Записки Ленинградского орденов Ленина Трудового Красного Знамени горного института, том XXIX, вып. 3, 1954

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ФОТОГРАММЕТРИИ

Канд. технич. наук П. В. Филиппов

Вопрос о взаимной связи между различными по характеру методами проектирования, принятыми в начертательной геометрии, имеет существенное значение для развития этой научной дисциплины.

Еще в 1907 г. крупнейший в мире геометр — русский ученый академик Е. С. Федоров в работе „Новая геометрия, как основа черчения" писал: „Одним из существенных условий прогресса знаний является объединение и совместное изучение всех тех явлений, которые явно имеют в себе общую сторону " и далее: „Прежняя геометрия или геометрия древних изучала геометрические образы, как нечто обособленное и своеобразное. Новая геометрия видит во всех геометрических образах лишь определенные совокупности, видит в них нечто изменяемое в самых разнообразных направлениях, а главная ее задача есть установление связей и постоянства в этих изменениях"

В своих многочисленных трудах академик Е. С. Федоров широко пользовался самыми разнообразными методами изображений и при решении некоторых задач переходил от одного метода к другому, что можно объяснить стремлением этого гениального ученого в каждом отдельном случае получить простейшее решение поставленной задачи.

Таким образом, правильное решение вопроса о взаимной связи между различными методами проектирования позволяет рассматривать их на общей основе, выявляя и общие для этих методов приемы и способы решения задач начертательной геометрии, а также позволяет установить простейшие пути перехода от одного метода проектирования к другому, что, как будет показано ниже, имеет определенное практическое значение при построении различных изображений пространственных предметов.

Фотографический снимок пространственных предметов представляет собой их центральную проекцию на плоскость, которой является фотографическая пластинка или пленка, и на фотографическом снимке, следовательно, действительная форма и действительные размеры изображенных предметов являются искаженными, что объясняется самой сущностью центрального проектирования.

Одной из задач фотограмметрии — научной дисциплины, занимающейся изучением геометрических соотношений на фотографических снимках, а также изучением способов измерения по фотографическим

снимкам, необходимых для установления действительных размеров сфотографированных предметов, — является установление формы, размеров и положения предметов в пространстве по их фотографиям. Решение этой задачи имеет широкое применение в аэрофотосъемке.

Значение аэрофотосъемки в СССР особенно велико в настоящее время, при тех грандиозных масштабах работ, которые сейчас проводятся на необозримых территориях нашей Родины.

Фотограмметрическая обработка снимка заключается в преобразовании перспективных искажений снимка, обусловленных сущностью центрального проектирования. В зависимости от применяемых способов, преобразование может быть осуществлено графическим, механическим и оптическим способами.

Последние два способа главным образом и используются на практике, но они основываются на определенных геометрических построениях, которые со всей полнотой могут быть представлены в графических преобразованиях. Графические преобразования позволяют выявить геометрическую сущность вопросов, связанных с преобразованием фотоснимков, и тем самым представляют определенный интерес для изучающих фотограмметрию.

Точное представление как о форме и положении предметов в пространстве, так и о размерах последних, можно получить, пользуясь изображениями этих предметов, построенными по методу параллельного прямоугольного проектирования, которым еще в середине XVIII в. пользовался известный русский механик-самоучка Иван Петрович Кулибин для изображения на чертежах своих многочисленных гениальных изобретений. Этот метод проектирования и в настоящее время является основным, принятым в инженерной технической практике.

Таким образом, с точки зрения начертательной геометрии фотограмметрическая обработка снимка заключается в преобразовании центральных проекций предметов в их изображения, построенные по методу прямоугольного проектирования. Приемы подобных преобразований, основанные на методах начертательной геометрии, представлены в работах наших советских ученых — Н. А. Рынина, А. И. Добрякова, Н. Ф. Четверухина и др.

В настоящей работе решение рассматриваемого вопроса показано на основе взаимной связи между методами центрального и параллельного проектирования. Эту взаимную связь позволяет установить метод прямоугольных координат в применении к названным методам проектирования.[1]

При воздушном фотографировании предметов возможны случаи горизонтального, наклонного и вертикального положений пластинки или пленки, т. е. плоскости картины.

Для таких трех случаев и будет рассмотрено решение отмеченной выше задачи фотограмметрии.

1. Плоскость картины расположена горизонтально

Общая схема фотографирования на горизонтальную плоскость представлена на рис. 1, где S — центр объектива фотографического аппарата, находящегося на высоте H над поверхностью земли;

[1] Впервые теория центрального и параллельного проектирования на плоскость на основе метода прямоугольных координат представлена в работе М. А. Дешевого, „Основания для объединения главнейших методов проектирования", 1913.

F — расстояние центра объектива до пластинки (фокусное расстояние).

Вследствие подобия треугольников K_0SM_0 и $k_{0_1}Sm_{0_1}$ длина какой-либо линии на местности K_0D_0 легко может быть определена по ее фотографии, если известны H и F. Из пропорции $\frac{k_{0_1}d_{0_1}}{K_0D_0} = \frac{F}{H}$ следует $K_0D_0 = k_{0_1}d_{0_1}\frac{H}{F}$. Отношение $\frac{k_{0_1}d_{0_1}}{K_0D_0} = \frac{F}{H}$ является масштабом снимка для всех линий, расположенных на местности. Этот масштаб назовем масштабом плана.[1]

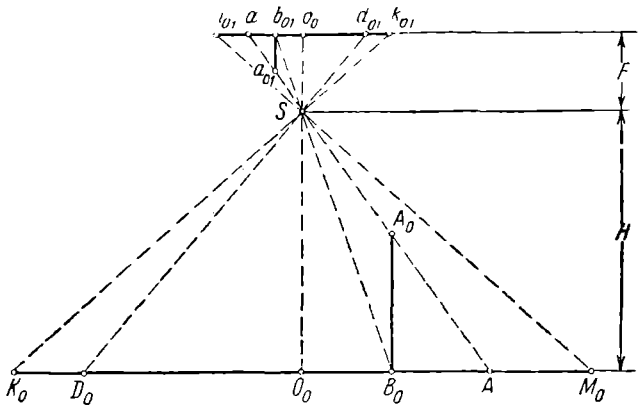


Рис. 1

Таким образом, если F или H оказываются неизвестными, то для определения масштаба плана достаточно знать хотя бы один размер отрезка на местности, который имеется и на фотографии.

Пусть на фотографии есть отрезок ab_{0_1}, который представляет изображение вертикального отрезка A_0B_0. Требуется определить истинный размер этого отрезка, если известен масштаб плана.

Для решения задачи продолжим прямую SA_0 до пересечения с поверхностью земли в точке A.

Отрезок AB_0 является центральной проекцией отрезка A_0B_0 на поверхность земли, отрезок же ab_{0_1} — центральной проекцией того же отрезка на поверхность пластинки.

