Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института, том XXIX, вып. 3, 1954 г.

К РАСЧЕТУ НА ПРОЧНОСТЬ ПО ПРЕДЕЛЬНЫМ НАГРУЗКАМ ПРИ ИЗГИБЕ

Доц. И. И. Тарасенко

Экспериментальными исследованиями установлено, что при пластическом изгибе стержня в области малых пластических деформаций не происходит искривления плоскостей поперечных сечений, имеющих две оси симметрии. Это справедливо для материалов одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию и материалов, не одинаково работающих на растяжение и сжатие.

Основываясь на гипотезе плоских сечений, Надаи .[1] установил следующую зависимость между нормальными напряжениями и изгибающими моментами для случая чистого изгиба стержня прямоугольного сечения

$$\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}=\frac{1}{8S}\left(\theta\frac{dM}{d\theta}+2M\right), \tag{1}$$

где σ_1, σ_2 — напряжения в наиболее удаленных от нейтральной оси волокнах;

S — статический момент половины площади сечения;

θ — угол поворота сечения.

При одинаковом сопротивлении растяжению и сжатию $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$

$$\sigma=\frac{1}{4S}\left(\theta\frac{dM}{d\theta}+2M\right). \tag{2}$$

Величина $\frac{dM}{d\theta}$ определяется по опытной кривой методом графического дифференцирования. Вычисляя напряжения по соотношению (2) и относительные удлинения по формуле

$$\varepsilon=\frac{h\theta}{l} \tag{3}$$

(h — высота сечения, l — расстояние между двумя смежными сечениями), можно построить диаграмму $\sigma=\sigma(\varepsilon)$ и, сравнивая её с аналогичной кривой простого растяжения, установить влияние неоднородности напряженного состояния при изгибе на сопротивление деформированию материала (например, сравнить пределы текучести при изгибе и растяжении).

Опыты показывают, что в области больших деформаций и разрушения кривые $\sigma=\sigma(\varepsilon)$ при растяжении и изгибе сильно расходятся. Объясняется это тем, что входящая в формулу (2) величина $\frac{dM}{d\theta}$, характеризующая упрочнение материала, отражает упрочнение весьма

не точно. Перед разрушением изгибающий момент почти не возрастает и $\frac{dM}{d\theta}$ близко или равно нулю, т. е. по формуле (2) перед разрушением материал деформируется без упрочнения

$$M = M_{\text{макс}}, \quad \frac{dM}{d\theta} = 0,$$

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{M_{\text{макс}}}{2S}, \quad M_{\text{макс}} = 2S\sigma_{\text{макс}}. \tag{4}$$

Уравнение (4) соответствует эпюре распределения напряжений по поперечному сечению в виде двух равновеликих прямоугольников (рис. 1) без упрочнения по высоте сечения. В действительности же упрочнение материала имеет место, что хорошо обнаруживается измерением твердости (2) по поперечному сечению разрезанного стержня после его разрушения от изгиба. Твердость в центре сечения близка к исходной, при удалении от него возрастает и в наиболее удаленных частях сечения значительно превышает исходную (до опыта). Необходимо отметить, что даже для металлов, имеющих большую площадку текучести при растяжении, эпюра распределения напряжений при изгибе в форме двух прямоугольников никогда не может быть осуществлена вследствие разности в степени деформирования наружных и внутренних волокон.

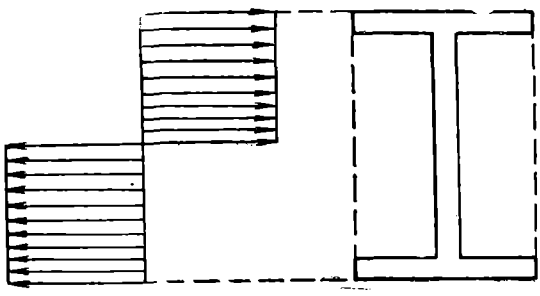


Рис. 1

Исследование напряженного состояния на площадке текучести при растяжении показывает, что с увеличением деформации напряжение возрастает, хотя нагрузка и остается постоянной. При изгибе происходит подобное же явление. Следовательно, расчеты предельных изгибающих моментов по формуле (4) являются условными. Проверить опытным путем величину предельного изгибающего момента, рассчитываемого по формуле

$$M_{\text{т}} = 2S\sigma_{\text{т}}, \tag{5}$$

рекомендуемой учебной литературой [3] невозможно, что является серьезным недостатком указанного метода расчета по предельным нагрузкам.

