Записки Ленинградского Горного Института. Том XIV, 1941
Annales de l'Institut des Mines à Léningrad. Vol. XIV, 1941

Оценка ошибки аналогии и ошибки оконтуривания при подсчете запасов полезного ископаемого

Доц. *Д. А. Казаковский*

Die Auswertung der Fehler von Analogie und Begrenzungsfehler bei der Berechnung von nutzbaren Mineralienvorräten

Doz. *D. A. Kasakovsky.*

I. Метод среднего арифметического

1. Замечания по поводу исходных формул метода

Метод среднего арифметического, являясь наиболее простым, находит довольно широкое применение при подсчете запасов по данным разведки, а также при маркшейдерском учете добычи на действующих предприятиях.

Более точные результаты метод дает при равномерном распределении разведочных выработок. Последнее обстоятельство является одним из условий применимости его.

Исходя из этого в дальнейшем мы и будем иметь в виду случай, когда скважины расположены в форме правильной квадратной сетки.

Для того, чтобы избежать повторений, оговорим те главнейшие обозначения, которые приняты ниже. Ниже обозначено:

$h_1 h_2 h_3 \ldots h_n$ — значения мощностей залежи по всем рудным скважинам.
$q_1 q_2 q_3 \ldots q_n$ — значения линейных запасов руды по всем рудным скважинам.
$p_1 p_2 p_3 \ldots p_n$ — значения линейных запасов металла по всем рудным скважинам.
$h'_1 h'_2 h'_3 \ldots h'_n$ — значения мощностей залежи по крайним рудным скважинам.
$q'_1 q'_2 q'_3 \ldots q'_n$ — значения линейных запасов руды по крайним рудным скважинам.
$p'_1 p'_2 p'_3 \ldots p'_n$ — значения линейных запасов металла по крайним рудным скважинам.
n — общее количество рудных скважин.
m — количество крайних рудных скважин.
l — расстояние между скважинами.
$\sum h$ — сумма мощностей залежи по всем рудным скважинам.
$\sum h'$ — то же по крайним рудным скважинам.
$h_{ср}$ — среднее арифметическое из мощностей по всем скважинам.
$h'_{ср}$ — то же по крайним рудным скважинам.
F', F — площади, ограниченные соответственно внутренним и внешним контурам.
F'' — площадь межконтурной полосы.
V', Q', P' — объем залежи, запас руды и металла в пределах внутреннего контура.

V'', Q'', P'' — то же в пределах межконтурной полосы.

V, Q, P — то же в пределах всего месторождения.

При подсчете запасов методом среднего арифметического обычно пользуются следующими формулами:

$$V' = h_{ср} F' \tag{1}$$

$$V'' = \frac{h'_{ср}}{2} F'' \tag{2}$$

$$V = V' + V''. \tag{3}$$

При определении Q и P можно воспользоваться этими же формулами, заменив в них $h_{ср}$ и $h'_{ср}$ на $q_{ср}q'_{ср}$ и $p_{ср}p'_{ср}$.

В своей работе „Определение ошибки аналогии при подсчете запасов методом вертикальных сечений" мы установили наличие зависимости между получаемыми в результате подсчета цифрами V, Q и P и местом заложения начальной скважины. При поступательном перемещении разведочной сетки (в пределах интервала l) мощность по каждой из скважин изменяется по законам:

$$h_1 = f_1 (x_A y_A)$$

$$h_2 = f_2 (x_A y_A)$$

. . . . . .

. . . . . .

$$h_n = f_n (x_A y_A)$$

$$x_A \leqq l \quad y_A \leqq l,$$

где $x_A y_A$ — координаты начальной скважины. (Начало координат совпадает с начальной скважиной. Оси координат совпадают с разведочными линиями).

В соответствии с этим сумма мощностей по скважинам изменяется по закону:

$$\sum h = \psi (x_A y_A) = f_1 (x_A y_A) + f_2 (x_A y_A) + \ldots + f_n (x_A y_A). \tag{4}$$

Приведенная функция выражает некоторую топографическую поверхность, которая обладает по крайней мере двумя характерными точками. В одной из них поверхность имеет наибольшую отметку $\left(\sum h_{max}\right)$, во второй – наименьшую $\left(\sum h_{min}\right)$.

Выражение для истинного объема всей залежи символически можно записать в следующем виде:

$$V_{ист} = \int_0^{\cdot} \int_0^{\cdot} \psi (x_A y_A)\, dx\, dy. \tag{5}$$

Отсюда средняя истинная отметка поверхности $\psi (x_A y_A)$ равна:

$$\sum h_{ист} = \frac{V_{ист}}{l^2}. \tag{6}$$

Отклонения $\sum h_{min}$ и $\sum h_{max}$ от $\sum h_{ист}$ по своим численным значениям примерно равны. Это подтверждают и имеющиеся в нашем распоряжении данные наблюдений на модели (см. ниже табл. 1).

В соответствии с этим можно считать более точным (имеющим меньшую предельную ошибку) такое значение объема, которое получается из формулы:

$$V = l^2 \sum h. \tag{7}$$

На основании (7) для объема залежи во внутреннем контуре имеем:

$$V' = l^2 \sum h - V''. \tag{8}$$

Таблица 1

Величины отклонений $\sum h_{min}$ и $\sum h_{max}$ от $\sum h_{ист}$ для суммарной топографической поверхности $\sum h = \psi(x_A y_A)$ (цементная модель)

Расстояние между скваж. в *см*	$\sum h_{ист}$ в *см*	$\sum h_{max}$ в *см*	$\sum h_{min}$ в *см*	$\Delta = \sum h_{max} - \sum h_{ист}$	$\Delta' = \sum h_{ист} - \sum h_{min}$	$\Delta - \Delta'$	$\frac{(\Delta - \Delta')100}{\sum h_{ист}}$
16	61,7	71,1	54,0	9,4	7,7	÷1,7	÷2,8%
12	109,8	122,7	99,0	12,9	10,8	÷2,1	÷2,0%
8	247,0	257,3	236,5	10,3	10,5	—0,2	—0,1%
6	439,2	447,3	429,3	8,1	9,9	—1,8	—0,4%
4	988,2	999,3	980,2	11,1	8,0	÷3,1	÷0,3%

