

НАПРЯЖЕНИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СТЕРЖНЕ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ СПЕЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Доц. А. Ф. Захаревич

Задача о распределении напряжений в призматическом стержне, вращающемся вокруг одной из главных центральных осей инерции поперечного сечения, сводится к решению двух независимых друг от друга задач [1, 2]. Одна из них не зависит от формы контура поперечного сечения и решается однажды. Вторая задача зависит от формы контура поперечного сечения и сводится к определению плоского деформированного состояния.

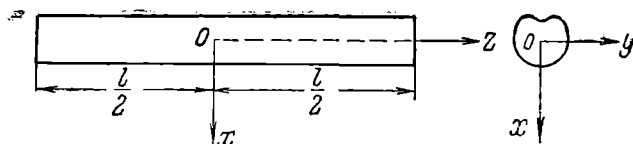


Рис. 1.

Рассмотрим прямолинейный стержень длины l постоянного поперечного сечения, имеющего вид улитки Паскаля. Поместим начало координатных осей в центре тяжести среднего по длине поперечного сечения. Оси ox и oy направим по главным центральным осям инерции этого сечения, а ось oz пусть проходит через центры тяжести поперечных сечений. За ось вращения примем ось oy и будем считать, что угловая скорость постоянна и достаточно велика (рис. 1).

Напряжения задачи, независимой от контура, будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\frac{1}{2} \frac{\gamma \omega^2}{g} \frac{1}{1-\sigma^2} [(1-\sigma^2)x^2 + \sigma^2 y^2], & X_y &= 0, \\ Y_y &= -\frac{1}{2} \frac{\gamma \omega^2 \sigma (1+2\sigma)}{g} \frac{1}{1-\sigma^2} x^2, & Y_z &= 0, \\ Z_z &= -\frac{1}{2} \frac{\gamma \omega^2}{g} \frac{1}{1-\sigma^2} [\sigma(2+\sigma)x^2 + \sigma y^2 + (1-\sigma^2)z^2], & Z_x &= 0, \end{aligned} \right\} (1)$$

где γ — вес единицы объема материала;
 g — ускорение силы тяжести;
 ω — угловая скорость вращения стержня;
 σ — коэффициент поперечного сжатия.

Заданная, зависящая от контура, определяется следующими граничными условиями на боковой поверхности:

$$\left. \begin{aligned} X_n &= \frac{1}{2} \frac{\gamma \omega^2}{g} \left(x^2 + \frac{\sigma^2}{1-\sigma^2} y^2 \right) \cos(n, x), \\ Y_n &= \frac{1}{2} \frac{\gamma \omega^2 \sigma (1+2\sigma)}{g (1-\sigma^2)} x^2 \cos(n, y), \\ Z_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Плоское деформированное состояние по условиям (2) определим методом Н. И. Мусхелишвили [3].

Пусть $z = x + iy$ и $\zeta = \rho e^{i\theta}$ — комплексные переменные. Улитка Паскаля на плоскости переменной z параметрически представляется уравнениями

$$\begin{aligned} x &= b (\cos \theta + a \cos 2\theta - \alpha_0), \\ y &= b (\sin \theta + a \sin 2\theta - \beta_0). \end{aligned}$$

Координаты любой точки внутри улитки выражаются так:

$$\begin{aligned} x &= b (\rho \cos \theta + a \rho^2 \cos 2\theta - \alpha_0), \\ y &= b (\rho \sin \theta + a \rho^2 \sin 2\theta - \beta_0). \end{aligned}$$

Положим

$$z = \Omega(\zeta) = b (\zeta + a \zeta^2 - c_0), \quad (3)$$

где a и b — вещественные постоянные, причем $b > 0$, a изменяется в пределах $0 < a < \frac{1}{2}$; а $c_0 = \alpha_0 + i\beta_0$.

