Записки Ленинградского Горного Института. Том XIV, 1941
Annales de l'Institut des Mines à Léningrad. Vol. XIV, 1941

III. Металлургия и обогащение

Расчет моделей некоторых винтовых поверхностей, встречающихся в теории спирального сепаратора

Проф. *М. И. Акимов и В. А. Егунов*

Die Berechnung von Modellen der einingen sich in der Theorie des Spiralseparators treffenden schneckenförmigen Flächen

Prof. *M. J. Akimoff* und *W. J. Equnoff*

При исследовании установившегося движения тяжелой материальной частицы по винтовой линии

$$r = r_0, \quad z - z_0 = a\varphi$$

($2\pi a$ шаг винтовой линии) на шероховатой винтовой поверхности

$$z = a\varphi + f(r)$$

с направленной вертикально вверх осью z цилиндрической координатной системы М. И. Акимов (*1*) отметил винтовые поверхности, соответствующие значениям функции $f(r)$

$$C_1 \lg r,$$

$$C_2\left(\frac{r^2}{2} + a^2 \lg r\right),$$

$$\int_{\varrho}^{r} \sqrt{\left(\frac{1}{k^2}\,\frac{a^2}{r^2} - 1\right)\left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right)}\, dr,$$

$$0 < \varrho \leqslant r \leqslant \frac{a}{k},$$

движение на которых тяжелой точки по винтовым линиям, при наличии трения, обладает специальными свойствами.

На первой из этих поверхностей рассматриваемое движение (при соответствующих коэфициентах трения) по всем винтовым линиям возможно лишь с одной и той же постоянной скоростью.

На второй поверхности (при соответствующих коэфициентах трения) по всем винтовым линиям оно возможно лишь с одной и той же постоянной вертикальной составляющей скоростью.

Такая поверхность может найти применение в тех конструкциях спирального сепаратора, когда разгрузка разнородных разделившихся частиц смеси должна происходить одновременно.[1]

На третьей поверхности, при одном и том же коэфициенте трения k, установившееся движение тяжелых частиц может происходить по любой винтовой линии.

[1] Движение тяжелой точки по рассматриваемой поверхности, при наличии трения, близкое к установившемуся движению по винтовой линии, а равно и устойчивость последнего исследованы В. А. Егуновым (*3*).

Эта поверхность играет существенную роль при исследовании устойчивости установившихся движений тяжелых частиц на шероховатых винтовых поверхностях.[1]

Настоящая работа содержит расчет, необходимый для построения трех рассматриваемых винтовых поверхностей в целях экспериментального исследования происходящих на них установившихся движений тяжелых частиц.

1. Для построения моделей винтовых поверхностей требуются возможно точно вычерченные кривые, служащие для них производящими. Уравнения двух первых линий таковы:

$$z = \frac{1}{C}\left(\frac{r^2}{2} + a^2 \lg r\right) \tag{1}$$

и

$$zC = {}_1 \lg r, \tag{2}$$

причем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{r_0}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{r_0^2}{a^2 + r_0^2}, \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = k^2 \{ 1 + [f'(r_0)]^2 \cos^2 \alpha \}. \tag{3}$$

Постоянные C и C_1 определяются под условием, чтобы при тех же основных данных, какие приняты в разобранном ранее (2) Н. П. Нероновым и В. А. Егуновым для косой винтовой поверхности числовом примере, для r_0 получилось то же числовое значение.

Последнее из уравнений (3) для кривой, заданной уравнением (1), дает

$$C = k r_0 \sqrt{\frac{a^2 + r_0^2}{a^2 - k^2 r_0^2}},$$

а для кривой, заданной уравнением (2), дает

$$C_1 = \frac{1}{k r_0} \sqrt{(a^2 + r_0^2)(a^2 - k^2 r_0^2)}.$$

По этим формулам для

$$k = 0{,}36398,$$
$$a = 0{,}11658,$$
$$r_0 = 0{,}30327$$

получается

$$C = 0{,}95616 \text{ и } C_1 = 0{,}11040$$
$$(\lg C = \bar{1}{,}98052, \quad \lg C_1 = \bar{1}{,}04298)$$

и уравнения (1) и (2) принимают вид:

$$z = 0{,}52294\, r^2 + 0{,}32728 \lg_{10} r = A_1 r^2 + A_2 \lg_{10} r \tag{1'}$$

