*Записки Ленинградского ордена Ленина
и ордена Трудового Красного Знамени горного института
том XXXII, вып. 3. 1956 г.*

# УРАВНЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОДУКТОВ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ МОНОМИНЕРАЛЬНЫХ РУД

Доц. *Н. К. Белоглазов*

Уравнения характеристики крупности находят все более широкое применение при решении практических задач, связанных с опробованием и обогащением руд.

Из значительного числа предложенных математических выражений наибольшее распространение получили уравнение проф. С. Е. Андреева [1]

$$y = Ax^k \tag{1}$$

и экспоненциальное уравнение Розина-Раммлера [3]

$$z = e^{-Rx^m} \tag{2}$$

где $x$ — крупность частиц, которой соответствует весовой кумулятивный выход по плюсу, равный $z$, а по минусу — $y$ ($z$ и $y$ выражены в долях общего количества измельчаемого материала);

$e$ — основание натуральных логарифмов;

$A$, $R$, $k$ и $m$ — постоянные, определяемые из опыта.

Теоретически, постоянная

$$A = \frac{1}{M^k}$$

где $M$ — крупность максимальной частицы в продуктах измельчения.

Практически же численное значение $M$ в равенстве (1) всегда меньше значения этой величины, полученной опытом.

В уравнении (2) постоянная

$$R = \frac{1}{x_e^m},$$

где $x_e$ — крупность, которой соответствует кумулятивный выход материала по плюсу $z_{x_e} = 0{,}368$.

Уравнения (1) и (2) удобны для практических расчетов, но показывают хорошее совпадение с опытом лишь для мелких классов крупности продуктов измельчения. Уравнение С. Е. Андреева справедливо только при $y < 0{,}6$, а уравнение Розина-Раммлера при $y < 0{,}8$ (т. е. при $z > 0{,}2$). Когда же требуется оценить гранулометрический состав самых крупных фракций продукта, эти уравнения оказываются сравнительно мало пригодными.

Зависимость, предложенная Л. М. Черным [2], хотя и показывает хорошее совпадение с опытными данными, не может считаться окончательным решением вопроса, так как слишком неудобна для практических вычислений (имеет три, а не две, как в уравнениях (1) и (2), определяемые опытом постоянные и при расчетах требует применения специальных таблиц).

Уравнения (1) и (2) настолько просты и так хорошо совпадают с опытом для малых значений $x$, что представлялось естественным сделать попытку усовершенствовать их таким образом, чтобы область применения этих уравнений была расширена, а положительные их качества при этом сохранились. Ниже приводится возможное решение этой задачи.

Уравнение (1) в логарифмической форме имеет вид

$$\lg y = k \lg x + \lg A$$

или

$$\lg \frac{1}{y} = -k \lg x - \lg A. \tag{3}$$

По равенству (3) данные опыта, нанесенные в системе координат $\lg x$, $\lg \frac{1}{y}$, должны лежать на прямой, угол наклона которой к оси $\lg x$ будет численно равен постоянной $k$ уравнения (1). Это положение верно только для части опытных данных, относящихся к малым значениям $\lg x$. При больших значениях $\lg x$ прямая, проведенная через опытные точки, переходит в кривую, что указывает на непригодность функции (1) для описания характеристики значений аргумента $\lg x$ в этой области (рис. 1, кривая $I$). Задача сводится к подбору такой функции по аргументу $\lg x$, которая, не отличаясь существенно от функции $\lg \frac{1}{y}$ при малых значениях $x$, при больших имела бы численное значение, меньшее численного значения функции (3) и, таким образом, спрямляла бы криволинейный участок характеристики в логарифмических координатах. Для этого можно воспользоваться выражением

$$\lg v - \lg (v - p), \tag{4}$$

абсолютная величина которого при $v > p$ будет тем больше, чем меньше величина $v$.

Если принять, что $v = \frac{1}{y}$, то разность между $\lg \frac{1}{y}$ и $\lg \left( \frac{1}{y} - p \right)$ будет тем больше, чем больше величина $y$. Кривая функции $\lg \frac{1}{y}$ лежит выше кривой, представляющей $\lg \left( \frac{1}{y} - p \right)$, как функцию того же аргумента $\lg x$. Кривые сближаются в области малых значений $\lg x$ и тем больше отличаются друг от друга, чем больше величина $\lg x$ (рис. 1).

