\alpha\frac{b}{c^2},\quad \Phi'(-0)-\Phi'(+0)=\beta. \tag{33}$$

В полученной системе равенств новым является только первое, которое после подстановки значений постоянных α и β дает зависимость между $\Phi(+0)$, $\Phi(-0)$, $\Phi'(+0)$, $\Phi'(-0)$.

После этого выражения для $\Phi(x)$ и $\Phi'(-x)$ могут быть переписаны в виде

$$\left.\begin{aligned} 2\Phi'(x) &= 2\Phi'(+0) + f_1(x) + \\ &+ \frac{1}{c} e^{-\frac{bx}{2c}} \int_0^x e^{\frac{bx}{c^2}} \left[f_2(x) - \frac{b}{c} f_1(x) \right] dx, \\ 2\Phi'(-x) &= 2\Phi'(+0) - f_1(x) + 2a \frac{b}{c^2} e^{-\frac{bx}{c^2}} + \\ &+ \frac{1}{c} e^{-\frac{bx}{c^2}} \int_0^x e^{\frac{bx}{c^2}} \left[f_2(x) + \frac{b}{c} f_1(x) \right] dx. \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Первое из написанных выше уравнений дает значения функции $\Phi'(x)$ в интервале $(0, l_0)$ изменения ее аргумента, между тем как второе позволяет экстраполировать ее за пределы этого интервала, давая значения функции $\Phi'(x)$ в интервале $(-l_0, 0)$. Итак, значение функции $\Phi'(x)$ нам теперь известно в интервале $(-l_0, l_0)$.

Чтобы перейти к функции $\Phi(x)$, достаточно в уравнениях (34) произвести операцию интегрирования.

Будем иметь

$$\left.\begin{aligned} 2\Phi(x) &= 2\Phi(+0) + 2x\Phi'(+0) - \\ &- \frac{c}{b} e^{-\frac{bx}{c^2}} \int_0^x e^{\frac{bx}{c^2}} \left[f_2(x) - \frac{b}{c} f_1(x) \right] dx + \frac{c}{b} \int_0^x f_2(x)\, dx, \\ 2\Phi(-x) &= 2\Phi(-0) - 2x\Phi'(+0) + \\ &+ \frac{c}{b} e^{-\frac{bx}{c^2}} \int_0^x e^{\frac{bx}{c^2}} \left[f_2(x) + \frac{b}{c} f_1(x) \right] dx - \frac{c}{b} \int_0^x f_2(x)\, dx - \\ &- 2a\left(1 - e^{-\frac{bx}{c^2}}\right), \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

где попрежнему $0 \leqslant x \leqslant l_0$ и следовательно значение функции Φ может быть найдено в интервале $(-l_0, l_0)$.

Полученные нами результаты позволяют найти значение искомой функции $u(x, t)$ в некоторой области изменения переменных x и t. Эта область может быть представлена геометрически, если рассматривать переменные x и t как прямоугольные декартовы координаты точек некоторой плоскости (рис. 2).

С этой целью построим системы прямых

$$x + ct = \text{const.}, \quad -x + ct = \text{const.}, \quad (36)$$

являющихся характеристиками уравнения (5), а также прямую

$$x = l_0 + s(t).$$

Рассмотрим область 1, ограниченную осью абсцисс и характеристиками:

$$x + ct = l_0, \quad -x + ct = 0.$$

В этой области значение аргумента $x + ct$ остается положительным и ограниченным неравенствами

$$0 \leqslant x + ct \leqslant l_0.$$

Значение аргумента $-x + ct$ в той же области отрицательно и заключается в пределах

$$-l_0 \leqslant -x + ct \leqslant 0.$$

Наконец, аргумент ct изменяется в интервале

$$0 \leqslant ct \leqslant \frac{l_0}{2}.$$

Поэтому, возвращаясь к выражению (27) для $u(x, t)$ и подставляя вместо функции Φ и ее производной Φ' соответствующие формулы в зависимости от характера их аргументов, будем иметь следующий результат:

$$2u(x, t) = f_1(z) + f_1(\zeta) + \frac{1}{c}\int_0^z f_2(x)\,dx - \frac{1}{c}\int_0^{\zeta} f_2(x)\,dx +$$

$$+ \frac{2}{c} e^{-\frac{bt}{c}} \int_0^{ct} e^{\frac{bx}{c^2}} \left[f_2(x) - \frac{b}{c} f_1(x) \right] dx \quad \frac{2}{c}\int_0^{ct} f_2(x)\,dx, \tag{37}$$

где введены сокращенные обозначения: $z = x + ct$, $\zeta = x - ct$.

