*Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института, том XXIX, вып. 3, 1954 г.*

# ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОЙ ЛИНИИ ПОЛУЖЕСТКОЙ МУФТЫ

*Доц. Л. С. Бурштейн*

Повышение эластичности соединительной муфты обычно достигается путем устройства одной или нескольких гофр. Схематическое изображение такой гофры в деформированном и недеформированном состояниях представлено на рис. 1. Основной величиной, определяющей эластичность муфты при изгибе, является угол поворота $\alpha$. Он зависит от величины изгибающего момента $M_{из}$, размеров и материала

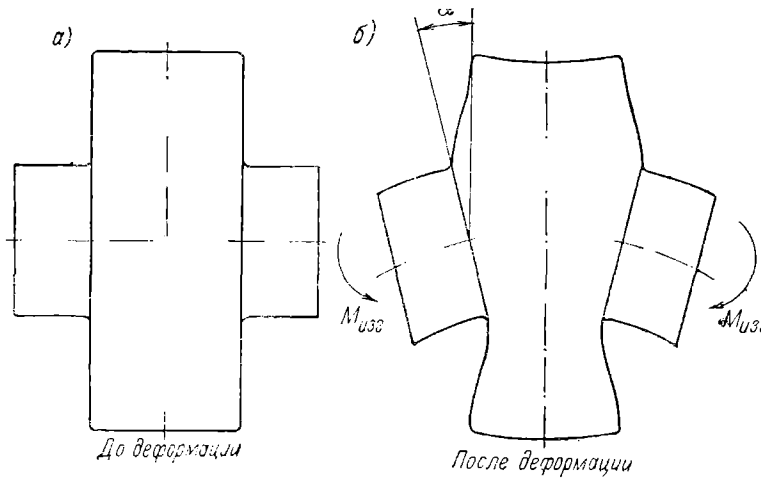



Рис. 1

гофры. Для определения величины $\alpha$ существуют различные теоретические и экспериментальные методы, на которых мы останавливаться не будем — примем угол $\alpha$, как и размеры муфты, заданными. Задача заключается в том, чтобы выяснить влияние гофры на перемещения всей муфты и отдельных ее элементов. Эти перемещения зависят не только от характеристики гофры, но в большой степени — от положения, занимаемого гофрой на муфте, и размеров самой муфты.

На рис. 2 дано схематическое изображение полужесткой муфты с одной гофрой, расположенной несимметрично относительно концевых сечений муфты. Муфта подвергается чистому изгибу двумя моментами, приложенными к ее концам. Оба конца муфты шарнирно оперты. Одна из опор неподвижна, другая подвижная. Вначале выяс-

ним вопрос о перемещениях, вызванных углом поворота торцевой стенки гофры, а затем найдем перемещения, вызванные деформацией цилиндрического стержня муфты.

Для определения перемещений муфты, обусловленных только деформацией гофры, будем считать оси цилиндрических отрезков муфты по обе стороны гофры прямолинейными, как до, так и после деформации гофры. В результате деформации торцевых стенок гофры левый конец муфты (рис. 2, точка $A$) перемещается вправо по горизонтали на величину $x_0$. При этом ось гофры поворачивается на угол $\varphi_г$ и сама гофра поднимается на величину $v$. Концевые сечения муфты — правое и левое — поворачиваются соответственно на углы $\varphi_п$ и $\varphi_л$.