Теперь, если известно фокусное расстояние F, для построения размера отрезка A_0B_0 в масштабе плана достаточно соединить прямой точку a с точкой S, а из точки b_{0_1} провести перпендикуляр к поверх-

---

Указанное положение будет справедливым только в том случае, когда местность горизонтальна. За такую примем равнинную местность.

Если снимок сделан с рельефной местности, то масштаб его оказывается переменным и процесс преобразования снимка связывается уже с так называемыми поправками за рельеф.

В настоящей работе все рассуждения ведутся в предположении, что местность горизонтальная, так как имеется в виду лишь принципиальное решение вопросов преобразования перспективных фотоснимков.

ности пластинки до пересечения в точке a_{0_1} с прямой Sa. Отрезок $a_{0_1}b_{0_1}$ и будет искомым размером, так как

$$\frac{a_{0_1}b_0}{A_0B_0} = \frac{F}{H},$$

что следует из подобия треугольников A_0B_0A и $a_{0_1}b_{0_1}a$.

К решению этой задачи может быть применен метод прямоугольных координат. Предположим, центр объектива — точка S является центром проектирования, расположенным на оси oz, которая занимает вертикальное положение, оси же ox и oy совпадают с поверхностью земли (рис. 2).

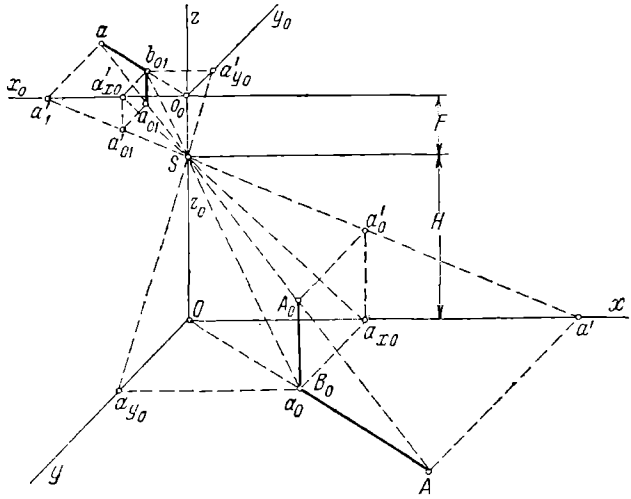


Рис. 2

С поверхностью пластинки совпадают тогда изображения o_0x_0 и o_0y_0 осей ox и oy; ось же o_0z_0 расположена вертикально по отношению к пластинке.

Проектированию из центра S на поверхность земли будет соответствовавать проектирование из того же центра на поверхность пластинки, с той лишь разницей, что все размеры предметов, проектируемых на поверхность пластинки, будут измеряться в масштабе плана, равном отношению $\frac{F}{H}$

Таким образом, если знать расстояние F и масштаб плана, то по фотографии всегда могут быть определены вертикальные размеры фотографируемых объектов в масштабе плана.

Такое проектирование соответствует проектированию на координатную плоскость xoy из центра, расположенного на оси oz (рис. 3).

На рис. 3 дана координатная система $oxyz$ и центр проектирования, расположенный на оси oz. Плоскостью картины является координатная плоскость xoy. На чертеже показано построение изображения полного параллелепипеда координат точки A_0 — конфигурация, определяемая прямыми oa'', oa_{y_0}, $a''A$, $a_{y_0}a_0$, oa_{x_0}, oa', $a_{x_0}a_0$, $a'A$, a_0A, $a_{x_0}a'$ и $a_{y_0}a''$ Ребро параллелепипеда oa_{z_0} как отрезок в изображении пропадает и обращается в точку. При повороте координатной систем

вокруг оси oz (рис. 3) величина координаты точки по этой оси не изменяется. Действительно, если систему $oxyz$ повернуть вокруг оси oz до положения $ox_1y_1z_1$, то изменяются только величины координат точки по осям ox и oy, так как только эти оси меняют свое положение по отношению к проектируемым элементам.

Точка t_z, совпавшая с точкой o, является точкой схода изображений прямых, параллельных оси oz; линия $t_z\infty_x$ есть линия схода изображений прямых, лежащих в плоскости xoz или ей параллельных, а линия $t_z\infty_y$ будет линией схода изображений прямых, лежащих в плоскости yoz или также ей параллельных. Для повернутой координатной системы $ox_1y_1z_1$ отмеченными линиями схода являются $t_z\infty_{x_1}$ и $t_z\infty_y$.

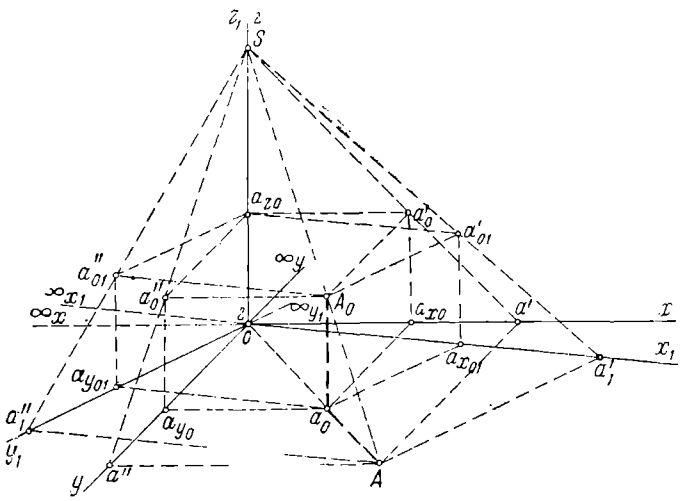


Рис. 3

Рис. 3 дает пространственное изображение элементов системы; плоскостное изображение представлено на рис. 4, где все три координатные плоскости совмещены с плоскостью xoz для системы координат $oxyz$ и с плоскостью x_1oz_1 — для повернутой системы координат $ox_1y_1z_1$.

Если точка задана ее изображением A и ее вторичной горизонтальной проекцией, которая совпадает с самой горизонтальной проекцией a_0, легко построить координату этой точки по оси oz (рис. 4). Для этого из точек a_0 и A достаточно опустить перпендикуляры на ось ox или ox_1, отметить точки a_{x_0} и a' или $a_{x_{0_1}}$ и a'_1, пересечения этих перпендикуляров с осями, а затем точку a' или a'_1 соединить прямой с точкой s' или s'_1 и построить точку a'_0 пересечения прямой $s'a'$ с прямой $a_0a_{x_0}$ или точку a'_{0_1} пересечения прямой $S'_1a'_1$ с прямой $a_0a_{x_{0_1}}$. Отрезки $a_{x_0}a'_0$ и $a_{x_{0_1}}a'_{0_1}$ будут равны по величине координате точки A_0 по оси oz и, следовательно, будут определять расстояние этой точки до горизонтальной плоскости xoy или x_1oy_1. Эти отрезки фактически являются проекциями отрезка A_0a_0 на координатные плоскости соответственно xoz или x_1oz_1.