и

$$z = 0{,}25421 \lg_{10} r = A_3 \lg_{10} r. \tag{2'}$$

По этим уравнениям произведены вычисления. Схема вычислений для (1 видна из следующего примера:

$$\begin{array}{r} r = 0.450 \\ r^2 = 0.2025 \\ \hline \lg r^2 = \bar{1}.30643 \\ \lg A_1 r^2 = \bar{1}.02488 \\ \hline \lg (\lg r) = \bar{1}_n.54006 \\ \lg (A_2 \lg r) = \bar{2}_n.05498 \\ \hline A_1 r^2 = +0.10590 \\ A_2 \lg r = -0.01135 \\ \hline z = +0.09455 \end{array}$$

Высшая граница для r определена по уравнению

$$\frac{a^2}{r^2} = k_1^2 \left(1 + \frac{a^2 + r^2}{C^2}\right)$$

[1] См. цитированную выше работу М. И. Акимова

для $k_1 = tg\ 5°$; она получается $r = 0{,}94444$. Единица длины — метр:

r	z	r	z
0,001 м	−0,09818 м	0,400 м	+0,07065 м
0,003	−0,08256	0,450	+0,09455
0,010	−0,06540	0,500	+0,12088
0,020	−0,05540	0,550	+0,14969
0,030	−0,04937	0,600	+0,18100
0,040	−0,04491	0,650	+0,21482
0,050	−0,04127	0,700	+0,24882
0,100	−0,02750	0,750	+0,29074
0,150	−0,01520	0,800	+0,33151
0,200	−0,00170	0,850	+0,37552
0,250	+0,01298	0,900	+0,42309
0,300	+0,02995	0,950	+0,47123
0,350	+0,04914	1,000	+0,52294

Для кривой (2) схема вычисления очевидна и весьма проста, если пользоваться таблицами для $\lg \lg x$. Результаты приведены ниже, причем верхняя граница для r определяется по уравнению (при $k_1 = \operatorname{tg} 5°$)

$$\frac{a^2}{r^2} = k_1^2\left(1 + \frac{C_1^2}{a^2 + r^2}\right)$$

и оказывается: $r = 1{,}3279$.

r	z	r	z
3 мм	−641,4 мм	700 мм	−39,3 мм
10	−508,4	750	−31,8
20	−431,9	800	−24,6
50	−330,7	850	−17,9
100	−254,2	900	−11,6
150	−209,4	950	− 5,7
200	−177,7	1000	0,0
250	−153,0	1050	+ 5,4
300	−132,9	1100	+10,5
350	−115,9	1150	+15,4
400	−101,2	1200	+20,1
450	− 88,2	1250	+24,6
500	− 76,5	1300	+29,0
550	− 66,0	1350	+33,1
600	− 56,4	1400	+37,2
650	− 47,6		

2. Составим таблицу для построения линии

$$z = \int_{\varrho}^{r} \sqrt{\left(\frac{1}{k^2}\,\frac{a^2}{r^2} - 1\right)\left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right)}\, dr, \tag{1}$$

где ϱ — близкая к 0 постоянная величина. Координатные оси: ось r — горизонтальна, ось z — вертикальна (направлена вверх).

Подстановкой

$$r = \frac{a}{k}\cos\psi \tag{2}$$

уравнение (1) приводится к виду

$$z = -\frac{a\sqrt{1+k^2}}{k}\int_{\psi_1}^{\psi} \operatorname{tg}^2\psi \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{1+k^2}\sin^2\psi}\, d\psi, \tag{3}$$

где ψ_1 — постоянная, близкая к $\frac{\pi}{2}$, а именно $\psi_1 = \arccos\frac{k\varrho}{a}$.

Если в (3) положить

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \quad k = \operatorname{ctg}\theta, \tag{*}$$

то оно примет вид

$$z = -\frac{a}{\cos\theta}\int_{\psi_1}^{\psi} \operatorname{tg}^2\psi \cdot \sqrt{1 - \sin^2\theta \cdot \sin^2\psi}\, d\psi. \tag{3'}$$

Разбивая интеграл в (3′) на сумму двух интегралов

$$\int_{\psi_1}^{\psi} = \int_{\psi_1}^{0} + \int_{0}^{\psi}$$

и замечая, что первый из них есть величина постоянная, а также принимая во внимание, что в (1) в правой части можно вводить произвольное постоянное слагаемое, мы имеем право взять (3′) в виде:

$$z = -\frac{a}{\cos\theta}\int_0^{\psi} \operatorname{tg}^2\psi \cdot \sqrt{1-\sin^2\theta\cdot\sin^2\psi}\, d\psi. \tag{4}$$