Тогда функция $\Omega(\zeta)$ дает конформное отображение области, заключенной внутри улитки, в плоскости переменной z на внутренность круга γ единичного радиуса в плоскости переменной ζ . Чтобы начало координат совпало с центром тяжести поперечного сечения, положим

$$\alpha_0 = \frac{a}{1+2a^2}, \quad \beta_0 = 0.$$

Решение плоской задачи по методу Н. И. Мусхелишвили приводится к определению двух аналитических функций комплексного переменного $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ из функциональных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Omega(t)}{\bar{\Omega}'\left(\frac{1}{t}\right)} \bar{\varphi}'\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t-\zeta} + \psi(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1 + if_2}{t-\zeta} dt, \\ \psi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\Omega}\left(\frac{1}{t}\right)}{\Omega'(t)} \varphi'(t) \frac{dt}{t-\zeta} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1 - if_2}{t-\zeta} dt, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $t = e^{i\theta}$ — произвольная точка окружности γ ;

f_1 и f_2 — заданные величины,

причем

$$f_1 + if_2 = i \int_0^s (X_n + iY_n) ds, \quad (5)$$

где s — произвольная точка контура в плоскости переменной z .

Пользуясь формулами (2), (3) и (5) из функциональных уравнений (4), найдем выражения функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$.

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^6 A'_n \zeta^n,$$

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=1}^6 B_n \zeta^n - \frac{a + \zeta}{\zeta^2 (1 + 2a\zeta)} \sum_{n=1}^6 n A'_n \zeta^{n-1} + \frac{K_1}{\zeta} + \frac{K_2}{\zeta^2},$$

где

$$A'_1 = \frac{A_1 - 2aA_2}{2(1 - 2a^2)} \quad A'_2 = -\frac{aA_1 - 2(1 - a^2)A_2}{2(1 - 2a^2)},$$

$$A'_3 = A_3, \quad A'_4 = A_4, \quad A'_5 = A_5, \quad A'_6 = A_6,$$

$$A_1 = \frac{\gamma\omega^2}{16g} \frac{b^3}{1 - \sigma^2} [3 + 10a^2 - 12a\alpha_0 + 4\alpha_0^2 + \sigma(1 + 2a^2 - 4a\alpha_0 + 4\alpha_0^2) - 4\sigma^2(a^2 - a\alpha_0 - \alpha_0^2)],$$

$$A_2 = \frac{\gamma\omega^2}{16g} \frac{b^3}{1 - \sigma^2} [4a + 3a^3 - 2\alpha_0 + 4a\alpha_0^2 + \sigma(2a + a^3 - 2\alpha_0 + 4a\alpha_0^2) + 2\sigma^2(a - \alpha_0 + 2a\alpha_0^2)],$$

$$A_3 = \frac{\gamma\omega^2}{48g} \frac{b^3}{1 - \sigma^2} [1 + 5a^2 - 12a\alpha_0 + \sigma(1 + 3a^2 - 12a\alpha_0) + 4a\sigma^2(a - 3\alpha_0)],$$

$$A_4 = \frac{\gamma\omega^2}{16g} \frac{ab^3}{1 - \sigma^2} [(1 + \sigma)(1 - 2a\alpha_0) - 2\sigma^2 a\alpha_0],$$

$$A_5 = \frac{\gamma\omega^2}{16g} \frac{a^2 b^3}{1 - \sigma},$$

$$A_6 = \frac{\gamma\omega^2}{48g} \frac{a^3 b^3}{1 - \sigma},$$

$$B_1 = -\frac{\gamma\omega^2}{16g} \frac{b^3}{1 - \sigma^2} [3 + 10a^2 - 12a\alpha_0 + 4\alpha_0^2 - \sigma(1 + 2a^2 - 4a\alpha_0 + 4\alpha_0^2) - 4\sigma^2(1 + 3a^2 - 5a\alpha_0 + 3\alpha_0^2)],$$