Такое построение может быть использовано для определения вертикального размера какого-либо сфотографированного предмета, если известен масштаб плана и фокусное расстояние F. Пусть при таких исходных данных на рис. 2 отрезок ab_{0_1} является фотографическим изображением вертикального предмета A_0B_0, размер которого требуется определить. При этом точка B_0 расположена на поверхности земли. Таким образом, точка B_0 может быть принята за горизонтальную проекцию точки A_0, а точка b_{0_1}, очевидно, может быть принята за горизонтальную проекцию точки a_{0_1}, находящейся над поверхностью пластинки на высоте $a_{0_1}b_{0_1}$, равной A_0B_0 в масштабе плана. Для построения точки a_{0_1} достаточно точку a соединить прямой с точкой S, а из

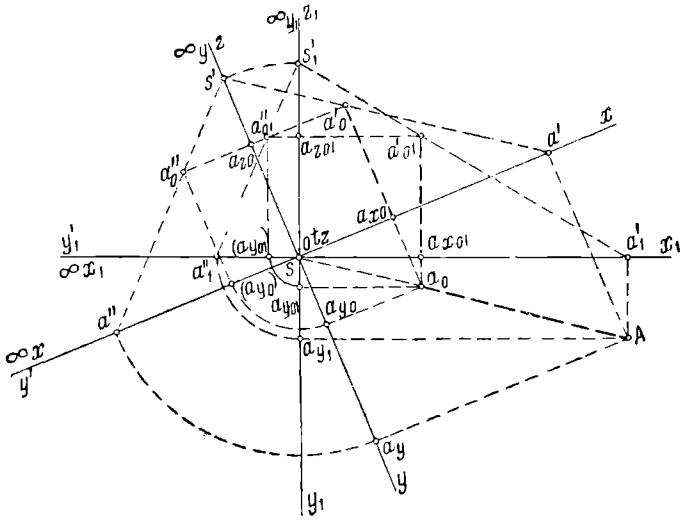


Рис. 4.

точки b_{0_1} восстановить перпендикуляр к поверхности пластинки. Пересечение таких двух прямых определит искомую точку.

Если координатную систему $o_0x_0y_0z_0$ совместить с поверхностью пластинки $x_0o_0y_0$ вращением плоскости $z_0o_0y_0$ вокруг оси o_0z_0 (до совмещения с плоскостью $x_0o_0z_0$), а затем вращением обеих указанных плоскостей вокруг оси o_0x_0, то получим плоскостное изображение всех элементов системы, аналогичное представленным на рис. 4. В таком случае построение отрезка $a_{0_1}b_{0_1}$ заменится построением равного ему по величине отрезка $a'_{0_1}a'_{x_0}$ (путь построения тот же, что на рис. 4).

Из приведенных рассуждений следует, что для определения действительных размеров предметов, сфотографированных на горизонтальную плоскость, должны быть известны масштаб плана и фокусное расстояние. Путь определения масштаба плана указан выше, фокусное же расстояние при фотографировании объектов обычно бывает известным. Если оно оказывается неизвестным, то необходимо иметь какое-

[1] На последующих рисунках все буквенные обозначения будут соответствовать проектированию из центра S на поверхность земли (рис. 4), так как имеется в виду, что все размеры проектируемых предметов будут измеряться в масштабе плана.

нибудь дополнительное условие: размер хотя бы одного вертикального предмета, изображенного на фотографии, или размер одной вертикальной линии.

При известном масштабе плана и размере вертикального предмета определение фокусного расстояния выполняется весьма простым построением.

Пусть дан снимок на горизонтальную плоскость (рис. 5). На нем изображены три объекта (*1*, *2* и *3*), размеры которых требуется определить, если известны: а) истинный размер M_0H_0 отрезка m_0h_0, изображенного на снимке и расположенного на поверхности земли; б) истинный размер вертикального предмета Nn_0 (например, телеграфного столба).

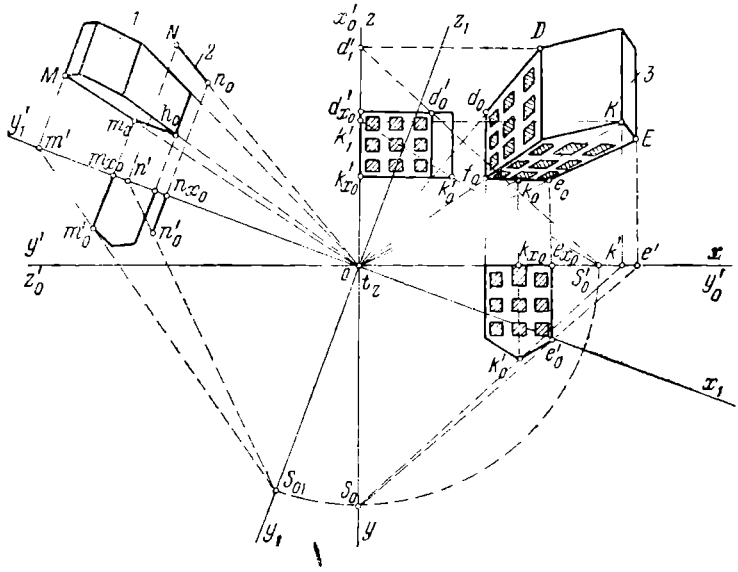


Рис. 5

По отношению $\frac{m_0h_0}{M_0H_0}$ определяем масштаб плана. В точке t_z схода изображений вертикальных линий помещаем начало координат o и через точку o проводим координатные оси $ox_1y_1z_1$ развернутой системы координатных плоскостей, совмещенных с поверхностью снимка таким образом, чтобы ось ox_1 была параллельной отрезку m_0h_0.

Для определения фокусного расстояния из точек N и n_0 (точку n_0 считаем вторичной горизонтальной проекцией точки, изображением которой является точка N) проводим прямые Nn' и $n_0n_{x_0}$, перпендикулярные к оси ox_1, до пересечения с последней, и от точки n_{x_0} по перпендикуляру к оси ox_1 (безразлично в какую сторону) откладываем в масштабе плана известный размер отрезка Nn_0 — отрезок $n_{x_0}n_0'$. Соединив прямой точки n' и n_0', определяем точку S_{0_1} пересечения прямой $n'n_0'$ с осью oz_1. Отрезок oS_{0_1} и является искомым фокусным расстоянием.

Это построение аналогично приведенному на рис. 4 для определения координаты точки A_0 по оси oz (отрезков $a_{x_0}a_0'$ и $a_{x_{0_1}}a_{0_1}'$). Разница лишь в том, что на рис. 4 фокусное расстояние отложено от начала

координат по оси oz вверх, а на рис. 5 — по той же оси вниз. Положение центра проектирования на рис. 5, соответствующее положению того же центра на рис. 4, отмечено в точке S_{0_1}.

Зная положение центра проектирования, легко определить вертикальные размеры всех объектов, изображенных на снимке.