Отсюда средняя мощность (при исчислении объема во внутреннем контуре) равна:

$$H_{ср} = \frac{l^2 \sum h - V''}{F'}. \tag{9}$$

Положив:

$$F' = knl^2, \tag{10}$$

где $k < 1$, на основании (9) легко получить:

$$H_{ср} = h_{ср} - \left[h_{ср}\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{V''}{nl^2k}\right]. \tag{11}$$

Полагая:

$$F'' \cong nl^2 - F', \tag{12}$$

выражение (11) можно записать в таком виде:

$$H_{ср} = h_{ср} - h_{ср}\left(1 - \frac{1}{k}\right) - h''_{ср}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\Big], \tag{12а}$$

где $h''_{ср}$ — средняя мощность в межконтурной полосе:

$$h''_{ср} = \frac{h'_{ср}}{2}.$$

Член: $\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ в выражении (12а) всегда отрицателен. Поэтому имеем:

$$\left.\begin{aligned} H_{ср} - h_{ср} > 0 \quad &\text{при} \quad h_{ср} > h''_{ср} \\ H_{ср} - h_{ср} < 0 \quad &\text{при} \quad h_{ср} < h''_{ср} \\ H_{ср} - h_{ср} = 0 \quad &\text{при} \quad h_{ср} = h''_{ср} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Из приведенных рассуждений следует, что применяемая обычно для подсчета объема формула (1) имеет следующие недостатки:

1) дает преуменьшенный результат при $h_{ср} > h''_{ср}$,

2) дает преувеличенный результат при $h_{ср} < h''_{ср}$.

Это подтверждается и опытом. Как известно, объем, подсчитанный по методу среднего арифметического, всегда меньше объема, получаемого при помощи более точных способов. На это указывает и приводимая табл. 2.

Более целесообразно, таким образом, вести подсчет объема (в пределах внутреннего контура), пользуясь тем значением средней мощности, которое получается из формулы (9).

Имея в виду приближенные неравенства:

$$F' \approx nl^2 - F''; \; V'' \approx \frac{F'' \sum h'}{2m}; \quad F'' \approx \frac{ml^2}{2}, \tag{14}$$

формулу (9) легко преобразовать и представить в следующем виде:

$$H_{ср} = \frac{2\sum h - 0{,}5 \sum h'}{2n - m}. \tag{15}$$

Откуда:

$$V' = \left(\frac{2\sum h - 0{,}5 \sum h'}{2n - m} \right) F'. \tag{16}$$

Разница между результатами предлагаемой формулы (16) и обычно применявшейся формулы (1) в относительном выражении равна:

$$\frac{dV}{V'} = m \left(\frac{2h_{ср} - h'_{ср}}{4\sum h - \sum h'} \right). \tag{17}$$

Приведенная выше формула (9), на основании которой получено выражение (16), содержит V'', т. е. объем в пределах межконтурной полосы. Этот объем определяется с некоторой ошибкой, происходящей от погрешности оконтуривания. Обозначим через $\Delta V''$ ошибку V'' в зависимости от погрешности оконтуривания. Можно принять $\Delta V''_{пред.} = 0{,}5V''$.

Влияние этой ошибки на результат вычисления $H_{ср}$ по формуле (9) будет равно:

$$\left(\frac{\Delta H}{H_{ср}} \right)_{пред.} = \frac{V''}{2V^1}.$$

Таким образом, когда, например,

$$V'' \leqq 0{,}1\, V' \tag{18}$$

$\left(\frac{\Delta H}{H_{ср}} \right)_{пред.} \leqq 5\%$, т. е. в этом случае влияние ошибки оконтуривания ничтожно даже в предельном выражении.

Полагая $V'' = l^2 \frac{\sum h'}{4}$; $V' = h_{ср} \left(l^2 n - \frac{l^2 m}{2} \right)$, неравенство (17′) можно преобразовать следующим образом:

$$5\sum h' \leqq h_{ср} (2n - m). \tag{19}$$

Следовательно, когда имеет место неравенство (19), объем можно вычислять по формуле (16). В противном случае есть опасение получить преувеличенный или преуменьшенный результат. Для того, чтобы гарантировать себя от преувеличенного результата, числитель формулы (9) необходимо уменьшить на $0{,}5V''$, т. е. положить:

$$H_{ср} = \frac{l^2 \sum h - 1{,}5\, V''}{F'}. \tag{20}$$

Преобразовав выражение (20) аналогично (9), получим следующую формулу для вычисления объема во внутреннем контуре:

$$V' = \left(\frac{3\sum h - \sum h'}{3n - 1{,}5\, m} \right) F'. \tag{21}$$

Разница между результатами предлагаемой формулы (21) и обычно применявшейся формулы (1) в относительном выражении равна:

$$\frac{dV}{V'} = m\left(\frac{1{,}5h_{ср} - h'_{ср}}{3\sum h - \sum h'}\right). \qquad (22)$$

В помещаемой ниже табл. 2 делается сравнение точности результатов вычисления V' по формулам (1), (16) и (21). Как видим, предлагаемые формулы (16) и (21), не усложняя вычисления, дают более точный результат.