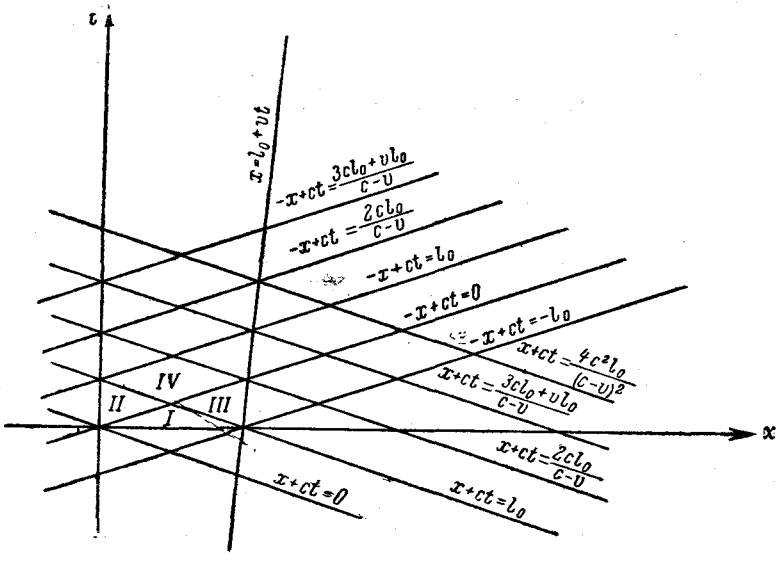


Рис. 2.

Заметим еще, что в области I деформация точек каната не зависит от закона вращения барабана, т. е. от вида функции $v(t)$. Это влияние скажется для более поздних моментов времени.

Переходим к области II (рис. 2), ограниченной осью ординат и теми же характеристиками, как и область I:

$$x + ct = l_0; \quad -x + ct = 0.$$

В этой области оба аргумента $x + ct$ и $-x + ct$ положительны. Их значения заключены в интервалах:

$$0 \leqslant x + ct \leqslant l_0; \quad 0 \leqslant -x + ct \leqslant l_0.$$

Изменение аргумента ct ограничено пределами

$$0 \leqslant ct \leqslant l_0.$$

Пользуясь соответствующими формулами для Φ и Φ', получаем выражение для искомой деформации $u(x, t)$ в следующем виде:

$$2u(x, t) = f_1(z) - f_1(\zeta) + \frac{1}{c}\int_0^z f_2(x)\,dx + \frac{1}{c}\int_0^\zeta f_2(x)\,dx -$$

$$-\frac{2}{c}e^{-\frac{b\zeta}{c^2}}\int_0^\zeta e^{\frac{bx}{c^2}}\left[f_2(x) - \frac{b}{c}f_1(x)\right]dx +$$

$$+\frac{2}{c}e^{-\frac{bt}{c}}\int_0^{ct} e^{\frac{bx}{c^2}}\left[f_2(x) - \frac{b}{c}f_1(x)\right]dx - \frac{2}{c}\int_0^{ct} f_2(x)\,dx, \qquad (38)$$

где

$$z = x + ct, \quad \zeta = -x + ct.$$

Мы видим, что в области *II*, как и в области *I*, вид функции $u(x, t)$ не зависит от закона вращения барабана. Но в области *III* (рис. 2) влияние последнего уже скажется.

Для области *III* и последующих нам потребуется дальнейшее экстраполирование функции Φ за пределы интервала $(-l_0, l_0)$ изменения ее аргумента. С этой целью мы обратимся ко второму пограничному условию (22) и внесем туда значение $u(x, t)$ на основании равенства (27). Имеем

$$\Phi'''(l + ct) + \frac{b}{c^2}\Phi''(l + ct) = \frac{g - v'(t) + v^2(t)\varepsilon'(s)}{[c + v(t)]^2} +$$

$$+\left[\frac{c - v(t)}{c + v(t)}\right]^2\left[\Phi'''(-l + ct) - \frac{b}{c^2}\Phi''(-l + ct)\right], \qquad (39)$$

где по прежнему $l = l_0 + s(t)$, $s = s(t) = \int_0^t v(t)\,dt$.