На рис. 5 показано построение фасада объекта *1*. Путь построения всех точек фасада объекта не вызывает особых затруднений. Для определения, например, вертикального размера отрезка Mm_0 из точек M и m_0 проведены прямые, перпендикулярные к оси ox_1, до пересечения с последней в точках соответственно m' и m_{x_0}. Точка m' соединена прямой с точкой S_{0_1}, а из точки m_{x_0} проведена прямая, перпендикулярная к оси ox_1, до пересечения с прямой $m'S_{0_1}$ в точке m'_0. Отрезок $m_{x_0}m'_0$ является истинным размером отрезка Mm_0 в масштабе плана и одновременно ортогональной проекцией этого отрезка на координатную плоскость x_1oz_1.

Для построения фасада объекта *3* координатная система повернута в положение $oxyz$, а центр проектирования в положение S_0. Как указано на рис. 3, при повороте координатной системы вокруг оси oz величина координаты точки по этой оси не изменяется, а следовательно, при определении вертикальных размеров объектов положение осей ox и oy является безразличным. При построении же фасада объекта *3* удобно ось ox расположить параллельно линии f_0e_0.

На рис. 5 приведено построение вертикальных размеров $k_{x_0}k'_0$ и $e_{x_0}e'_0$ отрезков Kk_0 и Ee_0 изложенным выше путем. Положение центра проектирования, соответствующее указанному на рис. 4, отмечено в точке S_0.

Для построения бокового вида объекта *2* координатная система повернута в положение $ox'_0y'_0z'_0$, а центр проектирования в положение S'_0 и отмечено построение отрезков $k'_{x_0}k'_0$ и $d'_{x_0}d'_0$. Путь построения аналогичен предыдущему.

Если по имеющемуся снимку определить фокусное расстояние невозможно, то можно судить лишь об относительных размерах не только объектов, расположенных на поверхности земли, но и занимающих вертикальное положение относительно указанной поверхности. Фокусное расстояние при этом может быть выбрано произвольным.

2. Плоскость картины расположена наклонно

Общая схема фотографирования на наклонную плоскость представлена на рис. 6, где буквами S, F и H отмечены те же данные, что и на рис. 1. Масштаб снимка, как видно из рисунка, во всех точках различен, так как не имеется уже подобия треугольников, характерного для фотографирования на горизонтальную плоскость.

Если считать, что центр объектива — точка S — расположен также на оси oz, занимающей вертикальное положение, а с поверхностью земли совпадают оси ox и oy, то фотографирование на наклонную плоскость будет соответствовать случаю проектирования из центра, расположенного на оси oz, на плоскость, занимающую общее положение относительно координатной системы (рис. 7).

На рис. 7 показано, каким образом по ортогональным проекциям точки a_0, a'_0 и a''_0 можно построить ее центральные проекции — основную A и вторичные a, a' и a'' а также — каким образом по трем

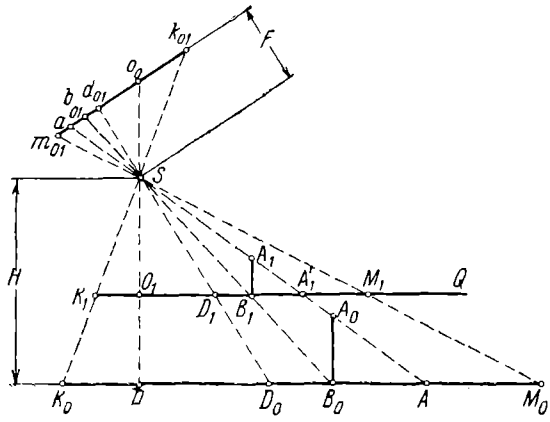


Рис. 6

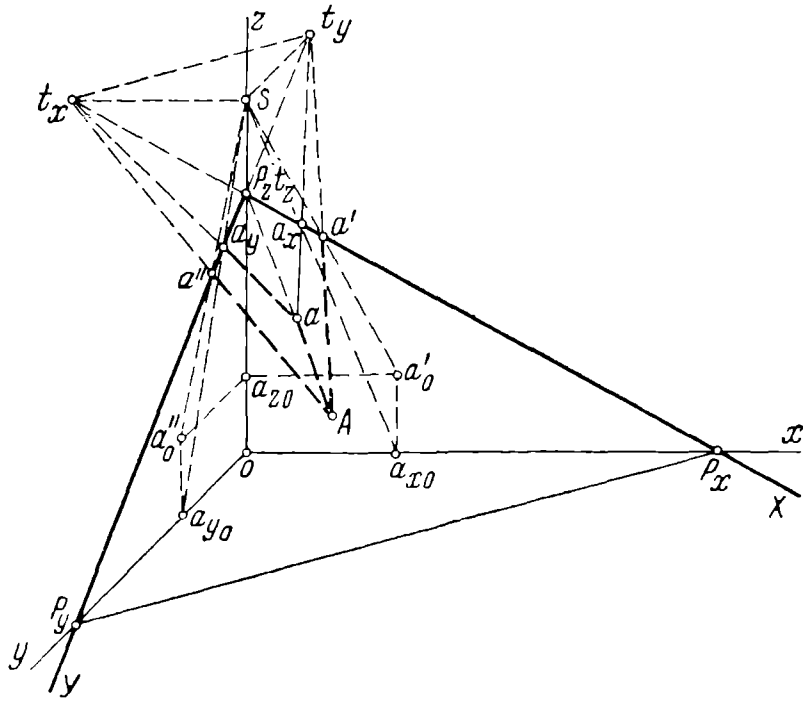


Рис. 7

координатам точки — отрезкам oa_{x_0}, oa_{y_0} и oa_{z_0} — можно построить их изображения Oa_x, Oa_y и Oa_z. Координата точки по оси oz, как и

сама координатная ось oz в изображении обращается в точку. Изображения OX и OY осей ox и oy совпадают соответственно со следами плоскости картины p_xp_z и p_yp_z.

Для решения отмеченных задач перехода от прямоугольных проекций к центральным и обратно необходимо иметь пять основных элементов:

1) систему координат $oxyz$;
2) центр проектирования S;
3) треугольник следов плоскости картины $p_xp_yp_z$;

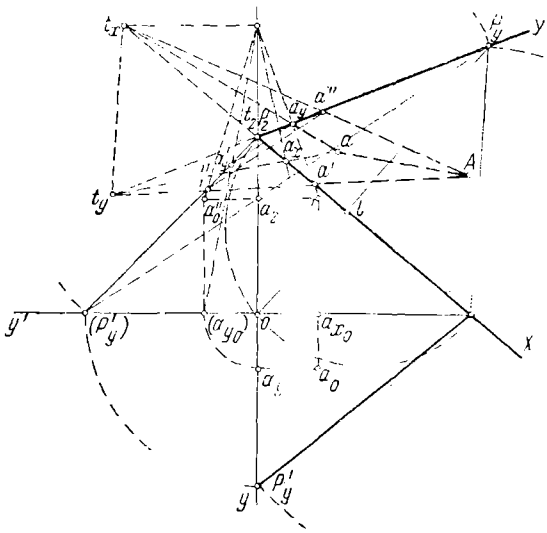


Рис. 8

4) изображения OX, OY и OZ осей координат ox, oy и oz на плоскости картины;

5) треугольник $t_xt_yt_z$, именуемый треугольником схода изображений прямых, лежащих в плоскостях координат, или им параллельных. В этом треугольнике сторона t_xt_y параллельна следу p_xp_y плоскости картины, а стороны t_xt_z и t_yt_z совпадают соответственно со следами p_xp_z и p_yp_z плоскости картины.