При соответствующим образом подобранном значении величины $p$, кривая функции $\lg \left( \frac{1}{y} - p \right)$ имеет прямолинейный участок, отвечающий более широкому диапазону значений $\lg x$, чем кривая функции $\lg \frac{1}{y}\cdot$ Кроме того, если график функции $\lg \left( \frac{1}{y} - p \right)$ также имеет криволинейный участок, то все же и в этом случае отклонение точек кривой от продолжения прямой, полученной для малых величин $\lg y$, менее значительно, чем аналогичное отклонение для функции $\lg \frac{1}{y}$

При некотором определенном значении $p$ спрямление характеристики получается наиболее полным. При анализе многочисленных лабораторных и производственных данных было установлено, что этому условию соответствует значение $p = 0{,}5$. Таким образом, усовершенствован-

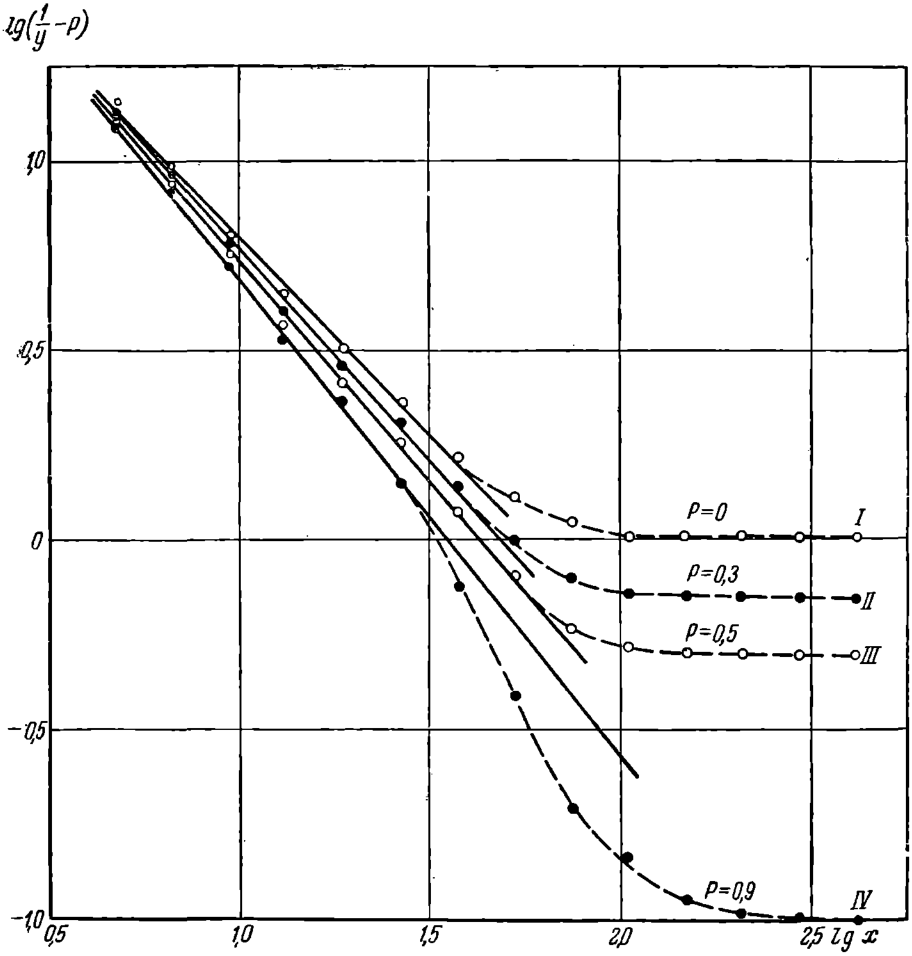


Рис. 1. Спрямление кривой характеристики в системе координат

$$\left[\lg\left(\frac{1}{y} - p\right),\quad \lg x\right]:$$

*I* — по уравнению С. А. Андреева, , *IV* — по уравнению

$$y = \frac{2b_1 x^{n_1}}{1 + b_1 x^{n_1}}$$

ное уравнение характеристики в логарифмической форме принимает следующий вид

$$\lg\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right) = -k \lg x - \lg A. \tag{5}$$

Его можно представить в форме

$$\lg\left(\frac{2}{y} - 1\right) = -k \lg x - \lg \frac{A}{2}$$

или, обозначив $\frac{A}{2} = b_1$ и $\kappa = n_1$, получим

$$\lg\left(\frac{2}{y} - 1\right) = -n_1 \lg x - \lg b_1,$$

откуда

$$y = \frac{2b_1 x^{n_1}}{1 + b_1 x^{n_1}} \tag{6}$$

Уравнение (6) позволяет с достаточной для практических целей степенью точности находить все значения $y \leqslant 0{,}9$, т. е. оно пригодно для более широкого диапазона значений $x$, чем уравнения (1) и (2), хотя имеет равное с ними число опытных постоянных и более простую форму, чем уравнение (2).