Таблица 2

Значения объемов в пределах внутреннего контура, вычисленные по формулам (1), (16) и (21) для различных расстояний между скважинами (цементная модель)

Расстояние между скваж. в *см*	Кол-во скважин, n	V'			$V'_{ист}$	$\frac{(6)-(3)}{(6)}100$	$\frac{(6)-(1)}{(6)}100$	$\frac{(6)-(5)}{(6)}100$
		По ф. (1)	По ф. (16)	По ф. (21)				
2		3	4	5	6	7	8	9
16	22	8806	11730	11028	12100	+ 27%	+3,3%	+ 9%
16	24	11328	15383	14849	13520	+ 16%	— 14%	— 10%
16	24	9745	13248	12783	13553	+ 28%	+ 3%	+ 6%
4	273	12672	13939	13793	13621	+ 7%	—2,5%	—1,5%
4	273	12664	13896	13747	13540	+6,5%	—2,5%	—1,5%
4	237	11557	12695	12494	12720	+ 9%	+0,2%	+ 2%
24	12	7921	11405	10679	12525	+ 37%	+ 9%	+ 15%
24	12	7000	9874	9151	12261	+ 46%	+ 19%	+ 25%
24	11	6941	11064	9456	11790	+ 41%	+ 6%	+ 20%

Примечание: Объемы для интервалов 16, 4 и 24 *см* вычислены при различном положении сетки разведочных скважин.

Формулы (16) и (21) можно распространить и на вычисление Q и P. В этом случае достаточно $\sum h$ и $\sum h'$ заменить $\sum q$, $\sum q'$ и $\sum p$, $\sum p'$. Формулы (15) и аналогичную ей из выражения (21) можно использовать также для вычисления среднего волюметрического и среднего гравиометрического значений объемного веса и содержания полезного компонента. Например, можно написать:

$$C_{ср} = \frac{2\sum h_i R_i C_i - 0{,}5\sum h'_i R'_i C'_i}{2\sum h_i R_i - 0{,}5\sum h'_i R'_i} \qquad (23)$$

или

$$C_{ср} = \frac{3\sum h_i R_i C_i - \sum h'_i R'_i C'_i}{3\sum h_i R_i - \sum h'_i R'_i}. \qquad (24)$$

2. Возможность применения формул математической статистики к определению ошибки аналогий

Из тех немногих работ по точности подсчета запасов, которые выполнены до сих пор, почти каждая решает вопрос по своему.

Так, некоторые исследователи считают возможным решение вопроса при помощи методов математической статистики (А. А. Русинов и Е. В. Орлова, Л. И. Шаманский, П. А. Рыжов (*1, 3, 6*)). Другие полагают, что правильным решением будет такое, при котором эти методы используются не в чистом виде, а дополненные рядом соображений геологической изученности месторождения

(В. М. Крейтер (*4*)). Третьи пытаются решить вопрос путем изучения характера изменения цифры запаса при сгущении или разрежении сетки разведочных единиц (Н. А. Николаев (*2*)). Помимо этого опубликован ряд работ проф. А. М. Журавского (5), в которых делается попытка решить вопрос аналитически, без привлечения математической статистики и без учета соображений геологической изученности.

Наконец, некоторые исследователи считают возможным решение задачи на основе сопоставления цифр запасов, подсчитанных по данным разведки, с запасами, выявленными при эксплоатации (В. М. Крейтер и др.).

В работах А. М. Журавского вопрос рассматривается применительно к способам треугольников и многоугольников и не ставится задача численной оценки ошибки. Выдвинутые в этих работах методы исследования трудно распространить на интересующий нас способ среднего арифметического. По указанной причине мы не будем здесь касаться работ А. М. Журавского.

Способ оценки ошибки аналогий, основанный на сравнении тоннажа руды, подсчитанной по данным разведки, с тоннажем, получаемым в результате эксплоатации, явно несостоятелен по следующим причинам.

1) Способ дает представление только о величине реальной, а не предельной ошибки. Как увидим далее, реальная ошибка зависит от способа расположения разведочной сетки, почему характеризовать ею точность подсчитанной цифры запаса не представляется возможным.

2) Само по себе сравнение разведанного с добытым не может быть точным, так как добыча учитывается со значительной ошибкой.

Отказываясь и от этого пути определения ошибки, мы остановимся здесь на способах, основанных на математической статистике (*1*).

Из работ, выдвигающих эти способы, мы рассмотрим только работу П. А. Рыжова, так как в других вопрос решается аналогично.

Для решения поставленной задачи П. А. Рыжов предлагает воспользоваться формулами случайных ошибок и вариационной статистики.

В качестве исходного берется выражение для запасов полезного компонента при подсчете методом среднего арифметического.

$$P=\frac{h_{ср}R_{ср}C_{ср}}{100}F'. \tag{25}$$

В соответствии с поставленной задачей делается попытка решить два вопроса:

1) указать способ определения погрешности средних значений h, R и C;

2) дать способ определения погрешности P в зависимости от погрешностей $h_{ср}$, $R_{ср}$ и $C_{ср}$.

Первый вопрос автором решается путем применения формулы погрешности среднего значения аргумента, вычисленного по данным выборочной совокупности:

$$\delta=\pm t\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{S-n}{S-1}\right)}, \tag{26}$$

где σ — среднее квадратическое отклонение аргумента, n — объем выборочной совокупности, S — объем генеральной совокупности, t — коэфициент вероятности.

При $t=1$ формула (26) принимает вид (формула Чупрова):

$$\delta=\pm\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{S-n}{S-1}\right)}. \tag{27}$$

Принимая расстояние между скважинами (при котором $h_{ср}$, $R_{ср}$ и $C_{ср}$ определяются безошибочно) равным $\sqrt{f}$ *м*, формулу (27) автор преобразует следующим образом:

$$\delta=\pm\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{F'-nf}{F'-f}\right)}, \tag{28}$$

где F' — площадь распространения залежи, n — количество скважин.

В практике подсчета запасов даже для слабо изменчивых месторождений можно принять $\sqrt{f} = 10$ *м*. В этом случае при разведке залежи с $F' = 0{,}04$ кв. *км*, при $n = 16$, будем иметь:

$$\delta = \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{40\,000 - 16\,0}{40\,000 - 100}\right)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{0{,}97},$$

откуда

$$\delta \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad (29)$$

Таким образом, практически более целесообразно пользоваться формулой (29).