Положим затем, производя замену переменных,

$$z = l + ct = l_0 + s(t) + ct. \qquad (40)$$

Решаем предыдущее уравнение относительно t:

$$t = f(z), \qquad (41)$$

обозначая через $f(z)$ корень уравнения (40), удовлетворяющий условию

$$f(l_0) = 0. \qquad (42)$$

Далее на основании уравнения (41) вносим найденное значение t в выражение аргумента $-l + ct$ производных Φ'' и Φ''', входящих в правую часть уравнения (39):

$$-l + ct = \omega(z). \qquad (43)$$

Аналогичным образом найдем

$$s = s(t) = \theta(z). \qquad (44)$$

После этого уравнение (39) переписывается следующим образом:

$$\Phi'''(z) + \frac{b}{c^2}\Phi''(z) = \frac{g - v'[f(z)] + v^2[f(z)]\varepsilon'(\theta(z))}{\{c + v[f(z)]^2\}} +$$

$$+\left\{\frac{c - v[f(z)]}{c + v[f(z)]}\right\}^2\left\{\Phi'''[\omega(z)] - \frac{b}{c^2}\Phi''[\omega(z)]\right\}. \qquad (45)$$

Функция Φ в интервале $(-l_0, 0)$ нам известна. Поэтому при условии, что $\omega(z)$ изменяется в пределах

$$-l_0 \leqslant \omega(z) \leqslant 0, \qquad (46)$$

правая часть предыдущего уравнения будет представлять известную функцию переменного z. Развивая прием Сен-Венана, найдем интеграл дифференциального уравнения (45), играющего в нашей задаче роль „équation promotrice“,

$$\Phi''(z) = \gamma e^{-\frac{bz}{c^2}} + \Omega(z), \tag{47}$$

где $\Omega(z)$ представляет частное решение уравнения (45), находимое обычным способом, и γ — произвольную постоянную интегрирования.

Наконец, интегрирование дает выражение для функции $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \frac{\gamma c^4}{b^2} e^{\frac{-bz}{c^2}} + \gamma_1 z + \gamma_2 + \int\int \Omega(z)\, dz\, dz, \tag{48}$$

где через γ_1 и γ_2 обозначены произвольные постоянные.

Чтобы определить интервал (z_1, z_2) изменения переменного z, в котором приложима формула (48) для $\Phi(z)$, нужно решить относительно z систему неравенств (46):

$$z_1 \leqslant z \leqslant z_2. \tag{49}$$

В разбираемом ниже частном примере мы покажем, что неравенства (49) позволяют экстраполировать функцию Φ за пределы интервала $(-l_0, l_0)$, в котором она известна. С этой целью мы разберем в качестве примера случай равномерного вращения:

$$v(t) = \text{const} = v, \tag{50}$$

где в случае опускания груза $v > 0$.

Затем

$$l = l_0 + \int_0^t v(t)\, dt = l_0 + vt \tag{51}$$

и следовательно

$$z = l + ct = l_0 + t(c + v). \tag{52}$$

Отсюда

$$t = \frac{z - l_0}{c + v}. \tag{53}$$

Вычисляем $\omega(z)$:

$$\omega(z) = -l + ct = t(c - v) - l_0 = \frac{z(c - v) - 2cl_0}{c + v}. \tag{54}$$

Решаем относительно z систему неравенств:

$$-l_0 \leqslant \frac{z(c - v) - 2cl_0}{c + v} \leqslant 0,$$

откуда, полагая $c > v$,

$$l_0 \leqslant z \leqslant \frac{2cl_0}{c - v}. \tag{55}$$

Таким образом

$$z_1 = l_0,\ z_2 = \frac{2cl_0}{c - v}. \tag{56}$$

Мы видим, что интеграл дифференциального уравнения (45) позволяет нам экстраполировать функцию Φ за пределы интервала $(-l_0, l_0)$, давая ее значения в интервале $\left(l_0, \frac{2cl_0}{c - v}\right)$. Итак, функция Φ нам теперь известна в интервале

$$\left(-l_0, \frac{2cl_0}{c - v}\right).$$

Указанный процесс может быть повторен неограниченное число раз. В самом деле, решая относительно z систему неравенств

$$0 \leqslant \omega(z) \leqslant l_0,$$

имеем

$$\frac{2cl_0}{c-v} \leqslant z \leqslant \frac{3cl_0 + vl_0}{c-v}.$$

Таким образом, по значениям функции Φ в интервале $(0,\ l_0)$ можно найти путем интегрирования уравнения (45) ее значения в интервале

$$\left(\frac{2cl_0}{c-v},\ \frac{3cl_0+vl_0}{c-v}\right).$$

Далее, неравенства

$$l_0 \leqslant \omega(z) \leqslant \frac{2cl_0}{c-v}$$

дают

$$\frac{3cl_0+vl_0}{c-v} \leqslant z \leqslant \frac{4c^2l_0}{(c-v)^2}.$$

Так как функция Φ в интервале $\left(l_0,\ \frac{2cl_0}{c-v}\right)$ нами уже была определена, то в результате интегрирования уравнения (45) мы получаем ее значения в интервале

$$\left(\frac{3cl_0+vl_0}{c-v},\ \frac{4c^2l_0}{(c-v)^2}\right)$$

и т. д.