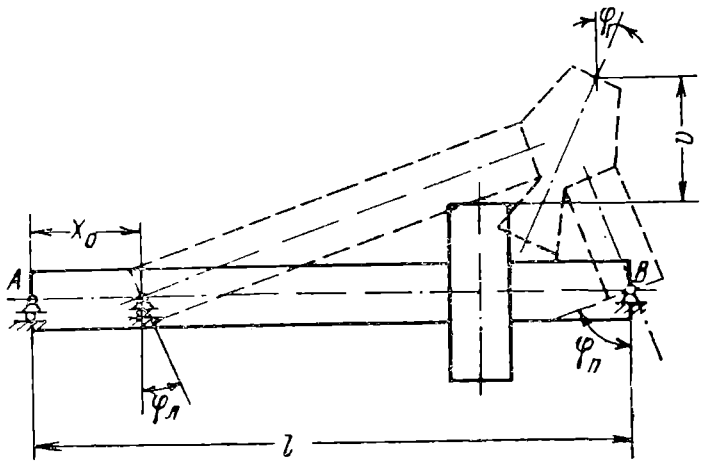



Рис. 2

Для определения перемещений $x_0$, $\varphi_г$, $\varphi_л$ и $\varphi_п$ (рис. 2) представим, что обе концевые опоры не препятствуют повороту цилиндрических отрезков муфты на угол $\alpha$. В этом случае отрезки (плечи) муфты займут положение, указанное на рис. 3. Чтобы перевести муфту из этого положения в положение, обозначенное пунктиром на рис. 2, ее необходимо (рис. 3): 1) переместить в вертикальном направлении на величину $y_п$; 2) переместить вправо в горизонтальном направлении на величину $x_п$; 3) повернуть вокруг точки $B$ на угол $\varphi_г$.

Определим величины $x_0$, $v$, $\varphi_л$ и $\varphi_п$, считая положение муфты, указанное пунктиром на рис. 2, единственно возможным.

1. Угол поворота гофры. На основании рис. 3 определим величину угла поворота гофры $\varphi_г$ из треугольника $A_3$, $A_5$, $B$:

$$\operatorname{tg}\varphi_г = \frac{A_3A_5}{A_5B}$$

Учитывая, что

$$A_3A_5 = y_л - y_п$$

и

$$A_5B = AB - AA_5 = l - (x_л + x_п),$$

получим

$$\operatorname{tg}\varphi_г = \frac{y_л - y_п}{l - (x_л + x_п)}. \qquad (1)$$

Так как

$$y_л = (l - d - x)\sin\alpha, \quad y_п = x\sin\alpha,$$
$$x_л = (l - d - x)(1 - \cos\alpha), \quad x_п = x(1 - \cos\alpha),$$

то, подставляя эти значения в уравнение (1), получим окончательно

$$\operatorname{tg}\varphi_г = \frac{(l - d - 2x)\sin\alpha}{(l - d)\cos\alpha + d}. \qquad (1')$$

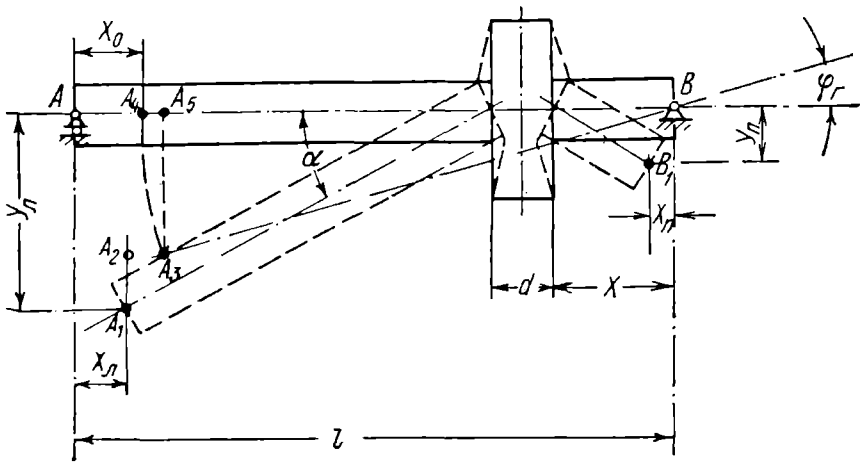



Рис. 3

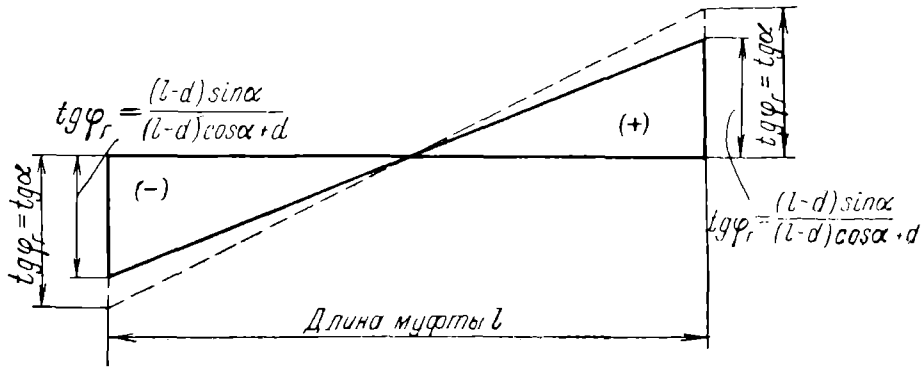



Рис. 4

При крайне правом положении гофры, т. е. при $x = 0$,

$$\operatorname{tg}\varphi_г = \frac{(l - d)\sin\alpha}{(l - d)\cos\alpha + d}. \qquad (1'')$$