Конфигурация, определяемая прямыми Oa_y, a_ya'', Oa_x, a_xa', a_ya, a_xa, $a''A$, $a'A$, aA, $a''a_z$ и $a'a_z$, на рис. 7 является изображением полного параллелепипеда координат точки A_0.

Рис. 7 представляет пространственное расположение всех элементов, плоскостное изображение же показано на рис. 8. Все три координатные плоскости на нем совмещены с плоскостью xoz, с которой в свою очередь совмещена и плоскость картины (вращением вокруг следа p_xp_z в сторону, противоположную началу координат).

Прямая op_y всегда должна быть перпендикулярна к следу p_xp_z, так как она является следом плоскости вращения точки p_y вокруг отмеченного следа p_xp_z. Имея это в виду, всегда можно по данному треугольнику следов $p_xp_yp_z$ построить координатную систему $oxyz$, для чего достаточно определить точку o в пересечении прямой p_yl (перпендикулярной к следу p_xp_z) с другой окружности, построенной

на следе $p_x p_z$, как на диаметре, а затем полученную точку o соединить прямыми с точками p_x и p_z.

Отмеченные выше пять основных элементов могут быть построены только по имеющемуся треугольнику $t_x t_y t_z$. Для этого треугольник $p_x p_y p_z$ и изображения осей OX, OY и OZ строятся так, что сторона $p_x p_y$ параллельна $t_x t_y$, а стороны $p_x p_z$ и $p_y p_z$ совпадают со сторонами соответственно $t_x t_z$ и $t_y t_z$. С последними совпадают и изображения OX и OY осей ox и oy, изображения же OZ оси oz совпадают с точкой p_z.

Далее, отмеченным выше путем строится координатная система $oxyz$ и центр проектирования S, положение которого определяется пересечением с осью oz прямой, проведенной через точку t_x параллельно оси ox.

При наличии отмеченных пяти элементов, как следует из рис. 8, можно по имеющемуся изображению Aa ребра параллелепипеда координат точки a построить все три прямоугольные проекции этого ребра $a_{x_0} a'_0$, $(a_{y_0}) a''_0$ и a_0. Если рассматривать изображение ребра Aa, как изображение на снимке вертикальной линии, точка a которой является изображением точки, расположенной на поверхности земли, то определение истинного размера отрезка Aa может быть сведено к построению прямоугольных проекций ребра параллелепипеда координат точки по ее изображению и вторичной горизонтальной проекции.

Для решения поставленной задачи фотограмметрии необходимо иметь в виду, что, если проектируемые предметы отнесены к системе прямоугольных координат и построение их производится по имеющимся центральным проекциям, то при параллельном перемещении координатной системы предметы остаются подобными друг другу, изменяется только их величина.

Это положение подтверждается, если предположить, что поверхность земли вместе с координатной системой будет перенесена параллельно на некоторую плоскость Q (рис. 6).

Рассмотрим теперь решение следующей задачи. Пусть на рис. 9 дана фотография дома и требуется построить его план и фасады, а также определить истинные размеры. Прежде всего определяем точки схода t_x, t_y и t_z трех основных взаимно перпендикулярных линий контура дома и строим треугольник схода изображений прямых, лежащих в плоскостях xoy, xoz и yoz или им параллельных.

С линией $t_x t_z$ совпадает изображение OX оси ox и след $p_x p_z$ плоскости картины, а с линией $t_z t_y$ — изображение OY оси oy и след $p_y p_z$ той же плоскости. С точкой t_z совпадает изображение OZ оси oz и изображение O начала координат o.

При построении следа $p_x p_y$ необходимо иметь в виду, что он должен быть параллелен линии $t_x t_y$. При построении треугольника следов плоскости картины $p_x p_y p_z$ желательно получать его возможно бо́льшим с целью получения бо́льшего масштаба плана и фасадов изображенного предмета. Принципиально же величина треугольника $p_x p_y p_z$ не имеет значения. Важно лишь, чтобы этот треугольник был подобен треугольнику $t_x t_y t_z$, так как таким подобием характеризуется упомянутое выше параллельное перемещение координатной системы.

Теперь по имеющимся трем — треугольникам $t_x t_y t_z$, $p_x p_y p_z$ и изображению OX, OY, OZ координатных осей — из пяти основных элементов системы, необходимых для решения задачи преобразования по методу

координат, можно построить остальные два элемента, т. е. систему координат $oxyz$ и центр проектирования S (рис. 9).

При наличии всех пяти основных элементов системы легко построить три прямоугольные проекции дома, имея в виду, что основание его расположено в горизонтальной плоскости xoy. Для определения, например, трех прямоугольных проекций ребра дома Aa выполнены следующие построения. Точка a, являясь изображением точки, расположенной на поверхности земли, может считаться вторичной горизонтальной проекцией точки, изображением которой является точка A. Проводя через точки a и t_y прямую до пересечения со следом $p_x p_z$ в точке a_x, получаем изображение координаты точки A_0 по оси ox — отрезок Oa_x.

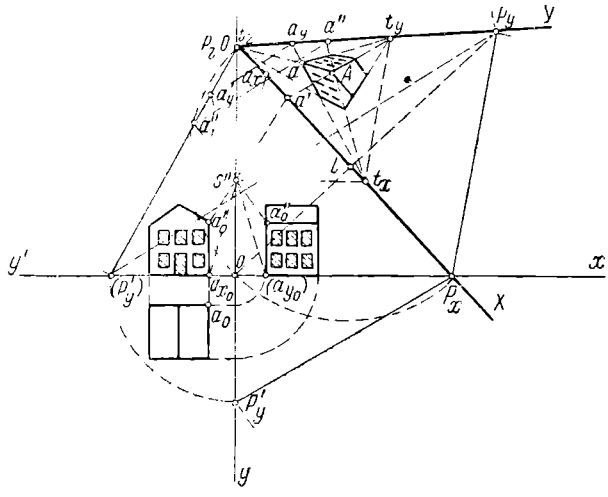


Рис. 9

Для определения истинного значения координаты точки A_0 по оси ox — через точку a_x и центр проектирования (s', s'') проводится прямая до пересечения с осью ox в точке a_{x_0}.

Для получения точки a_0' через точки A и t_y проводится прямая до пересечения со следом $p_x p_z$ в точке a', через точки же a' и s' — прямая $a's'$ до пересечения в искомой точке с прямой, проведенной через точку a_{x_0} перпендикулярно к оси ox.