Следуя указанному выше пути, подставляем в уравнение (45) вместо функции $\Phi[\omega(z)]$ выражение (35) последней для интервала $(-l_0,\ 0)$ изменения ее аргумента, т. е. $\omega(z)$. Будем иметь, вводя сокращенные обозначения $f = f(z)$, $\theta = \theta(z)$, $\omega = \omega(z)$:

$$\Phi'''(z) + \frac{b}{c^2}\Phi''(z) = \frac{g - v'(f) + v^2(f)\varepsilon'(\theta)}{[c+v(f)]^2} + \\ + \frac{1}{2}\left[\frac{c-v(f)}{c+v(f)}\right]^2\left[\frac{1}{c}f_2'(-\omega) - f_1'(-\omega)\right]. \qquad (57)$$

В частности, для случая равномерного вращения барабана последнее уравнение соответствующим образом упрощается. Что касается функции $\varepsilon(s)$, то для упрощения выкладок ее можно задать в форме полинома произвольно высокой степени n с известными коэфициентами или, наконец, в тригонометрической форме. Вообще же говоря, вид функции $\varepsilon(s)$ довольно сложен и определяется в действительности предшествующим опусканию периодом поднятия груза.

Найдя интеграл уравнения (57), можно определить вид функции $u(x,\ t)$ в области III, ограниченной характеристиками

$$x + ct = l_0, \quad -x + ct = 0$$

и прямой, уравнение которой

$$x = l$$

или

$$x = l_0 + vt.$$

Значение аргумента $x + ct$ оказывается положительным и заключенным в интервале

$$l_0 \leqslant x + ct \leqslant \frac{2cl_0}{c-v}.$$

Значение аргумента $-x + ct$ в той же области отрицательно и ограничено неравенствами

$$-l_0 \leqslant -x + ct \leqslant 0.$$

Из предыдущих неравенств вытекают следующие пределы изменения аргумента ct в области *III*:

$$0 \leqslant ct \leqslant \frac{cl_0}{c-v}.$$

Для определения значений произвольных постоянных, входящих в выражение общего интеграла уравнения (57), а следовательно и в формулу для функции

$u(x, t)$ в области III, нужно воспользоваться условием, что вдоль прямой $x+ct = l_0$, принадлежащей как области I, так и области III, должны совпадать значения функции $u(x, t)$, а также производной $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ (как следствие этого определяются значения производной $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$).

Что касается частных производных второго порядка функции $u(x, t)$, то при переходе через прямую $x+ct=l_0$ они, вообще говоря, будут претерпевать разрыв непрерывности.

Соображения, аналогичные предыдущим, позволят затем найти вид функции $u(x, t)$ в области IV (рис. 2) и т. д. Мы ограничиваемся здесь только указанием общего хода действия, не приводя деталей вычислений, подобных тем, которые произведены в специальной работе для случая подъема груза с учетом как массы, так и веса каната [1].

Полученное нами решение показывает, что при опускании груза в канате возникают продольные упругие колебания, которые сопровождаются распространением прерывности того или другого порядка. Простейший пример распространения прерывности произвольно высокого порядка рассмотрен в § 3.

Рассматриваемая в этой работе задача математической физики имеет большое значение в горном деле, именно в вопросах шахтного подъема и требует дальнейшей разработки. Указанным вопросом занимался также проф. А. Ш. Локшин [2], однако данное им решение носит приближенный характер и относится к разрывам непрерывности первого порядка.

§ 2. Во всем предыдущем функция $\varepsilon(s)$, характеризующая закон изменения относительного удлинения для части каната, навитой на барабан, считалась произвольно заданной. В силу произвольного задания этой функции элементы вышеупомянутой части каната, переходя через положение C, претерпевают удар в момент их включения в вертикальную часть BC каната, так относительное удлинение и скорость этих элементов, вообще говоря, не совпадают соответственно с относительным удлинением и скоростью части BC каната в точке C. Заметим здесь, что значения скоростей отличаются друг от друга на малую величину порядка относительного удлинения (см. далее).