Вследствие известных трудностей расчета в пластической области по напряжениям представляется естественным при решении задачи пойти по пути отыскания не напряжений, а усилий, т. е. теоретического расчета грузоподъемности стержня в той или иной области пластического деформирования, но с учетом возможности экспериментальной проверки расчетных значений предельных нагрузок. Ниже делается попытка приближенного расчета изгибающего момента на всем протяжении пластического изгиба вплоть до момента разрушения для стержня с двумя осями симметрии в сечении на основании исследованной ранее (1951) кривой пластического растяжения.

Экспериментальные исследования М. П. Марковца [2] показали, что гипотезу плоских сечений можно считать справедливой не только

при малых, но и при больших пластических деформациях. На боковую поверхность прямоугольного стержня (из дюралюмина) до испытания наносилась квадратная сетка. После испытания до разрушения стержня, работающего по схеме балки, свободно лежащей на двух опорах с сосредоточенной силой по середине, несмотря на наличие перерезывающей силы в поперечном сечении, прямые риски, нанесенные до испытания перпендикулярно к оси, практически не искривляются и лишь поворачиваются вокруг нейтральной оси, сохраняя прямолинейность. Вследствие одновременного растяжения и сжатия площадь поперечного сечения стержня при изгибе остается неизменной. Благодаря смещению нейтрального слоя в сторону сжатых воло-

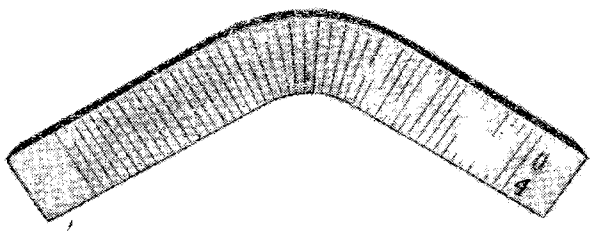


Рис. 2

кон, площади растянутой и сжатой частей сечения практически равны и неизменны.

Произведеные М. П. Марковцем вычисления смещения нейтрального слоя с центра тяжести сечения, исходя из условия равновесия внутренних сил в растянутой и сжатой зонах, показывают, что это смещение относительно мало вследствие изменения высоты сечения.

Наши эксперименты и вычисления полностью подтвердили правильность выводов Марковца о применимости гипотезы плоских сечений (рис. 2) при больших пластических деформациях изгиба.

Изложенное позволяет для приближенного расчета изгибающего момента во всех стадиях пластической деформации принять следующие основные допущения: 1) плоскости поперечных сечений не депланируют; 2) смещением нейтральной оси с центра тяжести сечения можно пренебречь. Исходя из допущенного, относительное удлинение волокна на расстоянии y от нейтральной оси выразится соотношением

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \tag{6}$$

При этом, если расчет производить по начальному сечению, то ошибка по сравнению с вычислениями по конечному сечению, с учетом смещения нейтральной оси, получается ничтожной ($1 \div 2\%$).

Рассмотрим чистый изгиб стержня двояко-симметричного сечения силами, действующими в одной из продольных плоскостей симметрии.

Изгибающий момент при одинаковых диаграммах пластического растяжения и сжатия равен

$$M = \int \sigma y dF = \frac{4S}{\varepsilon_1^2} \int_0^{\varepsilon_1} \sigma \varepsilon d\varepsilon = \frac{4S}{\varepsilon_1^2} C(\varepsilon_1), \tag{7}$$

где ε_1 — деформация наиболее удаленных от нейтральной оси волокон;

C — статический момент половины площади, ограниченной кривой эпюры (рис. 3) распределения напряжений по сечению стержня

$$C = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma \varepsilon d\varepsilon. \tag{8}$$

За эпюру напряжений в сечении примем кривую пластического растяжения. Экспериментальная диаграмма растяжения материала апроксимируется тремя уравнениями — соответственно трем участкам деформирования образца (3).