Для предельного случая $d = 0$

$$\operatorname{tg}\varphi_г = \operatorname{tg}\alpha.$$

При симметричном положении гофры, т. е. при $x = \frac{l - d}{2}$

$$\operatorname{tg}\varphi_г = 0.$$

Пользуясь формулой (1'), построим график изменения $\varphi_г$ в зависимости от величины $x$ (рис. 4). Пунктирной линией на рис. 4 показаны предельные значения $\varphi_г$ при $d = 0$.

2. Горизонтальное перемещение подвижного конца муфты. Горизонтальное перемещение левого конца муфты $x_0$ определяется следующим образом.

Из рис. 3

$$x_0 = AA_4 = AB - A_4B = AB - A_2B$$

или

$$x_0 = AB - \frac{A_5B}{\cos\varphi_г}.$$

Учитывая, что

$$A_5B = l - (x_л + x_п) = (l - d)\cos\alpha + d \quad \text{и} \quad AB = l,$$

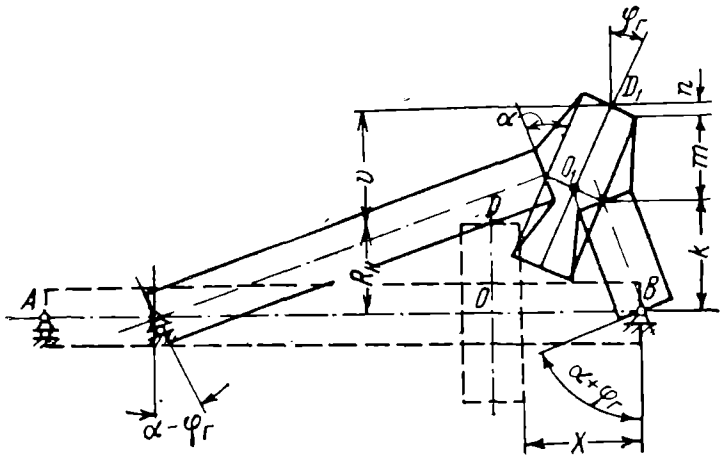



Рис. 5

получим

$$x_0 = \frac{l(\cos\varphi_г - \cos\alpha) - d(1 - \cos\alpha)}{\cos\varphi_г}. \qquad (2)$$

При симметричном расположении гофры, т. е. при $x = \frac{l-d}{2}$ и $\varphi_г = 0$

$$x_0 = (l - d)(1 - \cos\alpha).$$

3. Перемещение гофры в вертикальном направлении. На основании рис. 5

$$v = k + m + n - R_н,$$

где $k = x\sin(\alpha + \varphi_г)$;

$$m = R_н\cos\varphi_г;$$

$$n = \frac{d}{2}\sin\varphi_г.$$

Откуда

$$v = x\sin(\alpha + \varphi_г) + R_н\cos\varphi_г + \frac{d}{2}\sin\varphi_г - R_н,$$

или окончательно

$$v = x\sin(\alpha + \varphi_г) + \frac{d}{2}\sin\varphi_г - R_н(1 - \cos\varphi_г), \qquad (3)$$

где $R_н$ — наружный радиус гофры.

Пользуясь формулой (3), построим график изменения $v$ в зависимости от величины $x$ (рис. 6). При $x=0$, т. е. когда гофра занимает крайне правое положение,

$$v_{x=0}=\frac{d}{2}\sin\varphi_г - R_н(1-\cos\varphi_г).$$

Для предельного случая $d=0$

$$v_{d=0}=-R_н(1-\cos\varphi_г).$$

При $x=\frac{l-d}{2}$, т. е. когда гофра занимает среднее положение,

$$v_{x=\frac{l-d}{2}}=\frac{l-d}{2}\sin\alpha,$$

так как при этом $\varphi_г=0$.