Предлагая формулу (28), П. А. Рыжов без нужды осложняет решение вопроса.

Применение формулы (28) или (29) для вычисления ошибок $h_{ср}$, $R_{ср}$ и $C_{ср}$ вызывает серьезные возражения. Эти формулы могут применяться при исследовании величин случайного характера. Что же касается совокупности, составленной из мощностей залежи, то здесь поручиться за такую случайность нельзя.

В случае, когда мощность залежи от периферии к центру изменяется с некоторой вполне определенной тенденцией, дисперсия мощностей не будет характеризовать размаха колебания среднего их значения при различном положении разведочной сетки.

В силу указанного, пользуясь формулами (28) и (29), в большинстве случаев мы будем получать преувеличенный результат.

Для вычисления ошибки P в зависимости от ошибок $h_{ср}$, $R_{ср}$ и $C_{ср}$ автор предлагает воспользоваться известной в теории случайных ошибок формулой погрешности функции от измеренных величин. С таким предложением нельзя согласиться, поскольку величины h, R и C, вообще говоря, не являются независимыми.

В некоторых случаях h, R и C могут находиться в корреляционной связи.

Неверно утверждение автора и о том, что предложенный им способ пригоден для определения ошибки запаса независимо от того, каким методом определялся запас. С этим можно было бы согласиться, если бы при подсчете запасов любым из методов получались одни и те же результаты. Опыт убеждает нас в обратном.

При оценке ошибки P П. А. Рыжов считает погрешность F' равной нулю. Это неверно, так как F' изменяется по мере сдвижения сетки разведочных скважин. Рекомендуемое автором вычисление количества скважин (n), необходимого для разведки месторождения с заранее заданной точностью, по формуле (27) неизбежно должно привести к резко преувеличенному результату.

Преувеличение имеет две причины.

а) Использование преувеличенного σ. При этом, если вычисленное σ превышает его истинное значение в k раз, количество разведочных выработок получается в k^2 раз больше необходимого.

б) Если иметь в виду свойство устойчивости σ, то из формулы (29) следует, что увеличение количества скважин в t раз влечет за собой уменьшение ошибки в $\sqrt{t}$ раз.

На самом деле, как увидим далее, такой правильности в характере убывания ошибки не наблюдается и, кроме того, она убывает более быстро.

Резюмируя предпринятое здесь рассмотрение способа оценки ошибки при помощи формул вариационной статистики, необходимо сказать следующее:

1) этот способ неоднократно выдвигался в литературе и кроме П. А. Рыжова (Л. И. Шаманский, В. М. Крейтер, А. А. Русинов и Е. В. Орлова);

2) основанный на формулах математической статистики, механически перенесенных в подсчет запасов, этот способ нельзя признать приемлемым.

3. Предлагаемый способ оценки ошибки аналогий

Мы здесь рассмотрим вопрос применительно к вычислению объема. Так как принципиальной разницы между определением объема и запасов руды и металла нет, то выводы, сделанные в отношении ошибки V, могут быть без труда распространены и на определение Q и P.

Выше, говоря о поверхности $\sum h = \psi(x_A y_A)$, мы обозначили ее минимальную и максимальную отметки соответственно через $\sum h_{min}$ и $\sum h_{max}$.

Ту отметку поверхности, которая отвечает случайному положению начальной скважины „А" обозначим через $\sum h_p$.

Таким образом, очевидно, что:

$$\sum h_{max} > \sum h_p > \sum h_{min}. \tag{30}$$

Обозначим:

$M(V)_p$ — ошибка аналогий для случайного положения начальной скважины.

$M(V)_{пр}$ — предельное значение ошибки аналогий.

Выше мы указывали на вероятность допущения:

$$\sum h_{max} - \sum h_{ист} = \sum h_{ист} - \sum h_{min}. \tag{31}$$

При вычислении объема по формуле (7) на основании равенства (31) мы можем написать:

$$M(V)_{пр} = \left(\sum h_{ист} - \sum h_{min}\right) l^2, \tag{32}$$

$$M(V)_p = \left(\sum h_p - \sum h_{ист}\right) l^2 \tag{33}$$

или в относительном выражении, имея в виду равенство (6):

$$\frac{M(V)_{пр}}{V_{ист}} = 1 - \frac{\sum h_{min}}{\sum h_{ист}}, \tag{34}$$

$$\frac{M(V)_p}{V_{ист}} = \frac{\sum h_p}{\sum h_{ист}} - 1. \tag{35}$$

Основываясь на равенствах (34) и (35), можно заключить следующее:

1) При данном расстоянии между скважинами ошибка $M(V)_p$ зависит от места заложения начальной скважины „А". При изменении координат скважины от 0 до l, $M(V)_p$ принимает любые значения в пределах от $-M(V)_{пр}$ до $+M(V)_{пр}$, в том числе и нуль.

2) При тех же условиях $M(V)_{пр}$ не зависит от положения начальной скважины и определяется характером поверхности $h = \psi(x_A y_A)$.

Посмотрим теперь, каким образом будут изменяться величины $M(V)_p$ и $M(V)_{пр}$ при уменьшении расстояния между скважинами. Для удобства выводов эти расстояния будем уменьшать в 2, 4, 8 и т. д. раз.

