Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института, том XXIX, вып. 3, 1954 г.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Доц. Т И. Виграненко

1. В настоящей заметке исследуются решения интегро-дифференциального уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(P)\,\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda \int_D K(P,\ P_1)\,v(P_1)\,dP_1, \tag{1}$$

где

$$v(P_1) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(P_1)\,\frac{\partial u}{\partial y_i} + Y_{n+1}(P_1)\,u(P_1)$$

— линейный дифференциальный оператор, коэффициенты которого предположим интегрируемыми функциями в ограниченной области D n-мерного пространства. Предположим, что функции $X_i(P)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы по всем координатам точки $P \subset D$, причем $X_n(P)$ в области D не обращается в нуль. Ядро $K(P,\ P_1)$ и его производные по первым $(n-1)$ координатам точки P предположим регулярными (в смысле теории интегральных уравнений Фредгольма) в рассматриваемой области.

Полагая

$$\int_D K(P,\ P_1)\,v(P_1)\,dP_1 = \varphi(P), \tag{2}$$

рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{\varphi(P)}. \tag{3}$$

Допустим, что из первых n отношений (3) мы нашли систему $(n-1)$ независимых интегралов:

$$\psi_1(P) = C_1,\quad \psi_2(P) = C_2,\quad \ldots,\psi_{n-1}(P) = C_{n-1}. \tag{4}$$

Разрешая систему (4) относительно $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, получим

$$x_1 = f_1(x_n,\ C_1,\ C_2,\ldots,C_{n-1}),\quad \ldots,\ x_{n-1} = f(x_n,\ C_1,\ C_2,\ldots,C_{n-1}). \tag{5}$$

Возьмем в (3) два последних отношения

$$\frac{dx_n}{X_n[P]} = \frac{du}{\lambda\varphi[P]}$$

где символом [ ] обозначен результат замены переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$ их выражениями (5). Отсюда, интегрируя по x_n, получим:

$$u = C_n + \lambda \int_{x_n^0}^{x_n} \frac{\varphi [P]}{X_n [P]}\, dx_n.$$

Или, принимая во внимание (2),

$$u = C_n + \lambda \int_{x_n^0}^{x_n} dx_n \int_D \frac{K([P], P_1)}{X_n (P)}\, v(P_1)\, dP_1,$$

где $x_n^0 \subset D$; C_n — произвольная постоянная.
Меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$u = C_n + \lambda \int_D L(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}; P_1)\, v(P_1)\, dP_1, \tag{6}$$

где

$$L(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}; P_1) = \int_{x_n^0}^{x_n} \frac{K[(P], P_1)}{X_n [P]}\, dx_n. \tag{7}$$

Выполнив в (7) квадратуру и заменив затем $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$ их значениями (4), получим:

$$N(P, P_1) = L(x_n, x_n^0, \psi_1 (P), \ldots, \psi_{n-1} (P); P_1). \tag{8}$$

Уравнение (6), таким образом, принимает следующий вид:

$$u(P) = C_n + \lambda \int_D N(P, P_1) v(P_1)\, dP_1. \tag{9}$$

Относительно ядра N докажем лемму.

Лемма 1. Функция $N(P, P_1)$ для произвольной точки $P \subset D$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = K(P, P_1). \tag{10}$$

Для доказательства продифференцируем равенство (8) по $x_1, \ldots, x_{n-1}$

$$\frac{\partial N}{\partial x_n} = \frac{\partial L}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial L}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n}; \quad \frac{\partial N}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial L}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} \quad (k = 1, \ldots, n-1), \tag{11}$$

при этом, как следует из равенства (7),

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{K(P, P_1)}{X_n (P)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial L}{\partial \psi_k} = \int_{x_n^0}^{x_n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{K(P, P_1)}{(X_n P)} \right) dx_n. \tag{12}$$

Из соотношений (11) находим:

$$\sum_{p=1}^{n} X_p (P) \frac{\partial N}{\partial x_p} = X_n (P) \frac{\partial L}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial L}{\partial \psi_i} \sum_{k=1}^{n} X_k (P) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}$$

Но в силу известных свойств интегралов (4),

$$\sum_{k=1}^{n} X_k(P) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} \equiv 0.$$

Поэтому

$$\sum_{p=1}^{n} X_p(P) \frac{\partial N}{\partial x_p} = X_n \frac{\partial L}{\partial x_n} \equiv K(P, P_1)$$

и лемма доказана.