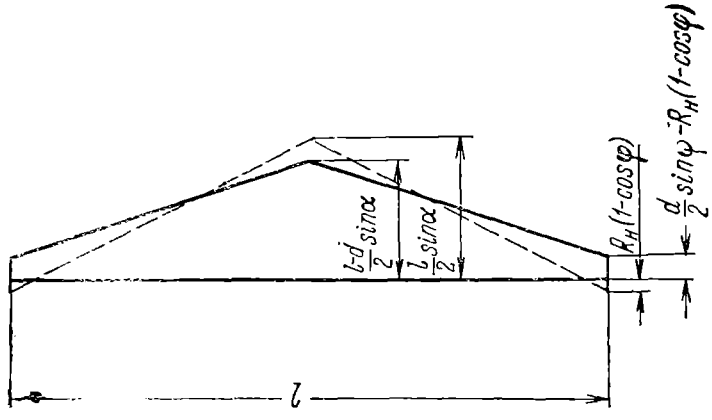



Рис. 6

На рис. 6 сплошными линиями показаны значения $v$, вычисленные по формуле (3), пунктиром — значения, вычисленные для предельного случая $d=0$.

Вертикальное перемещение центра гофры

$$v_0=k+n=x\sin(\alpha+\varphi_г)+\frac{d}{2}\sin\varphi_г. \qquad (4)$$

4. Углы поворота концевых сечений муфты. При несимметричном расположении гофры (рис. 5) углы поворота правого и левого концевых сечений равны

$$\varphi_л=\alpha-\varphi_г,\quad \varphi_п=\alpha+\varphi_г, \qquad (5)$$

так как при совмещении концов муфты с опорами левое плечо поворачивается на величину $\varphi_г$, в сторону, противоположную повороту, вызванному деформацией самой гофры. Правое же плечо, наоборот, получает дополнительный поворот на величину $\varphi_г$ в том же направлении, в каком оно повернулось под влиянием деформации гофры.

Если гофра расположена слева от середины муфты, то углы поворота правого и левого концевых сечений будут равны

$$\varphi_л=\alpha+\varphi_г,\quad \varphi_п=\alpha-\varphi_г.$$

В обоих случаях сумма углов поворота обоих концевых сечений есть величина постоянная, равная

$$\varphi_л + \varphi_п = 2\alpha = \text{конст.}$$

В среднем положении при $x = \frac{l-d}{2}$

$$\varphi_л = \varphi_п = \alpha.$$

### Влияние искривления стержня на перемещения в муфте

Приведенные выше формулы выведены в предположении, что оси цилиндрических отрезков при изгибе остаются прямолинейными. В действительности же они искривляются, оказывая влияние на перемещения в муфте. На рис. 7 схематически показано положение муфты без учета влияния искривления стержней (пунктирные линии) и с учетом этого влияния (сплошные линии). Вместо отрезков стержней изображены только их оси. Для определения перемещений примем тот же метод, что и для недеформированного стержня, т. е. путем последовательных перемещений всей муфты совместим оба ее конца с опорами на недеформированной оси. Все перемещения обозначены теми же буквами, какие применялись для муфты с недеформированным стержнем, но с индексом „1".