$$B_2 = -\frac{\gamma\omega^2}{16g} \frac{b^3}{1 - \sigma^2} [4a + 3a^3 - 2\alpha_0 + 4a\alpha_0^2 - \sigma(2a + a^3 - 2\alpha_0 + 4a\alpha_0^2) - 2\sigma^2(3a + 2a^3 - 3\alpha_0 + 6a\alpha_0^2)],$$

$$B_3 = -\frac{\gamma\omega^2}{48g} \frac{b^3}{1 - \sigma^2} [1 + 5a^2 - 12a\alpha_0 - \sigma(1 + 3a^2 - 12a\alpha_0) - 4\sigma^2(1 + 2a^2 - 9a\alpha_0)],$$

$$B_4 = -\frac{\gamma\omega^2}{16g} \frac{ab^3}{1 - \sigma^2} [(1 - \sigma)(1 - 2a\alpha_0) - 2\sigma^2(2 - 3a\alpha_0)],$$

$$B_5 = -\frac{\gamma\omega^2 (1 - \sigma - 4\sigma^2) a^2 b^3}{16g (1 - \sigma^2)}, \quad B_6 = -\frac{\gamma\omega^2 (1 - \sigma - 4\sigma^2) a^3 b^3}{48g (1 - \sigma^2)},$$

$$K_1 = \frac{A_1(1 - 4a^2) + 2aA_2}{2(1 - 2a^2)}, \quad K_2 = \frac{aA_1 - 2a^2A_2}{2(1 - 2a^2)}$$

Пользуясь полученными выражениями для функций $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$, найдем напряжения задачи, зависящей от контура по формулам:

$$R_r + \theta_\theta = 2 [\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\bar{\zeta})}],$$

$$\theta_\theta - R_r + 2iR_\theta = \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \overline{\Omega'(\bar{\zeta})}} (\overline{\Omega(\bar{\zeta})} \Phi' \zeta + \Omega'(\zeta) \Psi(\zeta)),$$

$$Z_x = \sigma(R_z + \theta_0),$$

где

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\Omega'(\zeta)}, \quad \Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\Omega'(\zeta)}.$$

Напряжения задачи, не зависящей от контура, находим, пользуясь выражениями (1), по следующим формулам:

$$\begin{aligned} R_r + \theta_0 &= X_x + Y_y, \\ \theta_0 - R_r + 2iR_\theta &= (Y_y - X_x + 2iX_y) e^{2ia}, \end{aligned}$$

где

$$e^{2ia} = \frac{\zeta^2 \Omega'(\zeta)}{\rho^2 \bar{\Omega}'(\bar{\zeta})}.$$

На торцах напряжения не принимают заданных значений. Удовлетворим условиям на торцах в смысле Сен-Венана. В нашем случае имеем растяжение силой и изгиб парой в плоскости *xoz*. Соответствующая система напряжений имеет лишь один, не равный нулю, компонент

$$Z_x = \frac{\iint_{(S)} Z_x ds}{S} - \frac{\iint_{(S)} x Z_x ds}{J_y} x,$$

где *S* — площадь поперечного сечения;

J_y — момент инерции поперечного сечения.

Если теперь сложить напряжения задачи, зависящей от контура, с напряжением задачи, не зависящей от контура, и наложить на них напряжение от усилий на торцах с обратным знаком, то получим полную систему напряжений, решающую поставленную задачу.