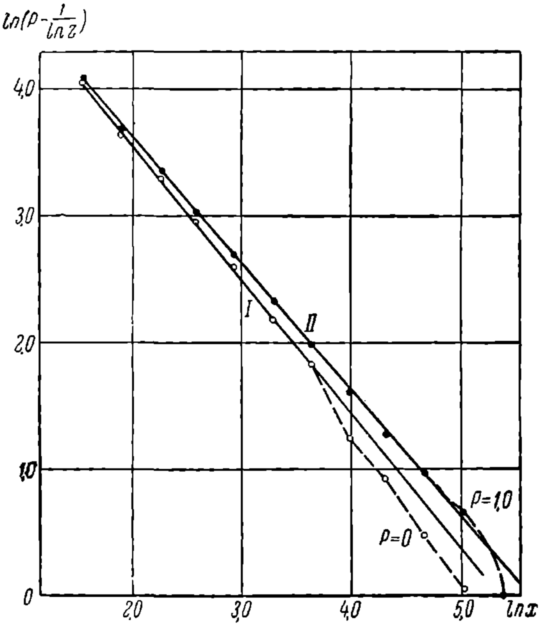


Рис. 2. Спрямление кривой характеристики в координатах $\left[\ln\left(p - \frac{1}{\ln z}\right),\ \ln x\right]$

*I* — по уравнению Розина—Раммлера; *II* — по уравнению

$$z = e^{-\frac{bx^n}{1 - bx^n}}$$

Физический смысл постоянной $b_1$ более прост и определенен, чем постоянной $R$ уравнения (2). Действительно, при $x = M$, $y = 1$.

$$b_1 = \frac{1}{M^{n_1}}.$$

Равенство (6) в отличие от равенства (2) удовлетворяет предельным условиям: по равенству (6) при $x = 0$, $y = 0$, а при $x = M$, $y = 1$. По уравнению же (2) при $x = M$, $z \neq 0$.

Тем же путем, каким из уравнения С. Е. Андреева удалось получить равенство (6), из уравнения Розина-Раммлера можно получить уравнение практически годное для расчетов при любых значениях $x$ (от 0 до $M$).

Уравнению (2) можно придать вид

$$\ln\left(-\frac{1}{\ln z}\right) = -m \ln x - \ln R. \tag{7}$$

Уравнение (7), так же как и уравнение (3), в соответствующих координатах ($\ln x$, $\ln\left(-\frac{1}{\ln z}\right)$ должно представлять прямую. Как видно из рис. 2 (кривая *I*), для определенных больших значений $\ln x$ спрямления фактически не происходит. Чтобы спрямить и эту кривую по описанному выше способу, нужно принять $v = -\frac{1}{\ln z}$ и брать значения $p$ с отрицательным знаком. Как показывает опыт, полное спрямление характеристики практически произойдет при $p = -1$. Следовательно, уравнение характеристики

$$\ln\left(-\frac{1}{\ln z} + 1\right) = -n \ln x - \ln b, \tag{8}$$

где $n = m$, а $b = R$.

После преобразований это равенство приводится к окончательному виду

$$z = e^{-\frac{bx^n}{1 - bx^n}}. \tag{9}$$

Область применимости уравнения (9) — от $x = 0$ до $x = M$.

Уравнение характеристики (9), конечно, сложнее уравнения (2), но оно удовлетворяет предельным условиям, которым равенство (2) не удовлетворяет, и постоянная $b$ в нем имеет более простой физический смысл, чем постоянная $R$, как следует из равенства (9), при $z = 0$ выражение $bx^n$ должно быть равно единице и $x = M$, тогда

$$b = \frac{1}{M^n}.$$

В таблице и на рис. 3 сопоставлены значения $y$, рассчитанные по уравнениям (1), (2), (6) и (9) и определенные опытом. Пример, на котором сопоставляются значения $y$, выбран случайно (заимствован В. В. Зверевича). Вместо него можно было бы взять любую другую характеристику продуктов измельчения мономинеральной руды. В рассматриваемом случае постоянные, входящие в уравнения характеристики, имели следующие значения:

$$A = 0{,}0269; \quad R = 0{,}0195; \quad b_1 = 0{,}01012; \quad b = 0{,}00424;$$
$$k = 0{,}85; \quad n_1 = 1{,}025; \quad m = 1{,}05; \quad n = 0{,}966.$$