Отрезок $a_{x_0}a_0'$ является вертикальной ортогональной проекцией ребра дома Aa.

Для определения профильной ортогональной проекции того же ребра проведена прямая $t_x a$ до пересечения со следом $p_y p_z$ в точке a_y. Отрезок Oa_y является изображением координаты точки A по оси oy.

Точка a_y перенесена на след p_z (p_y') и определена точка a_y'. При этом вместо дуги окружности использовалась хорда поворота $a_y a_y'$, параллельная хорде поворота $p_y(p_y')$.

Затем через точки a_y' и s' проведена прямая $a_y's'$ до пересечения с осью oy в точке (a_{y_0}). Отрезок $o(a_{y_0})$ является истинным значением координаты точки A по оси oy. Для построения точки a_0'' через точки A

и t_x проводится прямая t_xA до пересечения со следом p_yp_z в точке a'', которая перенесена хордой поворота $a''a_1''$ на след $p_z(p_y')$ и через точки a_1'' и s'' проведена прямая $a_1''s''$ до пересечения в искомой точке с прямой, проведенной через точку (a_{y_0}) перпендикулярно к оси oy.

Отрезок $(a_{y_0})\,a_0''$ является искомой профильной проекцией ребра Aa. По профильной и вертикальной проекциям этого ребра построена его горизонтальная проекция, которая изображается точкой a_0. Так как ребро Aa и весь проектируемый предмет фактически оказывается расположенным в шестом углу пространства и при правильном построении его горизонтальная проекция будет накладываться на вертикальную, то на рис. 9, во избежание такого наложения, вся горизонтальная проекция дома построена по другую сторону оси ox.

Все точки плана и фасадов дома определены построениями, аналогичными описанным выше. Это, в сущности говоря, построения ребер параллелепипеда координат точек по их изображениям и вторичным горизонтальным проекциям.

Таким образом получены все три прямоугольные проекции дома, измеряющиеся в одном и том же масштабе, и если будет известен истинный размер хотя бы одной линии изображенного предмета, то легко определить этот масштаб, а следовательно, и все остальные размеры предмета.

Если на снимке имеется несколько объектов, то такими построениями всегда можно определить их относительное расположение и относительные размеры, даже если неизвестен масштаб снимка. Такими же построениями всегда может быть составлен план местности по перспективному снимку, что имеет большое практическое значение.

На рис. 9 был представлен случай преобразования, когда все три точки схода t_x, t_y и t_z изображений прямых, параллельных координатным осям, располагались в пределах чертежа.

Однако часто одна из точек схода бывает расположена вне пределов чертежа. Путь преобразования такого случая (точка схода t_y расположена вне пределов чертежа) приведен на рис. 10, где дана фотография дома на наклонную плоскость (I, II, III, IV). В пределах чертежа расположены только две точки схода t_x и t_z, поэтому треугольник схода $t_xt_yt_z$ невозможно построить указанным выше путем.

Для построения направления сторон треугольника схода t_xt_y и t_zt_y можно использовать одно из свойств этого треугольника, заключающееся в том, что пересечение его высот — ортоцентр треугольника схода — является так называемой главной точкой картины, т. е. основанием перпендикуляра, опущенного из центра проектирования на плоскость картины.[1] С другой стороны, главная точка снимка всегда располагается в точке пересечения его диагоналей.

Таким образом, определив главную точку картины последним способом, всегда можно построить две высоты треугольника схода, а следовательно, и две неизвестные по направлению его стороны, которые должны быть перпендикулярны соответственно высотам этого треугольника.

На рис. 10 выполнены отмеченные построения для определения направления сторон треугольника схода t_xt_y и t_zt_y. Для этого проведены диагонали I, IV и II, III, в пересечении которых определена

[1] Доказательство этого положения см. у Н. А. Рынина, Перспектива, 1918, стр. 23 и Н. Ф. Четверухина, Введение в высшую геометрию. Учпедгиз, 1935, стр. 178—179.

главная точка снимка C_0. Затем через точки t_z и C_0 проведена одна из высот треугольника схода, а перпендикулярно к ней через точку t_x — одна из искомых сторон треугольника схода $t_x t_y$.

Для построения второй стороны треугольника схода $t_z t_y$ через точки t_x и C_0 проведена вторая высота треугольника, а перпендикулярно к ней через точку t_z — искомая сторона. Имея направления всех трех сторон треугольника схода, можно построить и прямоугольные проекции изображенного на снимке объекта. Путь построения тот же, что и на рис. 9. Но рис. 10 по внешнему виду отличается от предыдущего, так как на нем треугольник следов плоскости картины распо-

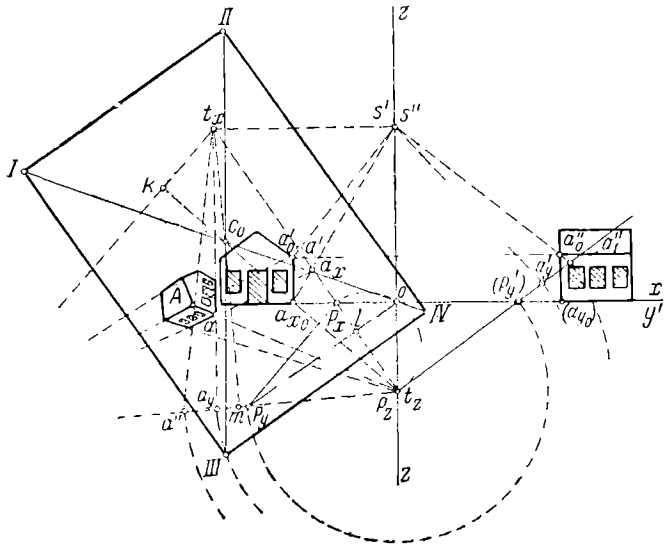


Рис. 10

лагается в седьмом углу пространства. Кроме того, на рис. 10 для построения точек a_y' и a_1'', вместо хорд поворота $a_y a_y'$ и $a'' a_1''$ использованы дуги окружности с центром в точке t_z. На этом чертеже не показано построения плана объекта, что может быть легко выполнено по его двум прямоугольным проекциям.

3. Плоскость картины расположена вертикально

Общая схема фотографирования на вертикальную плоскость представлена на рис. 11, где буквами S, F и H обозначены те же элементы, что на рис. 1 и 6.

Если считать, что центр объектива (точка S) расположен, как и в предыдущих двух случаях, на оси oz, занимающей вертикальное положение, а с поверхностью земли совпадают оси ox и oy, то фотографирование на вертикальную плоскость может рассматриваться как центральное проектирование из центра, расположенного на оси oz, на плоскость, параллельную этой оси (рис. 12).