Что касается интеграла правой части (4), то он сводится к основным эллиптическим интегралам $F(\varphi, \theta)$ и $E(\psi, \theta)$; а именно, если обозначить

$$M(\psi, \theta) = \operatorname{tg}\psi\sqrt{1-\sin^2\theta\cdot\sin^2\psi}, \tag{5}$$

то

$$\int_0^{\psi} \operatorname{tg}^2\psi\cdot\sqrt{1-\sin^2\theta\cdot\sin^2\psi}\, d\psi = M(\psi, \theta) + F(\psi, \theta) - 2E(\psi, \theta),$$

где, по обычным обозначениям,

$$F(\psi, \theta) = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\cdot\sin^2\psi}}, \quad E(\psi, \theta) = \int_0^{\psi} \sqrt{1-\sin^2\theta\cdot\sin^2\psi}\, d\psi.$$

Таким образом (4) в конце концов дает уравнение:

$$z = -\frac{a}{\cos\theta}[M(\psi, \theta) + F(\psi, \theta) - 2E(\psi, \theta)], \tag{6}$$

где ψ, θ и $M(\psi, \theta)$ определяются по (2), (*) и (5).

Так как k есть коэфициент трения, т. е.

$$k = \operatorname{tg}\varphi,$$

где φ —угол трения, то в силу (*):

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Возьмем, как делалось уже раньше для других кривых,

$$\varphi = 20^\circ \text{ и } \lg a = \bar{1},06661.$$

Отсюда $\theta = 90^\circ - \varphi = 70^\circ$.

Порядок вычисления координат точек кривой (6) такой:

1) задавая рядом значений ψ, по (5) вычисляем соответствующие значения функции $M(\psi, 70^\circ)$;

2) выбирая из таблиц эллиптических интегралов $F(\psi, 70^\circ)$ и $E(\psi, 70^\circ)$, по (6) вычисляем z;

3) по (2) определяем r.

По поводу таблиц эллиптических интегралов нужно сказать, что вычислитель[1] пользовался таблицами, помещенными во II-й части издания „Таблицы специальных функций", под редакцией Я. Н. Шпильрейна (ОНТИ, 1934), причем оказалось, что на стр. 26—39 в заголовках таблиц допущена систематическая ошибка: обозначение аргумента φ и параметра α переставлены одно на место другого; кроме того вычислитель натолкнулся на неоговоренную опечатку: на стр. 35 дано $E(20^\circ, 70^\circ) = 0.34886$ вместо нужного $E(20^\circ, 70^\circ) = 0.34286$.

[1] В. А. Егунов.

Результаты вычислений сведены в следующей таблице

ψ	$M(\psi, 70°)$	r	z	ψ	$M(\psi, 70°)$	r	z
в миллиметрах				в миллиметрах			
90°	$+\infty$	0,0	$-\infty$	55°	911,7	183,7	—120,6
89°	19.616,85	5,6	—6.764,3	50°	827,2	205,9	— 86,8
86°40′	5.946,8	18,6	—2.075,2	45°	749,3	226,5	— 61,9
85°	4.019,8	27,9	—1.395,8	40°	668,7	245,4	— 41,8
83°20′	3.071,4	37,2	—1.051,7	35°	589,8	262,4	— 27,4
81°40′	2.513,3	46,4	— 841,4	30°	509,7	277,4	— 17,0
80°	2.149,1	55,6	— 698,1	25°	428,0	290,3	— 9,7
77°30′	1.794,9	69,3	— 549,4	20°	344,7	301,0	— 4,9
75°	1.566,3	82,9	— 448,4	15°	259,9	309,4	— 2,1
70°	1.289,5	109,5	— 313,4	10°	174,0	315 4	— 0,6
65°	1.124,0	135,4	— 226,5	5°	87,0	319,1	— 0,1
60°	1.006,6	160,1	— 165,5	0°	0,0	320,4	— 0,0

Прилагаются примерные графики рассматриваемых кривых (рис. 1, 2 и 3).