Таблица

| $x$ μ | Фактическое значение $y$ % | Расчетные значения $y$ (%), высчитанные по уравнениям: | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | С. Е. Андреева (1) | Розина-Раммлера (2) | уравнению (6) | уравнению (9) |
| 208,00 | 100,00 | (248,00) | 99,45 | (141,00) | 100,00 |
| 147,00 | 99,39 | (185,00) | 96,76 | (125,00) | 99,73 |
| 104,00 | 96,17 | (137,00) | 91,88 | (107,40) | 95,95 |
| 74,00 | 88,06 | (102,10) | 82,50 | 89,80 | 86,35 |
| 52,00 | 73,00 | 76,60 | 70,50 | 72,80 | 72,15 |
| 37,00 | 57,56 | 57,71 | 57,50 | 57,40 | 57,65 |
| 26,00 | 43,38 | 42,70 | 44,50 | 43,90 | 44,40 |
| 18,50 | 32,58 | 31,70 | 33,50 | 33,00 | 33,55 |
| 13,00 | 24,11 | 23,60 | 24,90 | 24,54 | 25,00 |
| 9,25 | 17,79 | 17,57 | 18,25 | 17,64 | 19,30 |
| 6,50 | 12,83 | 13,15 | 13,00 | 12,82 | 13,25 |
| 4,62 | 9,29 | 8,71 | 8,00 | 9,16 | 9,60 |
| 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |

Приведенный пример наглядно иллюстрирует высказанные положения. Если надо охарактеризовать гранулометрический состав только самых тонких фракций продукта, т. е. при $y < 0{,}6$, то удобнее пользоваться уравнением С. Е. Андреева. Для оценки распределения частиц также и по более крупным фракциям, т. е. когда надо найти значения $y > 0{,}6$, но при $y < 0{,}9$ следует применять уравнение (6), более простое, чем уравнение Розина-Раммлера. Когда необходимо получить точный анализ так-

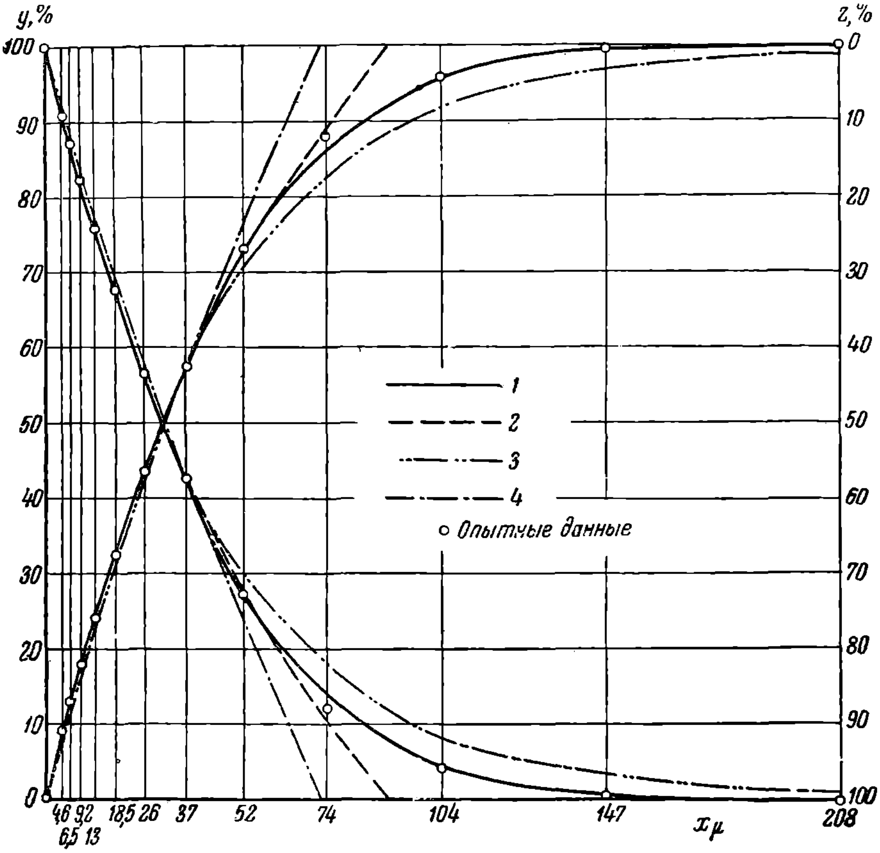


Рис. 3. Сравнение уравнений характеристики крупности продуктов измельчения:

$$1\quad z = 100\, e^{-\frac{bx^n}{1 - bx^n}} \qquad 2 - y = 100\,\frac{2b_1x^{n_1}}{1 + b_2x^{n_1}}; \qquad 3 - \quad 100\, e^{-Rx^m}$$

$$4 - y = 100\, Ax^k$$

же и самых крупных фракций продукта, следует пользоваться уравнением (9). Уравнение (9) не уступает по точности уравнению Л. М. Черного, но имеет меньшее число определяемых из опыта постоянных и более удобно для практических расчетов.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Андреев С. Е. Значение среднего диаметра, определяемого по способу Когхилла. Горный журнал, 1939, № 6.
2. Черный Л. М. Закономерности гранулометрического состава продуктов дробления и измельчения. Обогащение руд горно-химического сырья. Госхимиздат, 1950, вып. 1.
3. Rosin P., Rammler E. Journ. of Fuel Inst., 1933, № 31, S. 29.


---