При уменьшении расстояния между скважинами в 2 раза суммарная топографическая поверхность (4) заменится новой поверхностью вида $\sum h' = \psi_1(x_A y_A)$:

$$\left.\begin{aligned} x_A &\leqslant \frac{l}{2}, \\ y_A &\leqslant \frac{l}{2}. \end{aligned}\right| \tag{36}$$

Эту поверхность можно получить следующим образом. Проведем мысленно две вертикальные плоскости, отстоящие от начальной скважины „А" на расстоянии $\frac{l}{2}$. Одна из этих плоскостей параллельна, вторая перпендикулярна оси

абсцисс. Проведенные плоскости разделят поверхность $\sum h = \psi(x_A y_A)$ на четыре части, уравнения которых будут:

$$\left.\begin{aligned} \sum h'_1 &= f'_1(x_A y_A) \\ \sum h'_2 &= f'_2(x_A y_A) \\ \sum h'_3 &= f'_3(x_A y_A) \\ \sum h'_4 &= f'_4(x_A y_A) \end{aligned}\right\} \quad \text{где:} \quad \left|\begin{aligned} x_A &\leqslant \frac{l}{2}, \\ y_A &\leqslant \frac{l}{2}. \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Сложив поверхности (37), получим поверхность $\sum h' = \psi_1(x_A y_A)$.

Для дальнейших рассуждений обозначим:

$M(V)'_{\text{пр}}$ — предельное значение ошибки аналогий для расстояния между скважинами $\frac{l}{2}$,

$M(V)'_p$ — то же для случайного положения начальной скважины,

$\sum h'_{max}$, $\sum h'_{min}$ — наибольшая и наименьшая отметки поверхности (36),

$\sum h'_p$ — отметка поверхности (36), соответствующая случайному положению начальной скважины.

Так как трудно допустить у поверхности $\sum h = \psi(x_A y_A)$ наличие четырех равных по величине наибольших или наименьших отметок, при этом в точках, симметричных относительно плоскостей $y = \frac{l}{2}$, $x = \frac{l}{2}$, то мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned} \sum h'_{max} &< 4 \sum h_{max}, \\ \sum h'_{min} &> 4 \sum h_{min}. \end{aligned}\right| \tag{38}$$

В соответствии с неравенствами (38) имеем:

$$M(V)_{\text{пр}} > M(V)'_{\text{пр}}. \tag{39}$$

Совершенно очевидно, что нельзя сделать такое же заключение в отношении $M(V)_p$. Разность $M(V)_p - M(V)'_p$ может быть больше нуля, меньше нуля и равна нулю, все время оставаясь по численной величине меньше

$$M(V)_{\text{пр}} + M(V)'_{\text{пр}}.$$

Приведенные здесь рассуждения применительно к уменьшению расстояния между скважинами в 2 раза останутся справедливыми и при уменьшении этого расстояния в 4, 8 и т. д. раз.

Таким образом, основываясь на приведенных выше рассуждениях, можно заключить следующее.

1) При уменьшении расстояния между скважинами предельная ошибка аналогий убывает и стремится к нулю. Характер убывания определяется видом поверхности $h = \psi(x_A y_A)$ и не связан какой-либо зависимостью с увеличением количества скважин. В соответствии с этим не представляется возможным предусмотреть уменьшение ошибки в зависимости от возрастания количества скважин.

2) Величина ошибки аналогий для случайного положения начальной скважины $(M(V)_p)$ при уменьшении расстояния между скважинами также убывает и стремится к нулю. Однако это уменьшение складывается из возрастания и убывания. При переходе от расстояния между скважинами l к расстоянию $\frac{l}{2}$, $M(V)_p$ может увеличиться, уменьшиться или остаться прежней по величине.

4. Связь между ошибкой аналогии и факторами, ее определяющими

Эту связь символически можно записать (для $M(V)_p$) в виде следующего выражения:

$$\frac{M(V)_p}{V_{ист}} = f(\mu, \varrho, x_A, y_A). \tag{40}$$

Здесь: $\frac{M(V)_p}{V_{ист}}$ — относительная ошибка аналогий для случайного положения сетки разведочных скважин,

μ — степень изменчивости мощности,

ϱ — относительная густота разведочных единиц,

x_A, y_A — координаты начальной скважины разведочной сетки.

Положение начальной скважины — фактор неопределенный, учесть который не представляется возможным. В связи с этим не представляется возможным определить также и $M(V)_p$.

Связь между предельным значением ошибки аналогий и факторами, ее определяющими, можно записать в следующем виде:

$$\frac{M(V)_{пр}}{V_{ист}} = f(\mu, \varrho). \tag{41}$$

Предельная ошибка не зависит от места заложения начальной скважины и определяется степенью изменчивости мощности и густотой разведочных скважин. Величину ошибки принципиально представляется возможным определить, если окажется возможным дать численное выражение для μ и ϱ.

5. Числовая характеристика изменчивости мощности, относительной густоты разведочных единиц и показателя разведанности

Выше было установлено, что:

$$\frac{M(V)_{пр}}{V_{ист}} = \frac{\sum h_{ист} - \sum h_{min}}{\sum h_{ист}}. \tag{34 [1]}$$

Величина разности $\sum h_{ист} - \sum h_{min}$ определяется характером поверхности тела $h = f(x, y)$, объем которого мы определяем при подсчете запасов.

С другой стороны, так как нас интересует при численной характеристике изменчивости мощности не абсолютная, а относительная величина изменчивости, мы должны принимать в расчет среднюю мощность залежи. При одном и том же характере поверхности $h = f(x, y)$ относительное значение разности $\sum h_{ист} - \sum h_{min}$ будет обратно пропорционально средней мощности залежи.

Таким образом, при заданном расстоянии между скважинами ошибка объема будет определяться двумя факторами: пересеченностью поверхности фиксируемой изомощностями залежи и средней мощностью последней.

Совокупное влияние этих двух факторов мы и назовем степенью изменчивости мощности.

В своей работе „Определение ошибки аналогий при подсчете запасов методом вертикальных сечений“ мы показали, что

1) размах колебаний отметок суммарной топографической поверхности $\sum h = \psi(x_A y_A)$ около ее средней отметки $\sum h_{ист}$ зависит не столько от изменения мощности вообще, сколько от такого изменения, при котором мощность изменяет свою величину, попеременно убывая и возрастая;

2) коэфициент вариации, в свое время предложенный В. М. Крейтер для характеристики изменчивости мощности, является недостаточно надежным критерием и не может быть поэтому рекомендован для практического использования.