Вычисления показывают, что если длина стержня велика по сравнению с размерами поперечного сечения, как это принято в нашей задаче, то напряжения *R_r*, *θ₀* и *R_θ¹* пренебрежимо малы по сравнению с *Z_x* и, следовательно, главным расчетным напряжением будет напряжение

$$\begin{aligned} Z_x = & \frac{\gamma \omega^2}{8g} (l^2 - 4z^2) + \frac{\gamma \omega^2}{8g} \frac{b^2 \sigma}{1 - \sigma^2} \left\{ 3 + 3a^2 + 9a\alpha_0 - 16\alpha_0^2 - 6\rho^2 - \right. \\ & - 6a^2\rho^4 + \sigma(1 + a^2 + 3a\alpha_0 - 8\alpha_0^2 - 2\rho^2 - 2a^2\rho^4) - 4\rho[3a\rho^2 - \\ & - 4\alpha_0 + \sigma(a\rho^2 - 2\alpha_0)] \cos \theta - 2\rho^2[1 - 8a\alpha_0 + \sigma(1 - 4a\alpha_0)] \cos 2\theta + \\ & + 4a\rho^3(1 + \sigma) \cos 3\theta + 2a^2\rho^4(1 + \sigma) \cos 4\theta \left. - \right. \\ & - \frac{2\pi b^3 \sigma}{I_y} \left\{ \frac{\gamma \omega^2}{16g} \frac{b^8}{1 - \sigma^2} [7a + 14a^3 - \alpha_0(7 + 42a^2 + 14a^4) + 16a\alpha_0^2 + \right. \\ & + 3\sigma a + 6\sigma a^3 - \alpha_0\sigma(3 + 18a^2 + 6a^4 + 8a\alpha_0^2)] + \alpha_0 A_1 - \\ & - (1 - 2a\alpha_0) A_2 - 3a A_3 - 2a^2 A_4 \left. \right\} (\rho \cos \theta + a\rho^2 \cos 2\theta - \alpha_0) - \\ & - \frac{2\sigma}{b} [(1 - 2a\alpha_0) A_1 + 2\alpha_0 A_2] + \frac{4\sigma}{b(1 + 4a\rho \cos \theta + 4a^2\rho^2)} \left\{ \frac{1}{2(1 - 2a^2)} \times \right. \\ & \times [(A_1 - 2aA_2) + 4a\rho^2(-aA_1 + 2(1 - a^2)A_2)] + 2\rho[A_2 + \\ & + 3aA_3\rho^2] \cos \theta + \rho^2[3A_3 + 8aA_4\rho^2] \cos 2\theta + 2\rho^3[2A_4 + \\ & + 5aA_5\rho^2] \cos 3\theta + \rho^4[5A_5 + 12aA_6\rho^2] \cos 4\theta + 6A_6\rho^5 \cos 5\theta, \end{aligned} \quad (6)$$

¹ Напряжения *R_r*, *θ₀* и *R_θ* не приведены в силу их громоздкости.

где

$$I_y = \frac{\pi b^4}{4} [1 + 6a^2 + 2a^4 - 8a\alpha_0 + 4\alpha_0^2 + 8a^2\alpha_0^2].$$

Напряжение Z_z достигает максимума в начале координат, т. е. в центре тяжести поперечного сечения.

Распределение напряжения Z_z по сечению стержня (рис. 2) при $\sigma = 0,3$, $b = 10$ см, $l = 100$ см и $a = 0,4$, приведенное в таблице,

Таблица

		$\frac{Z_z}{\gamma \omega^2}$						
		g						
$\rho \backslash \theta$	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	
0	1265,1	1265,1	1265,1	1265,1	1265,1	1265,1	1265,1	
0,1	1266,8	1266,5	1265,8	1264,9	1264,0	1263,4	1263,1	
0,2	1267,6	1267,1	1265,9	1264,0	1262,4	1261,1	1260,7	
0,3	1267,9	1267,2	1265,2	1262,8	1260,4	1258,7	1258,1	
0,4	1267,2	1266,3	1263,8	1260,9	1258,2	1256,1	1255,3	
0,5	1265,6	1264,7	1261,9	1258,6	1255,7	1253,6	1252,5	
0,6	1263,9	1261,7	1258,9	1255,7	1253,0	1250,7	1249,3	
0,7	1259,0	1257,8	1255,1	1252,2	1250,4	1248,8	1247,2	
0,8	1253,5	1252,5	1250,2	1248,2	1247,0	1247,1	1244,7	
0,9	1246,7	1245,8	1244,2	1243,6	1244,9	1246,0	1242,0	
1	1238,2	1237,6	1236,9	1238,4	1242,9	1245,4	1238,8	