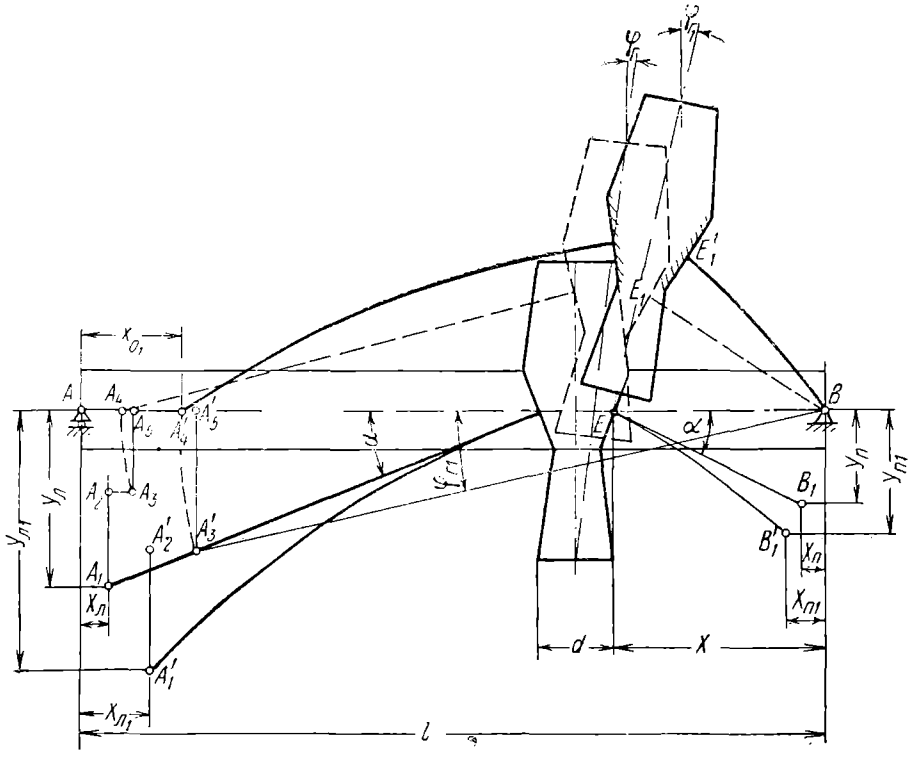



Рис. 7

Перемещение деформированной муфты производим в следующей последовательности: 1) вертикально вверх на величину $y_{п_1}$; 2) горизон-

тально вправо на величину $x_{п_1}$; 3) поворот гофры вокруг точки $B$ на величину $\varphi_{г_1}$. Схема деформации оси стержня приведена на рис. 8. Прогибы концов правой и левой частей стержня в направлениях, перпендикулярных их осям, обозначены соответственно через $f_л$ и $f_п$.

Согласно рис. 8,

$$x_{л_1} = x_л + f_л \sin\alpha,$$
$$x_{п_1} = x_п + f_п \sin\alpha,$$
$$y_{л_1} = y_л + f_л \cos\alpha,$$
$$y_{п_1} = y_п + f_п \cos\alpha.$$

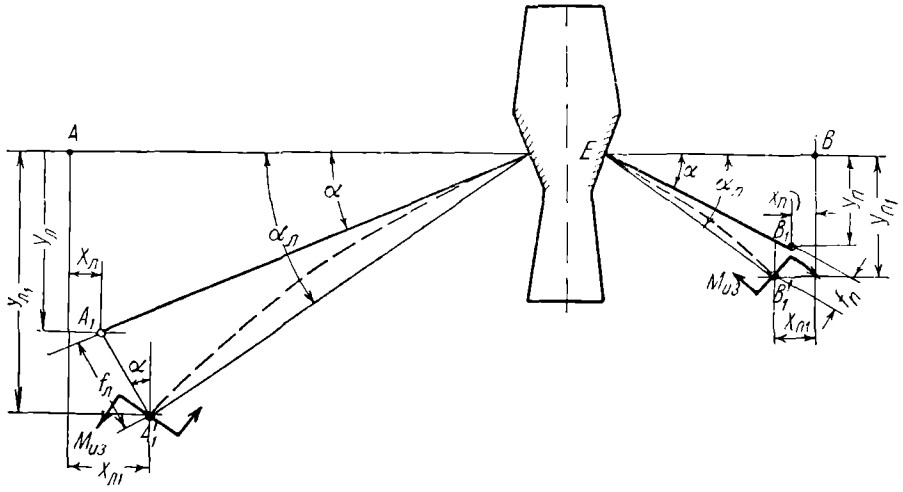



Рис. 8

Вычислим все перемещения с учетом указанных прогибов.

1. Угол поворота гофры. При совмещении центров концевых сечений деформированной муфты с недеформированной осью $AB$ (рис. 7) левый конец муфты $A$ занимает последовательно положения $A_1' - A_2' - A_3' - A_4'$. Угол поворота муфты вокруг точки $B$, а следовательно, и угол поворота оси гофры

$$\operatorname{tg}\varphi_г = \frac{A_3'A_5'}{A_5'B}$$

Учитывая, что

$$A_3'A_5' = y_{л_1} - y_{п_1}$$

и

$$A_5'B = l - (x_{л_1} + x_{п_1}),$$

получим

$$\operatorname{tg}\varphi_г = \frac{y_{л_1} - y_{п_1}}{l - (x_{л_1} + x_{п_1})} = \frac{(y_л - y_п) + (f_л - f_п)\cos\alpha}{l - (x_л + x_п) - (f_л + f_п)\sin\alpha}. \qquad (6)$$

Выражения для прогибов имеют вид:

$$f_л = \frac{M_{из}(l - d - x)^2}{2EJ} = \frac{32M_{из}(l - d - x)^2}{E\pi D^4(1 - k^4)}, \qquad (7)$$

$$f_п = \frac{M_{из}x^2}{2EJ} = \frac{32M_{из}x^2}{E\pi D^4(1 - k^4)}, \qquad (7')$$

где $E$ — модуль нормальной упругости;

$J$ — момент инерции кольцевого сечения стержня

$$J=\frac{\pi D^4}{64}(1-k^4);$$

$D$ — наружный диаметр стержня муфты;

$k=\frac{D_1}{D}$ — отношение внутреннего диаметра стержня к наружному.