На рис. 12 по системе координат $oxyz$, плоскости картины $p_x p_y \infty p_z$ и центру проектирования S построены все элементы системы, необходимые для решения задачи центрального проектирования по методу

прямоугольных координат. На чертеже показано построение полного параллелепипеда координат точки, заданной тремя координатами — отрезками oa_{x_0}, oa_{y_0} и oa_{z_0}. Все основные элементы чертежа обозначены теми же буквами, что и на рис. 7

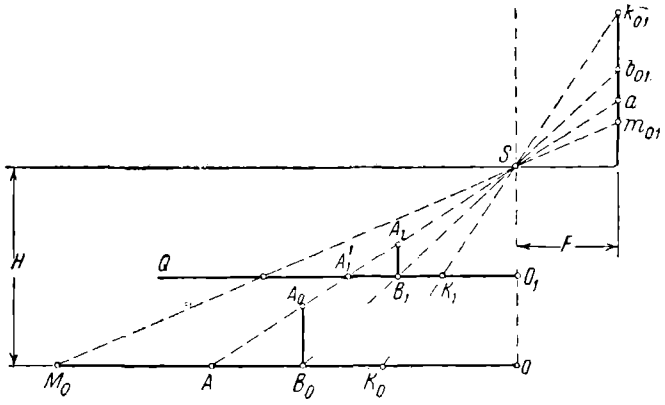


Рис. 11

Отличие рассматриваемого случая от случая подобного же проектирования на плоскость общего положения заключается в том, что точка t_z схода изображений прямых, параллельных оси oz, удаляется в бесконечность. В бесконечность же удаляются изображения начала координат o и оси oz.

На рис. 13 дано плоскостное изображение системы. Все три координатные плоскости и плоскость картины совмещены с плоскостью xoz, при этом плоскость картины повернута вокруг следа $p_x \infty_{p_z}$ в сторону, противоположную началу координат. Все основные элементы обозначены теми же буквами, что и на рис. 8.

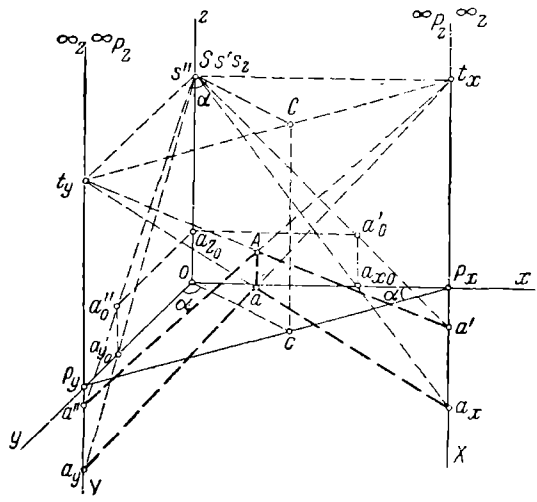


Рис. 12

Вследствие того, что прямая $p_y l$, перпендикулярная следу $p_x \infty_{p_z}$, вокруг которого производится вращение картинной плоскости, при ее совмещении с плоскостью xoz совпадает с осью ox, то эту прямую нельзя использовать для определения положения начала координат (рис. 13). Для его определения необходимо знать угол α наклона картинной плоскости к плоскости xoz.

Чтобы определить угол α, на рис. 12 из центра проектирования S опускаем перпендикуляр SC на плоскость картины. Горизонтальная проекция этого перпендикуляра — oc. Углы cop_y и $p_y p_x o$ — равны, как

углы, образованные взаимно перпендикулярными прямыми ($co \perp p_y p_x$ и $op_x \perp op_y$). Угол же $p_y p_x o = \alpha$ является углом наклона плоскости картины $p_x p_y \infty p_z$ к плоскости xoz.

Прямая SC является расстоянием от центра проектирования до плоскости картины. Оно называется главным расстоянием, точка C — главной точкой картины.

При получении плоскостного изображения системы треугольник $t_x S t_y$ на рис. 13 совмещается с плоскостью картины вращением вокруг прямой $t_x t_y$. Совмещенное положение этого треугольника — $t_x S_0 t_y$, совмещенное положение главной точки — C_0.

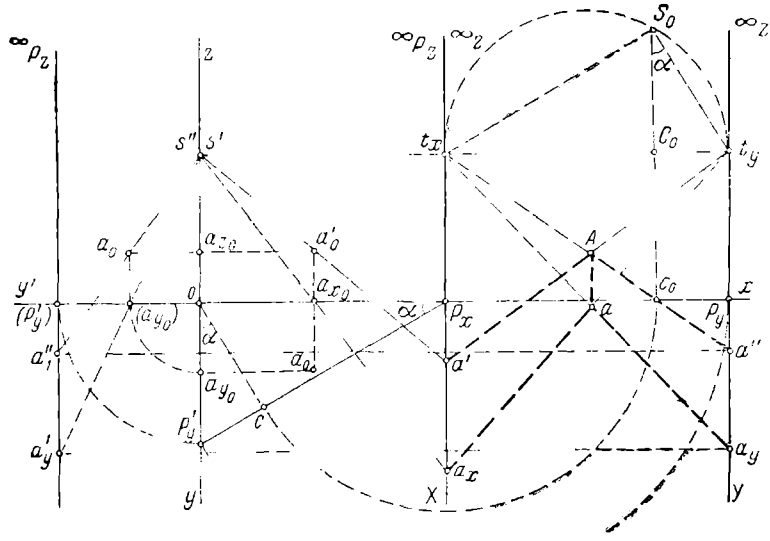


Рис. 13

Так как в пространстве угол $t_x S t_y$ — прямой, то на чертеже угол $t_x S_0 t_y$ представлен вписанным в полуокружность, диаметром которой является отрезок $t_x t_y$.

Таким образом, если будет известна главная точка картины C_0 и отрезок $t_x t_y$, то легко определить и главное расстояние, и угол наклона плоскости картины к плоскости xoz.

Для этого достаточно из точки C_0 восстановить перпендикуляр к линии $t_x t_y$, на которой, как на диаметре, описать дугу половины окружности. Пересечение этой дуги с упомянутым перпендикуляром определит точку S_0. Отрезок $S_0 C_0$ будет главным расстоянием, а угол $t_y S_0 C_0$ — искомым углом наклона.

На основании изложенного можно отметить, что для определения всех основных элементов системы, необходимых для решения задачи центрального проектирования по методу прямоугольных координат, в рассматриваемом случае могут быть известны лишь следующие элементы: 1) треугольник $t_x t_y \infty_z$ с одной вершиной, расположенной в бесконечности; 2) плоскость картины $p_x p_y \infty_{p_z}$; 3) изображения OX, OY и OZ осей ox, oy и oz; 4) главная точка картины C_0. При этом изображение OX должно проходить через точки t_x и p_x, изображение OY — через точки t_y и p_y, а изображение OZ должно быть расположено в бесконечности.

При таких исходных данных построение центра проектирования и координатной системы выполняется следующим путем (рис. 13). Определяется указанным выше способом угол α наклона плоскости картины к плоскости xoz. Он строится при вершине p_x и определяется направление следа $p_x p'_y$. В пересечении этого направления с дугой радиуса $p_x p_y$, проведенной из точки p_x, как из центра, отмечается точка p'_y и через нее проводится прямая yoz, параллельная следам $p_x \infty_{p_z}$ и $p_y \infty_{p_z}$. Ось ox совпадает со следом $p_x p_y$.