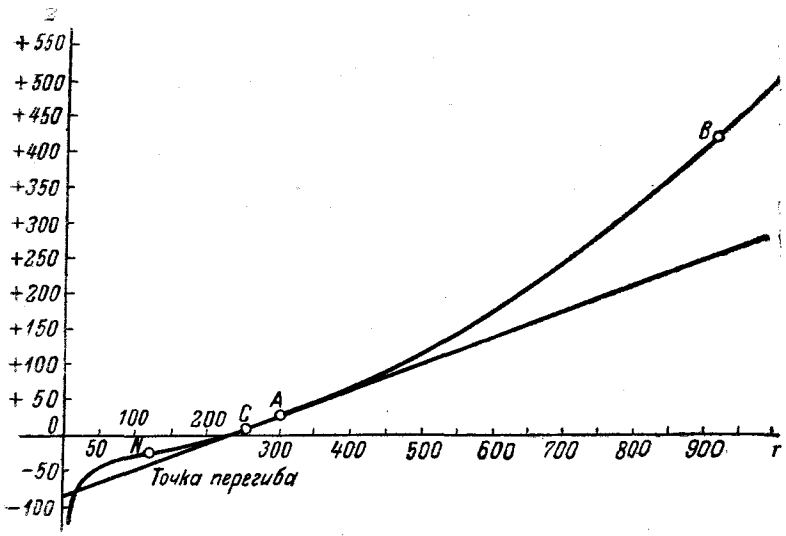


Рис. 1.

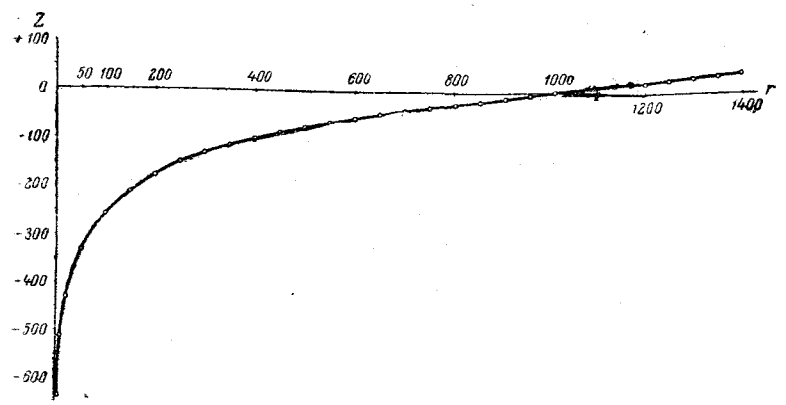


Рис. 2.

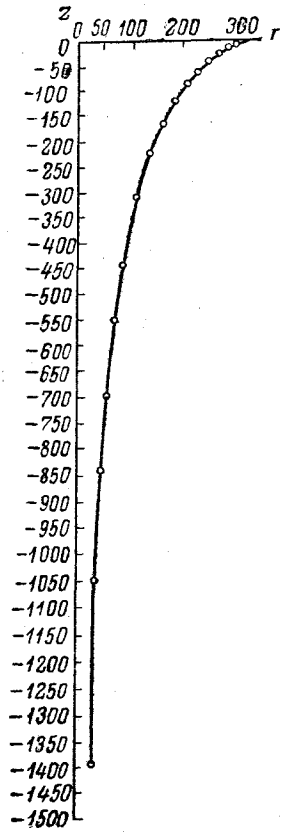


Рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Акимов. О движении тяжелой точки по винтовой линии на шероховатой поверхности. Записки Лен. Горн. ин-та, т. 10, вып. 1, 1936, стр. 11 и 21; т. 12, вып. 3, 1939, стр. 4.
2. Н. П. Неронов. К теории спирального сепаратора. Зап. Лен. Горн. ин-та, т. 10, вып. 1, 1936, стр. 34. (В обозначениях Н. П. Неронова принято b вместо a, ω вместо α и α вместо r_0).
3. В. А. Егунов. Численный пример определения траектории тяжелой точки, движущейся с трением по винтовой поверхности с криволинейной образующей. Зап. Лен. Горн. ин-та, т. 10, вып. 1, 1936, стр. 23—30.

Résumé

L'article contient le calcul des tables nécessaires pour la construction des surfaces hélicoidales

$$z = a\varphi + f(r)$$

où

$$f(r) = \begin{cases} C_1 \lg r, \\ C_2\left(\frac{r^2}{2} + a^2 \lg r\right), \\ \int_{\varrho}^{r} \sqrt{\left(\frac{1}{k^2}\frac{a^2}{r^2} - 1\right)\left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right)}\, dr, \\ 0 < \varrho \leqslant r \leqslant \frac{a}{k}, \end{cases}$$

qui se rencontrent dans la théorie du trieur à vis. (Voir le travail de M. I. Akimoff „Mouvement d'un point pesant sur une hélice, située sur une surface dépolie“ dans les Annales de l'Institut des Mines à Léningrad, t. 10. livr. 1 (1936), p. 11 et 21, t. 12, livr. 3 (1939), p. 4, 5, 38 et 39. Voir aussi l'article de V. A. Egounoff „Sur la théorie du trieur à vis“ dans les mêmes publications scientifiques, t. 10, livr. 1, p. 23—30).