Подставляя соответствующие значения в уравнение (6), получим

$$\operatorname{tg}\varphi_{r_1}=\frac{(l-d-2x)\sin\alpha+\frac{32M_{из}[(l-x-d)^2-x^2]\cos\alpha}{E\pi D^4(1-k^4)}}{(l-d)\cos\alpha-\frac{32M_{из}[(l-x-d)^2+x^2]\sin\alpha}{E\pi D^4(1-k^4)}}.$$

2. Горизонтальное перемещение левого конца муфты $x_0$ определяется следующим образом. На основании рис. 7

$$x_{0_1}=AA_4'=AB-A_4'B=AB-A_3'B.$$

Но

$$A_3'B=\frac{A_5'B}{\cos\varphi_{r_1}}=\frac{l-(x_{п_1}+x_{л_1})}{\cos\varphi_{r_1}}$$

или

$$A_3'B=\frac{l-(x_л+x_п)-(f_л+f_п)\sin\alpha}{\cos\varphi_{r_1}},$$

откуда

$$x_{0_1}=\frac{l\cos\varphi_{r_1}-l+(x_л+x_п)+(f_л+f_п)\sin\alpha}{\cos\varphi_{r_1}}.$$

Подставляя вместо $x_л$, $x_п$, $f_л$ и $f_п$ их значения, получим

$$x_{0_1}=\frac{l(\cos\varphi_{r_1}-\cos\alpha)-d(1-\cos\alpha)+\frac{32M_{из}[(l-x-d)^2+x^2]\sin\alpha}{E\pi D^4(1-k^4)}}{\cos\varphi_{r_1}} \qquad (8)$$

3. Перемещения гофры в вертикальном направлении. Если принять длину хорды $BE_1'$ (рис. 7) равной первоначальной длине оси правой части стержня $B_1E=x$, то для определения перемещения гофры в вертикальном направлении можно воспользоваться формулой (3), заменив в ней углы $\varphi_r$ на $\varphi_{r_1}$ и угол $\alpha$ на $\alpha_п$, где $\alpha_п$ — угол между хордой $B_1'E$ и горизонталью (рис. 8)

$$\alpha_п=\alpha+\frac{f_п}{x}$$

Согласно рис. 9,

$$v_1=k_1+m_1+n_1-R_н$$

или

$$v_1=x\sin(\alpha_п+\varphi_{r_1})+\frac{d}{2}\sin\varphi_{r_1}-R_н(1-\cos\varphi_{r_1}). \qquad (9)$$

Для вертикального перемещения центра гофры аналогично

$$v_{0_1}=k_1+n_1$$

или

$$v_{0_1}=x\sin(\alpha_п+\varphi_{r_1})+\frac{d}{2}\sin\varphi_{r_1}. \qquad (9')$$

4. Углы поворота концевых сечений муфты. Углы поворота концевых сечений муфты, согласно рис. 7, определяются из следующих соображений. Хорда $BE_1'$ образует с горизонталью угол $\alpha_п + \varphi_г$. Угол поворота концевого сечения муфты больше указанного угла на величину угла поворота $\theta_п$ в точке $B$, обусловленного изгибом стержня. Отсюда