Положение центра проектирования определяется в пересечении прямой $t_y t_x$ с осью oz.

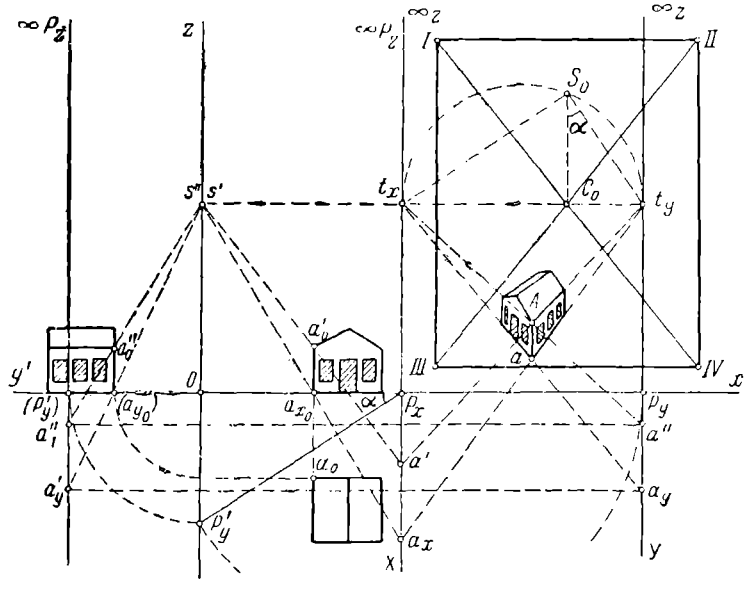


Рис. 14

Рассмотрим, каким образом данный случай может быть использован для решения поставленной выше задачи фотограмметрии. Пусть на рис. 14 дана фотография *I*, *II*, *III*, *IV*, на которой изображен дом, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда.

Требуется определить план, фасады этого дома и его размеры.

Для решения задачи определяем точки схода основных трех взаимно перпендикулярных линий контура дома: t_x, t_y и ∞_z. Главная точка картины C_0 обычно располагается в центре фотографии и на чертеже определена, как точка пересечения диагоналей снимка *I*, *IV* и *II*, *III*.

Имея в виду, что плоскость картины принята параллельной оси oz, на которой расположен центр проектирования, строим плоскость картины $p_x p_y \infty_{p_z}$ так, что след $p_x p_y$ параллелен линии $t_x t_y$, а следы $p_x \infty_{p_z}$ и $p_y \infty_{p_z}$ совпадают с линиями соответственно $t_x \infty_z$ и $t_y \infty_z$. Со следами $p_x \infty_{p_z}$ и $p_y \infty_{p_z}$ совпадают изображения OX и OY осей ox и oy.

При этом следует учесть, что чем больше расстояние между линиями $t_x t_y$ и $p_x p_y$, тем больше масштаб ортогональных проекций объекта, изображенного на снимке. Изменение расстояний между

линиями $t_x t_y$ и $p_x p_y$ соответствует параллельному перемещению прямоугольной системы координат (рис. 11).

После выбора следов плоскости картины определяем угол ее наклона к плоскости *xoz* и строим систему координат *oxyz* и центр проектирования *S*, имея в виду, что плоскость картины была совмещена с плоскостью *xoz* вращением вокруг следа $p_x \infty_{p_z}$ в сторону, противоположную началу координат.

При построении ортогональных проекций объекта надо учесть, что основание дома расположено на поверхности земли, т. е. в координатной плоскости *xoy*.

Таким образом, если рассматривать ребро дома *Aa*, то точка *a* может считаться вторичной горизонтальной проекцией точки, изображением которой является точка *A*. Такое задание позволяет построить три ортогональные проекции этого ребра. Для этой цели точки *A* и *a* соединяются прямыми с точками t_x и t_y и на следах плоскости картины $p_x \infty_{p_z}$ и $p_y \infty_{p_z}$, с которыми совпадают изображения *OX* и *OY* осей *ox* и *oy*, отмечаются точки a'' и a_y, а также a' и a_x.

Перенеся затем точки a_y и a'' на след $(p'_y) \infty_{p_z}$ в положения соответственно a'_y и a''_1, можно построить ортогональные проекции ребра *Aa*. Для построения вертикальной проекции $a_{x_0} a'_0$ этого ребра точки a_x и a' соединяются прямыми с точкой *S* и из точки a_{x_0} пересечения прямой Sa_x с осью *ox* восстанавливается перпендикуляр к этой оси до пересечения с прямой Sa' в точке a''_0.

Для построения профильной проекции $(a_{y_0}) a''_0$ того же ребра точки a'_y и a''_1 соединяются прямыми с центром проектирования *S* и из точки (a_{y_0}) пересечения прямой Sa'_y с осью *oy'* восстанавливается перпендикуляр к этой оси до пересечения с прямой $a''_1 S$ в точке a''_0. Горизонтальной проекцией ребра *Aa* является точка a_0, построенная по найденным вертикальной и профильной проекциям.

Такое построение аналогично построению ребер параллелепипеда координат точки A_0 по данным: изображению точки и ее вторичной горизонтальной проекции (рис. 13).

Подобными же построениями определены все точки плана и фасадов изображенного объекта.

Построенные три ортогональные проекции объекта измеряются в одном и том же масштабе, для определения которого достаточно знать истинный размер хотя бы одной линии изображенного на снимке объекта.

Если на снимке имеется несколько объектов, то всегда подобными же построениями может быть определено их относительное расположение и относительные размеры, даже в том случае, если неизвестен масштаб снимка.

Таким же путем по перспективному снимку может быть построен план местности.

Приведенные примеры преобразований непосредственно могут быть использованы при применении фотограмметрии в архитектурном деле.

Выводы

1. Метод прямоугольных координат вполне определенно устанавливает взаимную связь между различными по характеру методами проектирования — центральным и прямоугольным.

Основой этой взаимной связи является единообразный способ задания основного геометрического элемента — точки — тремя координатами, что выражается в задании точки ее изображением и одной из трех ее вторичных проекций.

2. Взаимная связь позволяет в вопросах преобразования центральных проекций в прямоугольные использовать единообразные простейшие соотношения, имеющие место при проектировании основного геометрического образа — точки.

Использование этих соотношений в равной мере применимо к любому случаю положения плоскости картины относительно координатной системы, что может рассматриваться, как вполне определенная закономерность.

3. Преобразование центральных проекций в прямоугольные может производиться при решении задач фотограмметрии, связанных с определением формы, размеров и положения в пространстве предметов по их фотографиям на плоскости, занимающей любое положение относительно поверхности земли.

Решение таких задач используется в аэрофотосъемке, получившей широкое распространение в народном хозяйстве СССР.

Поступило
16 VI 1952 г.