Можно поставить вопрос о том, когда явление удара не будет иметь места. В этом случае функция $\varepsilon(s)$ должна удовлетворять специальному условию

$$\varepsilon(s) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\Big|_{x=l}.$$

Покажем, что при выполнении указанного выше условия скорость верхнего конца C вертикальной части каната совпадает со скоростью вновь включаемых элементов, т. е. равна $v(t)$. В самом деле, диференцируем уравнение (2) по времени t:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{d\xi}{dt} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

и полагаем затем в уравнении (2) и вышенаписанном

$$X=0, \quad x=l.$$

Имеем:

$$\xi - l - u(x, t)\big|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial t}\Big|_{x=l} = \frac{d\xi}{dt} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{x=l}.$$

Исключаем ξ из последней системы уравнений:

$$\frac{\partial X}{\partial t}\Big|_{x=l} = \left(1 + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\Big|_{x=l}\right)\frac{dl}{dt}.$$

Наконец, принимая во внимание равенства

$$\varepsilon(s) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\Big|_{x=l}, \quad \frac{dl}{dt} = \frac{v(t)}{1+\varepsilon(s)},$$

находим

$$\left.\frac{\partial X}{\partial t}\right|_{x=l} = v(t).$$

Итак, при специальном виде функции $\varepsilon(s)$ процесс включения новых элементов в вертикальную часть каната при опускании груза происходит без ударов, т. е. эти элементы после включения сохранят и свою скорость и свое относительное удлинение. В этом случае после внесения соответствующего значения функции $\varepsilon(s)$ второе пограничное условие (22) принимает вид

$$c^2 \left.\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right|_{x=l} + v(t) \left.\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x\, \partial t}\right|_{x=l} = g - v'(t).$$

Полученная нами форма второго пограничного условия тождественна с найденной ранее формой, соответствующей случаю поднятия груза [1]. При поднятии груза $v(t) \leqslant 0$, напротив, при опускании $v(t) \geqslant 0$.

Мы видим таким образом, что задачи опускания и поднятия груза приводят, вообще говоря, к различным формам второго пограничного условия. Совпадение этих форм имеет место лишь в одном частном случае, требующем специального задания функции $\varepsilon(s)$.

§ 3. Наконец, в заключение исследуем в качестве примера характер упругих деформаций каната для начального периода вращения барабана.

Начальные условия таковы: в момент времени $t=0$, соответствующий началу вращения барабана из состояния покоя, канат предполагается статически растянутым силами веса системы. Начальные же скорости всех точек последней равны нулю.

Нужно заметить, что начальный момент вращения барабана $t=0$ не будет совпадать с начальным моментом движения подвешенного к канату груза. Действительно, как будет показано ниже, следствием вращения барабана явится распространение по канату с некоторой конечной скоростью прерывности. Груз придет в движение только тогда, когда упругие перемещения, возникшие в верхней части каната, распространяясь сверху вниз, достигнут его нижнего конца.

Предполагая, что вращение барабана происходит из состояния покоя, имеем в силу непрерывности

$$v(0) = 0. \tag{58}$$

Для рассматриваемого движения системы (рис. 1):

$$\xi = \text{const} = \xi_0.$$

Получим, сохраняя прежние обозначения:

$$X = \xi_0 - x - u(x, t). \tag{59}$$

Ускорение точки M каната:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}. \tag{60}$$

Составляем диференциальное уравнение движения элемента каната в точке M:

$$\varrho \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \varrho g - \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Делая подстановку при помощи уравнения (1) и (60), получаем диференциальное уравнение движения каната:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -g + c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \tag{61}$$

где

$$c = +\sqrt{\frac{k}{\varrho}}. \tag{62}$$

Таким образом, неизвестная функция $u(x, t)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных обычного типа волнового уравнения. Переходим к начальным и пограничным условиям задачи. В силу начальных условий, сформулированных выше, должны иметь место равенства:

$$u(x, t)\Big|_{t=0} = u_1(x) = \frac{p}{k}x + \frac{\varrho g}{2k}x^2, \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \tag{63}$$
$$0 \leqslant x \leqslant l_0,$$

где p обозначает вес подвешенного к канату груза и l_0 нормальную длину вертикальной части BC каната в начальный момент. Функция $u_1(x)$ выражает статическую деформацию в данной точке каната от действия сил тяжести системы.

Пограничных условий в данной задаче два. Первое относится к верхнему концу C вертикальной части каната, второе к точке P (фронт волны), отделяющей верхнюю часть каната, уже пришедшую в движение, от нижней, еще находящейся в покое.

Обращаемся сначала к первому пограничному условию.