1. От начала деформирования до предела текучести ($0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_т$)

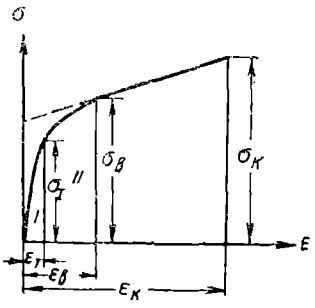


Рис. 3

$$\sigma = E_0\varepsilon - A\varepsilon^3,$$

$$A = \frac{E_0\varepsilon_т - \sigma_т}{\varepsilon_т^3}. \tag{9}$$

2. От предела текучести до конца равномерной деформации ($\varepsilon_т \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_в$)

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \sigma_т + B(\varepsilon - \varepsilon_т)^n, \\ B &= \frac{\sigma_в - \sigma_т}{(\varepsilon_в - \varepsilon_т)^n}, \\ n &= \frac{\sigma_в \varepsilon_в}{\sigma_в - \sigma_т}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

3. На участке локального деформирования в шейке ($\varepsilon_в \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_к$)

$$\sigma = \sigma_в [1 + (\varepsilon - \varepsilon_в)]. \tag{11}$$

Общее выражение для изгибающего момента в области малых упругопластических деформаций ($0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_т$) имеем в форме

$$M_1 = \frac{4S}{\varepsilon_1^2} C_1(\varepsilon_1). \tag{12}$$

Статический момент эпюры напряжений в сечении стержня получим в результате интегрирования (8) при учете (9)

$$C_1 = \left(\frac{E_0}{3} - \frac{A}{5}\varepsilon_1^2\right)\varepsilon_1^3. \tag{13}$$

Предельный момент, отвечающий пределу текучести при осевом растяжении $\sigma_т$ ($\varepsilon = \varepsilon_т$),

$$M_т = \frac{4S}{\varepsilon_т^2} C_1, \tag{14}$$

$$C_1 = \left(\frac{2}{3}E_0\varepsilon_т + \sigma_т\right)\frac{\varepsilon_т^2}{5}, \tag{15}$$

$$M_т = \frac{4}{5}S\left(\frac{2}{3}E_0\varepsilon_т + \sigma_т\right). \tag{16}$$

Изгибающий момент во второй области деформирования ($\varepsilon_т \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_в$)

$$M_2 = \frac{4S}{\varepsilon_1^2}[C_1 + C_2(\varepsilon_1)]. \tag{17}$$

Величина C_2 определяется путем интегрирования (8) при учете (10)

$$C_2 = \int_{\varepsilon_т}^{\varepsilon_1} [\sigma_т + B(\varepsilon - \varepsilon_т)^n]\,\varepsilon d\varepsilon = \frac{\sigma_т}{2}(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_т^2) + B\int_{\varepsilon_т}^{\varepsilon_1} (\varepsilon - \varepsilon_т)^n \varepsilon d\varepsilon.$$

После интегрирования последнего интеграла по частям имеем

$$C_2 = \frac{\sigma_т}{2}(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_т^2) + \frac{B}{n+1}\left(\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_т}{n+2}\right)(\varepsilon_1 - \varepsilon_т)^{n+1} \qquad (18)$$

Предельный момент в конце равномерного деформирования материала ($\varepsilon = \varepsilon_в$)

$$M_в = \frac{4S}{\varepsilon_в^2}(C_I + C_{II}) \qquad (19)$$

$$C_{II} = (\varepsilon_в - \varepsilon_т)\left[\frac{\sigma_т}{2}(\varepsilon_в + \varepsilon_т) + \frac{\sigma_в - \sigma_т}{n+1}\left(\varepsilon_в - \frac{\varepsilon_в - \varepsilon_т}{n+2}\right)\right]. \qquad (20)$$

В области больших пластических деформаций и разрушения стержня момент равен

$$M_э = \frac{4S}{\varepsilon_1^2}[C_I + C_{II} + C_э(\varepsilon_1)], \qquad (21)$$

где $C_э$, на основании (8) и (11) после интегрирования и элементарных преобразований равно

$$C_э = \sigma_в\left[(1 \qquad \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_в^2}{2} + \frac{\varepsilon_1^3 - \varepsilon_в^3}{3}\right]. \qquad (22)$$

Разрушающий момент получим, положив $\varepsilon_1 = \varepsilon_к$,

$$M_к = \frac{4S}{\varepsilon_к^2}(C_I + C_{II} + C_{III}), \qquad (23)$$

$$C_{III} = \sigma_в\left[(1 - \varepsilon_в)\frac{\varepsilon_к^2 - \varepsilon_в^2}{2} + \frac{\varepsilon_к^3 - \varepsilon_в^3}{3}\right] \qquad (24)$$

Статический момент первой части площади эпюры напряжений в сечении стержня C_I весьма мал по сравнению с C_{II} и C_{III} (табл. 1), поэтому его можно отбросить и расчет $M_к$ вести только с учетом последних двух слагаемых соотношения (23). Для материалов с небольшой равномерной деформацией $\varepsilon_в$ и сильно наклепанных можно также отбросить и статический момент C_{II} (табл. 1). Тогда расчетная формула для разрушающего момента значительно упрощается

$$M_к = \frac{4S}{\varepsilon_к^2} C_{III} = \frac{4S}{\varepsilon_к^2}\sigma_в\left[(1 - \varepsilon_в)\frac{\varepsilon_к^2 - \varepsilon_в^2}{2} + \frac{\varepsilon_к^3 - \varepsilon_в^3}{3}\right] \qquad (25)$$

Величины $\sigma_в$, $\varepsilon_в$, $\varepsilon_к$ определяются по испытаниям на простое растяжение.