показывает, что напряжение Z_z по сечению меняется мало. Абсолютного максимума оно достигает в центре тяжести сечения, где $\max Z_z = 1267,9 \frac{\gamma \omega^2}{g}$; абсолютного минимума — в точках $\rho = 1$, $\theta = \pm 60^\circ$, где $\min Z_z = 1236,9 \frac{\gamma \omega^2}{g}$. Разность указанных значений составляет около 3% от макс Z_z .

На кривых $\theta = \text{пост.}$ максимумы Z_z для $\theta = 0^\circ$, $\theta = 30^\circ$ и $\theta = 60^\circ$ располагаются вблизи центра тяжести сечения, а для θ , изменяющегося в пределах $90^\circ < \theta < 180^\circ$, они находятся в начале криволинейной системы координат (рис. 2).

При удалении к периферии сечения от точек, где достига-

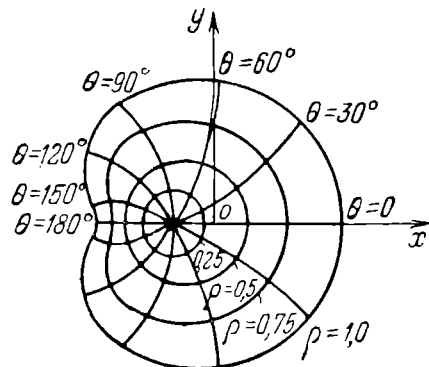


Рис. 2

ются указанные максимумы, напряжение Z_z монотонно убывает.

На кривых $\rho = \text{пост.}$ для $\rho < 0,8$ при изменении θ от 0 до 180° Z_z также монотонно убывает, а для $\rho > 0,8$ и θ , изменяющемся от 90 до 150° , это напряжение незначительно повышается.

Поскольку разность между максимальным и минимальным значениями напряжения Z_z составляет около 3%, а с уменьшением a эта разность станет еще меньше, то напряжение Z_z с достаточной для практики точностью можно считать по сечению постоянным.

Заметим, что изменение параметров l, b мало изменяет разность между максимальными и минимальными значениями напряжения Z_z . Таким образом, высказанное утверждение справедливо для любых параметров, определяющих рассматриваемое сечение.

Ограничимся в формуле (6) лишь первым членом при $z = 0$, тогда

$$\text{макс } Z_z \approx \frac{\gamma \omega^2 l^2}{8g}. \quad (7)$$

Пользуясь этой формулой для параметров, принятых в примере, приведенном в таблице, получим

$$\text{макс } Z_z = 1250 \frac{\gamma \omega^2}{g}$$

Это значение на 1,5% меньше абсолютного макс Z_z по сечению стержня, причем при уменьшении a этот процент уменьшается и при увеличении a несколько возрастает. Так, например, при $a = 0,49$ он равен 5%.

При $a = \frac{1}{2}$, $\rho = 1$ и $\theta = \pi$ улитка Паскаля имеет угловую точку и поэтому для этого случая метод Н. И. Мухелишвили не применим.

Следовательно, с точностью вполне достаточной для практики, величину основного расчетного напряжения можно получить, пользуясь упрощенной формулой (7).

Полагая в полученных выражениях для напряжений $a = 0$ и $b\rho = r$, получим напряжения для стержня кругового поперечного сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаревич А. Ф. Распределение напряжений во вращающихся призматических стержнях. Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института, т. XXIII, 1949.

2. Захаревич А. Ф. К задаче о распределении напряжений во вращающемся стержне. Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института, т. XXV, вып. I, 1951.

3. Мухелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости. Изд. АН СССР, 1935.

Поступило
9 VIII 1952 г.