С этой целью обозначим, как и раньше, через l нормальную длину вертикальной части BC каната для произвольного момента времени. Значение l определяется при помощи уравнения (59), если положить в последнем

$$X = 0, \quad x = l.$$

Получим

$$\xi_0 - l - u(x, t)\big|_{x=l} = 0. \tag{64}$$

Диференцируем последнее уравнение по t:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{x=l} + \frac{dl}{dt}\left[1 + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\Big|_{x=l}\right] = 0. \tag{65}$$

С другой стороны, мы имели соотношение

$$\frac{dl}{dt} = \frac{v(t)}{1+\varepsilon(s)}, \tag{66}$$

где функция $\varepsilon(s)$ характеризует закон изменения относительного удлинения для части каната, навитой на барабан, и

$$s = s(t) = \int_0^t v(t)\,dt.$$

Благодаря малости относительного удлинения уравнения (65) и (66) могут быть заменены следующими:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{x=l} + \frac{dl}{dt} = 0, \quad \frac{dl}{dt} = v(t).$$

Исключение производной $\frac{dl}{dt}$ из последней системы дает:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{x=l} + v(t) = 0, \tag{67}$$

где

$$l = l_0 + s(t).$$

Уравнение (67) и представляет первое пограничное условие.

Переходим ко второму пограничному условию в точке P. Значение x, соответствующее этой точке и обозначенное через a, представляет неизвестную функцию времени t, принимающую значение l_0 в начальный момент. Рассматриваемое условие требует, чтобы при переходе через точку P как деформация $u(x, t)$, так

и натяжение T каната, другими словами производная $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, оставались непрерывными, т. е. должны выполняться равенства:

$$u(x, t)\Big|_{x=a} = \frac{p}{k}\, a + \frac{\varrho g}{2k}\, a^2, \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\Big|_{x=a} = \frac{p}{k} + \frac{\varrho g}{k}\, a. \tag{68}$$

Итак, поставленная нами задача сведена к нахождению интеграла дифференциального уравнения (61), удовлетворяющего перечисленным выше начальным и пограничным условиям. Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$u(x, t) = u_1(x) + u_2(x, t), \tag{69}$$

где

$$u_1(x) = \frac{p}{k}\, x + \frac{\varrho g}{2k}\, x^2,$$

$$u_2(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct). \tag{70}$$

Через φ и ψ обозначены произвольные функции соответствующих аргументов.

Написанное выше выражение (69) для $u(x, t)$ имеет силу только в следующем интервале изменения переменных:

$$a \leqslant x \leqslant l,$$

где a и l являются некоторыми функциями времени t. Для остальной части каната, остающейся в покое, деформация ее точек выражается формулой

$$u(x, t) = u_1(x) = \frac{p}{k}\, x + \frac{\varrho g}{2k}\, x^2, \tag{71}$$

справедливой в интервале

$$0 \leqslant x \leqslant a.$$

На основании уравнений (63) и (69) функция $u_2(x, t)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$u_2(x, t)\Big|_{\substack{x=l_0 \\ t=0}} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t}\Big|_{\substack{x=l_0 \\ t=0}} = 0$$

или

$$\varphi(l_0) + \psi(l_0) = 0, \quad \varphi'(l_0) - \psi'(l_0) = 0. \tag{72}$$

Второе пограничное условие дает

$$u_2(x, t)\Big|_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x}\Big|_{x=a} = 0$$

или

$$\varphi(a + ct) + \psi(a - ct) = 0, \quad \varphi'(a + ct) + \psi'(a - ct) = 0. \tag{73}$$

Введем обозначения:

$$\lambda = a + ct, \quad \mu = a - ct$$

и переписываем уравнения (73) в виде

$$\varphi(\lambda) + \psi(\mu) = 0, \quad \varphi'(\lambda) + \psi'(\mu) = 0. \tag{73 bis}$$

Дифференцируя по t первое из уравнений последней системы, заменяем ее следующей:

$$\varphi'(\lambda)\, \frac{d\lambda}{dt} + \psi'(\mu)\, \frac{d\mu}{dt} = 0, \quad \varphi'(\lambda) + \psi'(\mu) = 0.$$

Так как определитель предыдущей системы, равный $2c$, отличен от нуля, то ее решение дает

$$\varphi'(\lambda) = 0, \quad \psi'(\mu) = 0. \tag{74}$$

Чтобы удовлетворить уравнениям (74), положим:

$$\lambda = a + ct = \text{const} = l_0, \tag{75}$$

а функцию ψ считаем тождественно равной некоторому постоянному числу. Значение последнего определится при помощи первого из уравнений (73 bis). Именно

$$\psi = \text{const} = -\varphi(l_0). \tag{76}$$

Из уравнений (72) получаем

$$\varphi'(l_0)=0, \tag{77}$$

что согласуется с уравнениями (74).