Лемма 2. Если ядро K имеет в области D регулярные производные по первым $(n-1)$ координатам точки P, то ядро N имеет в той же области регулярные производные по всем n координатам этой точки.

Доказательство этой леммы вытекает из равенств (12) и наших предположений относительно функции $X_n(P)$.

Равенства (4) вместе с (9) дают n интегралов системы (3). Поэтому, взяв произвольное соотношение

$$\Phi(C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

получим интегро-дифференциальное уравнение:

$$u(P) = \psi(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}) + \lambda \int_D N(P, P_1) v(P_1)\, dP_1. \tag{13}$$

Здесь ψ — произвольная функция, которую мы предположим непрерывно дифференцируемой по своим аргументам.

Применяя к функции (13) оператор $v(P)$, получим интегральное уравнение Фредгольма:

$$v(P) = f(P) + \lambda \int_D M(P, P_1) v(P_1)\, dP_1, \tag{14}$$

где

$$M(P, P_1) = \sum_{k=1}^{n} Y_k(P) \frac{\partial N}{\partial x_k} + Y_{n+1}(P) N(P, P_1) \tag{15}$$

$$f(P) = \sum_{k=1}^{n} Y_k(P) \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + Y_{n+1}(P) \psi, \tag{16}$$

причем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

В силу леммы 2, ядро M регулярно в области D.

Пусть $v_0(P)$ есть решение уравнения (14) для произвольного значения λ.

Тогда формула (13), в которой $v(P_1)$ заменено на $v_0(P_1)$, дает общее решение интегро-дифференциального уравнения (1). Для доказательства достаточно подставить (13) в это уравнение и принять во внимание равенства (15), (16) и лемму 1.

Пусть теперь λ' есть собственное число интегрального уравнения

$$v(P) = \lambda \int_D M(P, P_1)\, v(P_1)\, dP_1 \qquad (18)$$

ранга q и

$$v_k(P) = \lambda' \int_D M(P, P_1)\, v_k(P_1)\, dP_1 \qquad (k = 1, \quad , q) \qquad (19)$$

— соответствующие этому числу собственные функции.

Система функций

$$u_k(P) = \lambda' \int_D N(P, P_1)\, v_k(P_1)\, dP_1 \qquad (k = 1, 2, \quad ., q) \qquad (20)$$

удовлетворяет уравнению (1) при $\lambda = \lambda'$ Для доказательства этого достаточно подставить (20) в (1) и учесть равенства (15) и (19), а также принять во внимание лемму 1. Функции (20) обладают почти всеми свойствами собственных функций интегральных уравнений. Легко проверить, что формулы (20) допускают следующие обращения:

$$v_k(P) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(P) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + Y_{n+1}(P)\, u_k(P). \qquad (21)$$

Отсюда непосредственно следует, что функции системы $\{u_k\}$ в рассматриваемой области не обращаются тождественно в нуль, ибо в противном случае обращались бы в нуль в той же области функции системы $\{v_k\}$.

Формулы (20) и (21) устанавливают взаимно однозначное соответствие между системами $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ Поэтому из единственности и полноты системы $\{v_k\}$ вытекает единственность и полнота системы $\{u_k\}$.

Так же просто доказать линейную независимость системы функций $\{u_k\}$. Допустим обратное. Пусть существует соотношение

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \quad . + \alpha_q u_q = 0,$$

где не все α_k есть нули. Отсюда, в силу (20), находим

$$\int_D N(P, P_1)\, \omega(P_1)\, dP_1 = 0, \qquad (22)$$

где

$$\omega(P) = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k v_k(P) \not\equiv 0.$$

Но из (19) следует

$$\omega(P) = \lambda' \int_D M(P, P_1)\, \omega(P_1)\, dP_1. \qquad (23)$$

Если продифференцировать (22) по $x_1, \ldots, x_n$, умножить полученные равенства соответственно на $Y_1, \ldots Y_n$ и затем сложить результат, то получим

$$\int_D M(P, P_1)\, \omega(P_1)\, dP_1 = 0.$$

Сопоставляя последнее равенство с (23), мы замечаем, что

$$\omega(P) = 0.$$

Полученное противоречие доказывает линейную независимость системы (20).