В этой же работе мы предложили характеризовать „пересеченность" поверхности $h=f(xy)$ средней величиной вторых разностей из мощностей, а степень изменчивости числом

$$\mu=\frac{\sum(\Delta^2 q)}{k\cdot h_{ср}}, \tag{42}$$

где $\sum(\Delta^2 q)$ — сумма численных значений вторых разностей из мощностей по скважинам, умноженных на их веса, k — число разностей, $h_{ср}$ — средняя мощность по данным скважин.

Вторые разности Δ^2 подсчитываются по всем линиям вдоль, поперек и по двум диагоналям разведочной сетки. Вес q для разностей по продольным и поперечным направлениям берется равным 1, по диагональным — 0,7 (q — обратно пропорционально l). В соответствии с установившейся терминологией величину μ можно назвать коэфициентом изменчивости мощности.

Как указывалось выше, предельная ошибка аналогий зависит не только от степени изменчивости мощности, но также и от густоты разведочных скважин.

В приведенной выше работе мы показали, что при определении ошибки подсчитанного объема нас интересует не абсолютное расстояние между скважинами, а отношение площади распространения залежи к квадрату расстояния между скважинами, т. е. величина:

$$\varrho=\frac{F}{l^2}. \tag{43}$$

Величину ϱ можно назвать относительной густотой разведочных единиц.

Мы рассматривали $\frac{M(V)_{пр}}{V_{ист}}$ как функцию двух факторов: фактора — μ и фактора — ϱ.

Можно показать, что $\frac{M(V)_{пр}}{V_{ист}}$ можно рассматривать и как функцию одного фактора. На самом деле, согласно (34′) $\frac{M(V)_{пр}}{V_{ист}}$ зависит от разности $\sum h_{ист.}-\sum h_{min}$, определяемой степенью пересеченности поверхности $h=f(xy)$ и обратно пропорционально $\sum h_{ист}$.

Положив

$$\sum h_{ист}=\frac{V_{ист}}{l^2}\approx\frac{Fh_{ср}}{l^2} \tag{44}$$

в соответствии с (34[1]), естественно считать величину, которая определяет $M(V)_{пр}$ равной:

$$t=\frac{\frac{\sum(\Delta^2 q)}{k}}{\frac{Fh_{ср}}{l^2}}=\frac{\sum(\Delta^2 q)\,l^2}{kFh_{ср}} \tag{45}$$

Имея в виду равенства (42) и (43) можно также написать:

$$t=\frac{\mu}{\varrho} \tag{46}$$

или, так как $\varrho\cong n$ (где n — число скважин).

$$t=\frac{\mu}{n}. \tag{47}$$

Так как t по численной величине мало, то удобно выражать его в промиллях. Таким образом, окончательно имеем $t=\frac{1000\,\mu}{\varrho}\,{}^0/_{00}$.

Величину, обратную t, условно назовем „показателем разведанности“ R. Таким образом:

$$R=\frac{\varrho}{1000\,\mu}. \tag{48}$$

Величина ошибки $M(V)_{\text{пр}}$ и показатель разведанности связаны прямой зависимостью.

6. Определение ошибки аналогий в зависимости от показателя разведанности

В соответствии с изложенным выше можно написать:

$$\frac{M(V)_{\text{пр}}}{V_{\text{ист}}}=f(t)=\psi(R), \tag{49}$$

где

$$R=\frac{kn\,h_{\text{ср}}}{1000\sum(\Delta^2 q)}.$$

Число R может быть получено по данным разведки. Что касается функциональной связи между $\frac{M(V)_{\text{пр}}}{V_{\text{ист}}}$ и R, то она может быть задана на первом этапе таблично.

Таблица может быть составлена на основе сравнения добытого полезного ископаемого с подсчитанными по данным разведки. Она может быть составлена и на основе экспериментирования над геометрически правильными телами. Первый путь неприемлем, так как таким путем мы получим представление не о $M(V)_{\text{пр}}$, а о $M(V)_p$.

Закономерное изменение мощности в случае геометрически правильного тела, неизбежно должно вызвать и более закономерное изменение $M(V)_{\text{пр}}$ при изменении количества скважин.

С этой точки зрения выводы, сделанные на основе экспериментирования над геометрически правильными телами будут иметь не всеобщий, а ограниченный характер.

В соответствии с изложенным мы считаем более правильным составление таблицы функции $M(V)_{\text{пр}}=f(R)$ на основе экспериментирования на моделях тел неправильной формы. Будучи однажды составленной эта таблица впоследствии позволит решать и обратную задачу на определение численной величины ошибки в зависимости от R. Составление такой таблицы было нами проделано на основе наблюдений на модели тела неправильной формы, проведенных в 1937 г. Описание модели наблюдений и обработки их приводится в упоминавшейся выше нашей работе.

Здесь мы помещаем результат этих наблюдений — таблицы 3 и 4.

Данные табл. 3 показывают изменение t в зависимости от количества скважин n.

Функция $t=f(n)$ при $n=349$ равна 1,1 ‰. По мере уменьшения n число t возрастает. При этом при уменьшении n от 349 до 86 t возрастает от 1,1 до 7 ‰, оставаясь все время однозначным. При дальнейшем уменьшении n t утрачивает однозначность и начинает зависеть от места заложения начальной скважины, но все же имеет отчетливую тенденцию к возрастанию примерно до $n=18$—24.

Величина R возрастает по мере увеличения n и остается практически однозначной только для n, большего 18—24.

В табл. 4 приводятся относительные величины предельных ошибок аналогии при вычислении объема по формуле $V=l^2\sum h$ в зависимости от показателя разведанности R. Пользуясь табл. 4 можно определять предельную ошибку объема, подсчитанного по данным разведки на основе приведенной формулы, в зависимости от R.