Уравнение (75) позволяет найти значение a. Именно

$$a=l_0-ct. \tag{78}$$

Таким образом прерывность распространяется по канату с постоянной скоростью c. Подвешенный груз придет в движение в момент времени τ,

$$\tau=\frac{l_0}{c}.$$

Для нахождения функции φ воспользуемся уравнением (67), выражающем первое пограничное условие. Имеем

$$c\varphi'(l+ct)+v(t)=0. \tag{79}$$

Отсюда

$$\varphi'(l_0)=0$$

и следовательно равенство (77) удовлетворительно. Вводим вместо t новое независимое переменное z по формуле

$$z=l+ct=l_0+s(t)+ct. \tag{80}$$

Решаем уравнение (80) относительно t:

$$t=f(z), \tag{81}$$

где $f(z)$ обозначает корень уравнения (80), удовлетворяющий условию

$$f(l_0)=0. \tag{82}$$

После введения переменного z уравнение (79) переписывается в виде

$$\varphi'(z)=-\frac{1}{c}v(f(z)). \tag{83}$$

Отсюда определение функций φ приводится к выполнению следующей квадратуры:

$$\varphi(z)=\varphi(l_0)-\frac{1}{c}\int_{l_0}^{z}v(f(z))\,dz. \tag{84}$$

Таким образом, равенство (69), дающее решение поставленной задачи, принимает вид:

$$u(x,t)=\frac{p}{k}x+\frac{\varrho g}{2k}x^2-\frac{1}{c}\int_{l_0}^{x+ct}v(f(z))\,dz, \quad a\leqslant x\leqslant l. \tag{85}$$

При переходе через точку P с абсциссой $x=a$ остается непрерывной как сама функция $u(x,t)$, так и обе ее частные производные первого порядка. Указанным свойством вообще говоря, не обладают производные второго и высших порядков этой функции. Поэтому в даниой задаче мы имеем дело с распространением прерывности второго или высшего порядка.

Равенство (85) позволяет вывести условия распространения прерывности порядка i. Для этого нужно, чтобы уравнение

$$v(t)=0$$

имело корень $t=0$ порядка кратности $i-1$, т. е. должны выполняться равенства

$$v(0)=(0),\ v'(0)=0; \quad v^2(0)=0,\ldots v^{(i-2)}(0)=0,\ v^{i-1}(0)\neq 0.$$

Мы видим, что соответственным выбором вида функции $v(t)$ можно сделать порядок i прерывности произвольно большим.

Следующей задачей является применение к поставленному нами вопросу символического метода Хивсайда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Неронов. Об упругих деформациях в подъемном канате. Прикладная математика и механика, нов. сер., 1937, т. I, вып. I, стр. 91—116.
2. А. Ш. Локшин. О динамических напряжениях в подъемных канатах. Приложение к № 12 Горн. Журнала, 1929. (Динамические напряжения в канатах переменной длины рассмотрены во второй части работы, стр. 89—120).

Résumé

Dans le présent article nous examinons le cas de la descente de la cage du puits de mine en tenant compte de la masse et du poids du câble.

Nous envisageons le câble comme un fil élastique auquel est suspendue à son extrémité inférieure B la cage A de poids p, $p=mg$ (fig. 1). La partie supérieure du câble est enroulée sur le tambour qui tourne autour de l'axe horizontal immobile 0. La vitesse $v(t)$ des points de la circonférence du tambour est considérée par nous comme une fonction donnée du temps t.

Nous avons l'expression suivante pour la distance de l'extrémité B du câble à son point arbitraire M:

$$MB = x + u(x,\ t), \tag{1}$$

où x désigne la longueur naturelle (correspondant à l'absence de forces) de la partie MB du câble et $u(x,\ t)$ sa déformation (fig. 1). La loi de Hooke donne la formule suivante pour la tension T du câble (k est une constante):

$$T = k\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}. \tag{2}$$

La fonction inconnue $u(x,\ t)$ se détermine de l'équation différentielle suivante aux dérivées partielles du deuxième ordre (du type hyperbolique):

$$\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2} - b\left.\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}\right|_{x=0}, \tag{3}$$

où

$$c = +\sqrt{\frac{k}{\varrho}}, \qquad b = \frac{k}{m} \tag{4}$$

et ϱ désigne la masse de l'unité de longueur du câble, m est la masse de la cage.