Таблица 1

Величины C_I, C_{II}, C_{III} для стержня прямоугольного сечения (10×25 *мм*) из конструкционной стали

E_0 *кг/мм²*	$\sigma_т$ *кг/мм²*	$\sigma_в$ *кг/мм²*		$\varepsilon_в$	$\varepsilon_к$	C_I	C_{II}	C_{III}
$2{,}1 \cdot 10^4$	90,7	102	0,00415	0,0608	0,702	0,0504	18,2	3512

При небольшом равномерном удлинении величины $\varepsilon_в^2$ и $\varepsilon_в^3$ малы по сравнению с $\varepsilon_к^2$ и $\varepsilon_к^3$ и ими можно пренебречь. Тогда расчетная формула для разрушающего момента $M_к$ примет еще более простой вид

$$M_к = 4S\sigma_в\left(\frac{1-\varepsilon_в}{2}+\frac{\varepsilon_к}{3}\right). \qquad (26)$$

Полученные выше формулы для изгибающих моментов на всем протяжении пластического изгиба были экспериментально проверены на пределе текучести, пределе прочности и при разрушении. Для производства опытов из одной полосы конструкционной стали было изготовлено четыре гагаринских образца, один образец для определения модуля E и четыре бруска прямоугольного сечения (10×25 *мм*). Все образцы подвергались одинаковой термической обработке (закалка и отпуск). Из испытаний на растяжение на прессе Гагарина были определены все константы напряжений и соответствующие им деформации. Изгиб брусков производился на 60-тонном гидравлическом прессе по схеме балки, свободно лежащей на двух опорах с двумя равными нагрузками, приложенными на одинаковых расстояниях от опор. На участке чистого изгиба на растянутых и сжатых волокнах были установлены тензометры с базой $l = 20$ *мм* и коэффициентами увеличения $k_1 = 1100$ и $k_2 = 1080$. В результате испытания были вычерчены кривые $M - \varepsilon$ на растянутой и сжатой зонах, которые получились практически совпадающими. Для опытного определения $M_т$ и $M_в$ отвечающие им деформации $\varepsilon_т$ и $\varepsilon_в$ приравнивались соответствующим деформациям при растяжении. В области больших пластических деформаций тензометры снимались и бруски доводились до разрушения с фиксированием опытного разрушающего момента. Как показывает табл. 2, теоретические расчеты изгибающих моментов при малых и больших деформациях дали хорошее совпадение с опытом.

Таблица 2

Соотношения между расчетными и опытными изгибающими моментами (средние значения четырех испытаний)

$\sigma_т$, *кг/мм²*	$\sigma_в$, *кг/мм²*		$\varepsilon_в$	$\varepsilon_к$	E_0, *кг/мм²*	S, *см³*	$M_т$, *кгсм*		$M_в$, *кгсм*		$M_к$, *кгсм*		
							расчетный	опытный	расчетный	опытный	по формуле (25)	опытный	по формуле (26)
907	102	0,0045	0,0608	0,702	$2{,}1 \cdot 10^4$	0,781	9360	9560	15350	15000	22400	23000	22920
	Отклонение, %						—2,0		+2,4		—2,6		—2,3

Изгиб является весьма распространенным, если не самым распространенным, видом деформации в конструкциях и машинах. Поэтому для полного использования материала и облегчения конструкций правильный подход к расчету несущей способности стержня при изгибе является одним из актуальных вопросов. Необходимость определения изгибающих моментов при любых значениях пластических деформаций возникает также при холодной штамповке. Полученные

в данной работе приближенные формулы для расчета изгибающих моментов на всем протяжении пластического деформирования стержня могут быть использованы в практике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Надаи А. Пластичность, Гостехиздат, 1936.
2. Марковец М. П. Диаграмма истинных напряжений и расчет на прочность, Оборонгиз, 1947.
3. Беляев Н. М. Сопротивление материалов, Гостехиздат, 1951.

Поступило
16 I 1952 г.