Таблица 3

Значения t для различных положений разведочной сетки с различным расстоянием между скважинами (цементная модель)

Расстояние между скважинами l, *см*	Количество скважин n	При каком количестве положений разведочной сетки вычислялось t	Пределы колебаний t, ‰
25	6	При одном	48
22	8	При одном	56
20	14	При одном	104
18	16	При одном	50
16	18—24	При шести	22—39
14	27	При одном	31
12	36—40	При четырех	15—19
10	53—59	При четырех	9—15
8	84—90	При четырех	7
6	153	При одном	3,4
4	349	При одном	1,1

Таблица 4

Значения предельной ошибки объема вычисленного по формуле $V = l^2 \sum h$ (цементная модель)

Расстояние между скважинами l, *см*	Количество скважин n	$R = \frac{1}{t}$	Предельная ошибка V
16	18—24	0,02—0,04	13%
12	36—40	0,05—0, 6	10%
8	84—90	0,14	4%
6	153	0,29	2%
4	349	0,91	1%

Имея в виду неоднозначность R для n, меньших 18—24, можно заключить, что надежная оценка ошибки возможна только в том случае, когда число скважин превышает 18—24.

II. Оценка ошибки при подсчете запасов другими методами

Выше мы говорили об оценке ошибки аналогий при определении объема по формуле:

$$V = l^2 \sum h. \tag{7'}$$

В данном случае объем можно рассматривать как некоторую функцию $\sum h$:

$$V_1 = f_1 (\sum h). \tag{50}$$

Тогда же, когда объем определяется по другой формуле (по способу треугольников, многоугольников и т. д.), например:

$$V_2 = f_2 (\sum h) \tag{51}$$

то ошибку объема, вычисленного по формуле (51), легко оценить, зная ошибку его при вычислении по формуле (7^1).

В самом деле, обозначим:

$M(V)_{\text{пр}_1}$ — предельная ошибка аналогии объема, вычисленного по формуле (7^1),

$M(V)_{\text{пр}_2}$ — то же по формуле (51).

Имея в виду данные выше рассуждения, можно написать:

$$M(V)_{\text{пр}_2} = M(V)_{\text{пр}_1} \pm [f_1(\sum h) - f_2(\sum h)] \tag{52}$$

или в относительном исчислении:

$$\frac{M(V)_{\text{пр}_2}}{V_{\text{ист}}} = \frac{M(V)_{\text{пр}_1}}{V_{\text{ист}}} \pm \left(\frac{f_1(\sum h) - f_2(\sum h)}{V_{\text{ист}}}\right).$$

Положив $V_{\text{ист.}} \cong V_1$, наконец получим:

$$\frac{M(V)_{\text{пр}_2}}{V_{\text{ист}}} = \frac{M(V)_{\text{пр}_1}}{V_{\text{ист}}} \pm \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) = K \pm \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right)^1 \tag{53}$$

Член K, написанного выражения находится по табл. 4 в функции от R, член $\left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right)$ вычисляется. При этом необходимо иметь в виду, что вычисленная по формуле (53) ошибка будет включать в этом случае не только ошибку аналогии, но и ошибку оконтуривания залежи в плане.

Пример. Пусть требуется определить ошибку аналогий и ошибку оконтуривания по следующим данным:

$$\sum h = 54{,}2 \text{ м}; \quad \sum h' = 21{,}4 \text{ м}; \quad n = 32; \quad m = 14;$$

$$F' = 52\,400 \text{ м}^2; \quad F'' = 11\,280 \text{ м}^2; \quad l = 50 \text{ м}; \quad R = 0{,}05.$$

Объем залежи в пределах внешнего контура подсчитан по формулам (1) и (2).

$$V_2 = \left(\frac{\sum h}{n} F' + \frac{\sum h'}{2m} F''\right).$$

Согласно формуле (53) имеем

$$\frac{M(V)_{\text{пр}_3}}{V_{\text{ист}}} = K + \left(1 - \frac{\frac{\sum h}{n} F' + \frac{\sum h'}{2m} F''}{l^2 \sum h}\right) = K + 0{,}28.$$

По табл. 4 в функции от $R = 0{,}05$ находим

$$K = \frac{M(V)_{\text{пр}_1}}{V_{\text{ист}}} = 0{,}10.$$

Отсюда $\frac{M(V)_{\text{пр}_2}}{V_{\text{ист}}} = 0{,}10 + 0{,}28 = 0{,}38$ или 38%.

Таким образом, предложенный здесь способ определения ошибки может быть без труда распространен на случай подсчета объема любым из существующих методов. Выше мы указывали на отсутствие принципиальной разницы между определением объема V и запасов руды и металла Q и P. Следовательно метод определения ошибки может быть распространен и на подсчет Q и P; в последнем случае нужно только h заменить величинами q и p (линейными запасами руды и металла).

Тогда, когда нужно знать только ошибку аналогии без ошибки оконтуривания (например при подсчете запасов во внутреннем контуре), задача решается аналогично, с той только разницей, что табл. 4 должна быть составлена для функции

$$\frac{M(V')_{\text{пр}_1}}{V'_{\text{ист}}} = f(R),$$

где V' — объем залежи в пределах внутреннего контура. По данным разведки $V'_{\text{ист}}$ — тоже истинный объем.

[1] Знак + берется при $V_2 < V_1$, знак — при $V_2 > V_1$.

В заключение остановимся на вопросе предвычисления количества скважин, необходимых для разведки залежи с заранее заданной точностью.

Выше мы указывали на невозможность решения этого вопроса.

Сказанное подтверждают и данные табл. 4. В самом деле, зная ошибку для данной густоты скважин, мы не можем назвать ее величину при количестве скважин, например в 2 раза большем, так как не знаем, чему будет равен в последнем случае показатель разведанности R.