Son intégrale générale a la forme de

$$u(x,\ t) = \varphi'(x+ct) + \psi'(x-ct) - \frac{b}{c^2}[\varphi(ct) + \psi(-ct)], \tag{5}$$

où φ, ψ représentent des fonctions arbitraires des arguments correspondants et φ', ψ' les dérivées de ces fonctions.

Les conditions initiales sont les suivantes:

$$\left.\begin{aligned} u(x,\ t)|_{t=0} &= f_1(x), \\ \left.\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= f_2(x), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

où $f_1(0)=0$, $f_2(0)=0$.

Passons aux deux conditions aux limites. La première d'elles

$$u(x,\ t)|_{x=0} = 0 \tag{7}$$

se rapporte au point B et la seconde

$$[c^2 - v^2(t)]\left.\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}\right|_{x=l} + 2v(t)\left.\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x \partial t}\right|_{x=l} = g - v'(t) + v^2(t)\varepsilon'(s), \tag{8}$$

où

$$l = l_0 + s(t),$$

$$s = s(t) = \int_0^t v(t)\,dt, \qquad l_0 = l|_{t=0},$$

au point C, désignant par l la longueur naturelle de la partie verticale BC du câble.

La fonction $\varepsilon(s)$ est considérée comme connue et représente le coefficient de la dilatation linéaire de l'élément du câble se trouvant sur le tambour au point C. A cela le glissement du câble sur le tambour est supposé exclus.

Nous voyons que la seconde condition aux limites dans le cas de la descente a une autre forme en comparaison du cas de l'ascension. On peut démontrer que ces formes coincident si la fonction $\varepsilon(s)$ a une forme spéciale, notamment

$$\varepsilon(s) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\Big|_{x=l}.$$

La première (7) des conditions mentionnées aux limites permet de réduire la question à la détermination d'une seule fonction arbitraire Φ et l'égalité (5) prend la forme de

$$u(x, t) = \frac{b}{c^2}[\Phi(x+ct)+\Phi(-x+ct)] + \Phi(x+ct) - \\ -\Phi(-x+ct) - \frac{2b}{c^2}\Phi(ct). \qquad (9)$$

En vertu des conditions initiales (6) la fonction Φ aura deux expressions différentes dont la première agit force dans l'intervalle $(0, l_0)$ de la variation de l'argument de la fonction Φ et la seconde dans l'intervalle $(-l_0, 0)$. C'est pourquoi la fonction inconnue $u(x, t)$ aura aussi deux expressions de la forme correspondante pour les domaines I et II de la variation de ses arguments x et t (fig. 2). En cherchant la fonction $u(x, t)$ dans un nouvel domaine, nous nous bornons, pour simplifier les calculs, au cas de la rotation uniforme du tambour, c'est-à-dire

$$v(t) = \text{const} = -v, \qquad l = l_0 - vt, \qquad c > v.$$

La seconde condition (8) aux limites nous donne une équation différentielle („équation promotrice" de Saint-Venant) pour la détermination de la fonction arbitraire Φ dans l'intervalle $\left(l_0, \frac{2cl_0}{c+v}\right)$, la fonction Φ dans l'intervalle $(-l_0, 0)$ étant déjà connue. En substituant la valeur trouvée de Φ dans l'égalité (9) nous obtenons l'expression de la fonction cherchée $u(x, t)$ dans le nouvel domaine III (fig. 2). Le procédé ci-dessus signalé peut-être répété à l'infini. Les constantes arbitraires entrant dans les formules pour $u(x, t)$ peuvent être déterminées en considérant la valeur de la fonction $u(x, t)$ et celle de ses dérivées sur les limites des domaines voisines correspondants.

Les résultats obtenus par nous montrent que la rotation du tambour et la descente de la cage provoquent des vibrations élastiques longitudinales du câble qui sont accompagnées de la propagation le long du câble d'une discontinuité d'un ordre quelconque. Dans le présent travail nous considérons des discontinuités du deuxième ordre et aussi celles d'ordre plus haut.

Le problème considéré peut aussi être résolu à l'aide de l'algorithme symbolique de Heaveside.

Ответственный редактор *А. А. Гескин*

Первое издание. Подписано к печати 26/V 1941 г. Тираж 800 экз. М 60324.
Авт. листов 14,17. Количество печатных знаков в 1 печ. листе 70768. Заказ № 1866.
Печатных листов $9^7/_8$. Цена 12 руб. без переплета.

Типография «Красный Печатник». Ленинград, Международный пр., 75а.