$$\varphi_п = \alpha_п + \varphi_{г_1} + \theta_п, \tag{10}$$

где $\alpha_п = \alpha + \theta_п$ и $\theta_п = \frac{f_п}{x}$,

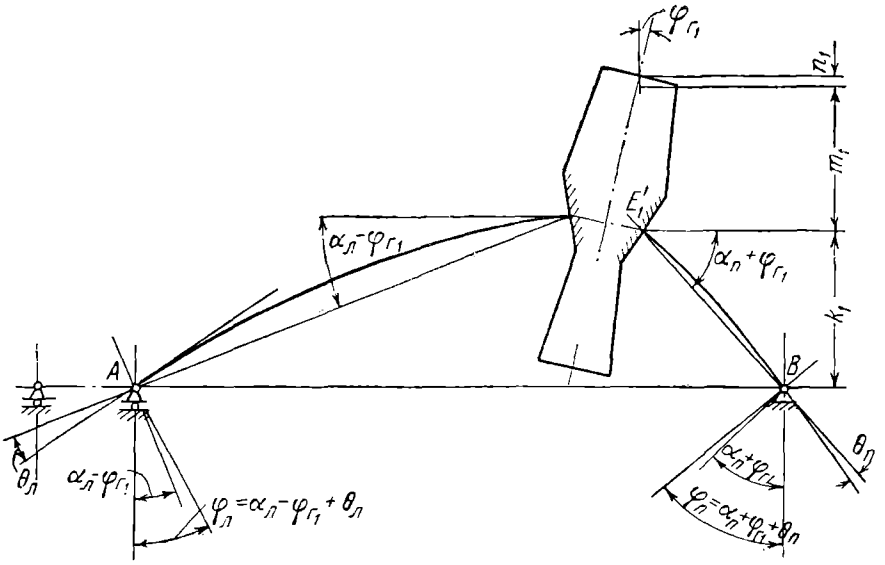



Рис. 9

или

$$\varphi_п = \alpha + \varphi_{г_1} + \frac{2f_п}{x} \tag{10'}$$

Соответственно для левого концевого сечения получим

$$\varphi_л = \alpha_л - \varphi_{г_1} + \theta_л, \tag{11}$$

где $$\alpha_л = \alpha + \theta_л \text{ и } \theta_л = \frac{f_л}{l - d - x},$$

или

$$\varphi_л = \alpha - \varphi_{г_1} + \frac{2f_л}{l - d - x}. \tag{11'}$$

Если гофра расположена слева от середины муфты, то

$$\varphi_п = \alpha - \varphi_{г_1} + \frac{2f_п}{x}$$

и

$$\varphi_л = \alpha + \varphi_{г_1} + \frac{2f_л}{l - d - x},$$

где

$$f_{\text{п}} = \frac{32M_{\text{из}}\,x^2}{E\pi D^4(1-k^4)};$$

$$f_{\text{л}} = \frac{32M_{\text{из}}\,(l-d-x)^2}{E\pi D^4(1-k^4)}$$

В обоих случаях сумма углов поворота обоих концевых сечений

$$\varphi_{\text{л}} + \varphi_{\text{п}} = 2\alpha + \frac{2f_{\text{п}}}{x} + \frac{2f_{\text{л}}}{l-d-x}.$$

Подставляя вместо $f_{\text{п}}$ и $f_{\text{л}}$ их значения, получим

$$\varphi_{\text{л}} + \varphi_{\text{п}} = 2\alpha + \frac{64M_{\text{из}}\,(l-d)}{E\pi D^4(1-k^4)} = \text{конст.}$$

Таким образом, сумма углов поворота концевых сечений остается постоянной для любого положения гофры также и в том случае, когда учитывается влияние деформации стержня на перемещение муфты.

В крайне правом положении гофры при $x=0$ и $f_{\text{п}}=0$

$$\varphi_{\text{п}} = \alpha + \varphi_{\text{г}_1} \text{ и } \varphi_{\text{л}} = \alpha - \varphi_{\text{г}_1} + \frac{2f_{\text{л}}}{l-d},$$

где $\varphi_{\text{г}_1}$ определяется из уравнения

$$\operatorname{tg}\varphi_{\text{г}_1} = \frac{(l-d)\sin\alpha + \dfrac{32M_{\text{из}}\,(l-d)^2\cos\alpha}{E\pi D^4(1-k^4)}}{(l-d)\cos\alpha + d - \dfrac{32M_{\text{из}}\,(l-d)^2\sin\alpha}{E\pi D^4(1-k^4)}}$$

В крайне левом положении гофры при $x=l-d$ и $f_{\text{л}}=0$

$$\varphi_{\text{п}} = \alpha - \varphi_{\text{г}_1} + \frac{2f_{\text{п}}}{l-d} \text{ и } \varphi_{\text{л}} = \alpha + \varphi_{\text{г}_1}.$$

Поступило
9 IX 1952 г.