Сравнительная точность подсчета запасов различными способами

При подсчете запасов всегда неизбежно возникает вопрос, какой же из существующих методов подсчета является наиболее точным?

Почти все авторы, на работы которых делалась выше ссылка, решали этот вопрос путем сравнения результатов, получаемых при подсчете запасов различными методами по одним и тем же исходным данным. Такой путь исследования нельзя признать правильным.

Как было установлено выше, величина предельной ошибки, свойственная тому или иному методу подсчета, определяется разностью между результатами этого метода и результатами формулы $V = l^2 \sum h$ (или $Q = l^2 \sum q$, $P = l^2 \sum p$).

Так как указанная разность обусловливается не только методом подсчета, но и характером изменения мощности (или линейных запасов руды или металла), то сами собой напрашиваются следующие выводы.

1) Все наиболее употребительные способы, за исключением способа среднего арифметического [имеются в виду формулы (1), (2) и (3)], являются примерно равноточными, поскольку результаты подсчета указанными способами в большинстве случаев практически совпадают.

2) Вопрос же о том, который из этих, примерно равноточных способов является все же наиболее точным, не может быть решен заранее. Решение вопроса может быть выполнено в каждом конкретном случае применением формулы (53). При этом может оказаться, что тот способ, который в одном случае показал наиболее точный результат, во втором случае окажется менее точным.

Все будет зависеть от характера изменчивости основных показателей залежи.

Сравнительная точность подсчета объема и запасов руды или металла

Пользуясь показателем разведанности R, выражение для которого приводится на стр. 66, нетрудно установить следующее.

1) Если объемный вес руды и содержание полезного компонента постоянны, величины предельных ошибок объема запаса руды и запаса металла равны.

2) Если мощность залежи и содержание полезного компонента находятся в прямой зависимости (при постоянном объемном весе), предельная ошибка объема равна предельной ошибке запаса руды и меньше ошибки запаса металла.

3) Если мощность залежи и содержание полезного компонента находятся в обратной зависимости (при постоянном объемном весе), предельная ошибка объема равна предельной ошибке запаса руды и больше предельной ошибки запаса металла.

4) Если мощность залежи, объемный вес и содержание полезного компонента не связаны никакой зависимостью, предельные ошибки объема, запаса руды и металла могут находиться в самых различных соотношениях.

Интересно отметить, что с точки зрения теории математической статистики в случаях 3 и 4 ошибка определения запаса металла всегда больше ошибки определения объема.

Это еще раз подчеркивает несостоятельность указанной теории в данном вопросе и необоснованность применения ее при оценке ошибки подсчета запасов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. В. Орлова и А. А. Русинов. Новый метод определения степени разведанности. Разведка недр, № 4, 1935.
2. Н. Л. Николаев. Определение степени разведанности месторождений. Разведка недр, № 1, 1935.

3. Л. И. Шаманский. Математическая обработка разведочных материалов, ГОНТИ, 1936.
4. В. М. Крейтер. Основные принципы классификации и подсчета запасов полезных ископаемых. Изд-во АН СССР, 19 7.
5. Проф. А. М. Журавский. Аналитическое выражение геологической ошибки размера запасов месторождений. Известия ЦНИМБ. № 3, 1935 и № 5, 1936.
6. П. А. Рыжов. Математическое определение ошибки аналогий при подсчете запасов полезных ископаемых. Цветные металлы, № 5, 1940.

Zusammenfassung

In diesem Artikel werden die Fragen der Bestimmung der Fehler von Analogien bei der Berechnung des Rauminhaltes der Ablagerung oder der Gewichtsmenge der nutzbaren Mineralien nach den Ergebnissen von Bohren mit dem regelmässigen Netze von Bohrlöchern betrachtet. Der nach den Ergebnissen des Bohrens berechnete Rauminhalt der Ablagerung oder Gewichtsmenge des Erzes hängt von (der Bohrlöcherverteilung) dem Aufsuchungsnetze oder von dem Punkte des Anfangsbohrloches ab.

Hier sind die reale und Fehlergrenzanalogie zu unterscheiden. Der reale Fehler so wie auch der Rauminhalt hängen von dem Punkte des Anfangsbohrloches ab und darum sind sie keiner Auswertung unterworfen. Die Fehlergrenze aber hängt vom Ansatzpunkte des Anfangsbohrloches nicht ab, und wird sowohl nach der Veränderlichkeit des Lagerstättenzeigers bestimmt, als auch nach der Entfernung zwischen den Bohrlöchern. Dieser Ursache nach kann die Fehlergrenze nach den Ergebnissen der Bohrlöcher prinzipiel bewertet werden. Zu diesem Zwecke wird in diesem Artikel die Tabelle von Fehlergrenzauswertungen als Funktionen von Aufsuchungszeiger angeführt.

Der Aufsuchungsfehler wird dabei als Verhältnis des Veränderlichkeitsgrades und der relativen Dichtheit der Aufsuchungsbohrlöcher ausgedrückt.

Das Veränderlichkeitsgrad ihrerseits kann nach dem durchschnittlichen Werte der zweiten Differenzen der Lagerstättenzeiger und arithmerischen Mittel berechnet werden.

In dem Artikel wird auch eine neue Formel zur Berechnung von Ablagerungsmenge nach der Summe der in aparten Bohrlöchern gemessenen Zeiger angegeben. Die angeführte Formel hat einen kleinen Analogiefehler im Verhältniss mit den anderen Formeln und Berechnungsmethoden von Nutzbarmineralienmengen.

Mittels dieser Formel und der ausgeführten Methode der Fehlergrenzauswertung, ist es möglich nach den Ergebnissen des Aufsuchens unabhängig davon nach welcher Methode wurde der Rauminhalt der Ablagerung oder Mineralienmenge berechnet eine Fehlergrenze zu bestimmen.