Наконец, если $\lambda = \lambda'$, то можно построить и более общее чем (20) решение уравнения (1). Таким решением будет

$$u(P) = \psi(\psi_1, \quad ., \psi_{n-1}) + \lambda' \int_D N(P, P_1)\, v^{(0)}(P_1)\, dP_1 + \sum_{i=1}^{q} A_i u_i(P), \quad (24)$$

где $v^{(0)}(P)$ — решение неоднородного уравнения (14) при $\lambda = \lambda'$;

A_i — произвольная постоянная.

Решение (24) существует только в том случае, если выполняются условия ортогональности:

$$\int_D f(P)\, \Phi_k(P)\, dP = 0, \qquad (k = 1, \quad ., q), \quad (25)$$

где $\Phi_k(P)$ — собственные функции союзного с (18) интегрального уравнения, отвечающие значениям $\lambda = \lambda'$

Учитывая равенство (16), условия (25) запишем в виде

$$\int_D \Phi_p(P) \left[\sum_{k=1}^{n} Y_k(P) \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + Y_{n+1}(P)\, \psi \right] dP = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, q).$$

Отсюда, вследствие произвольности ψ, вытекает, что условия (25) будут наверное удовлетворены для всех $\Phi_k(P)$ сразу, если функция ψ является решением уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} Y_k(P) \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + Y_{n+1}(P)\, \psi = 0. \quad (26)$$

Пусть $\psi_0(P)$ есть такое решение. Тогда при $\lambda = \lambda'$ интегро-дифференциальному уравнению (1) будет удовлетворять функция

$$u(P) = \psi_0(P) + \sum_{i=1}^{q} A_i u_i(P). \quad (27)$$

Действительно, как следует из (26), функция $\psi_0(P)$, с одной стороны, обращает в нуль подинтегральный оператор $v(P)$ в уравнении (1), с другой — удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(P) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Следовательно, $\psi_0(P)$ является решением уравнения (1) при любом λ. Далее, по доказанному, функция

$$\sum_{i=1}^{q} A_i u_i(P)$$

удовлетворяет уравнению (1) при $\lambda = \lambda'$

Поэтому функция (27) является решением уравнения (1), когда $\lambda = \lambda'$.

2. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + X_{n+1} u(P) = \lambda \int_D K(P, P_1)\, v(P_1)\, dP_1. \quad (28)$$

Непосредственно к этому уравнению предыдущий метод не може быть применим. Наложим на коэффициенты X_i, Y_i и ядро K те ж ограничения, что в случае уравнения (1).

Определим функцию $w(P)$ следующим соотношением:

$$U(P) = \omega(P)\, w(P), \tag{29}$$

где $\omega(P)$ — функция точки P подлежит определению. Дифференцируя равенство (29) по x_1, x_2, $\ldots$, x_n, составим выражение левой части уравнения (28)

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + X_{n+1} u(P) = \omega(P) \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial w}{\partial x_i} + \left(X_{n+1}\omega + \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right) w.$$

Подчиним затем функцию $\omega(P)$ условию:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} + X_{n+1}\omega = 0. \tag{30}$$

Пусть $\omega(P) = \omega_0(P)$ какое-нибудь частное решение уравнения (30)

Тогда легко находим следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + X_{n+1} u = \omega_0 \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial w}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} Z_i(P) \frac{\partial w}{\partial x_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + Y_{n+1} u = \sum_{i=1}^{n} T_i \frac{\partial w}{\partial y_i} + T_{n+1} w,$$

где

$$Z_i = \omega_0(P)\, X_i(P); \qquad T_i(P_1) = \omega_0(P_1)\, Y_i(P_1);$$

$$T_{n+1}(P_1) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(P_1) \frac{\partial \omega_0}{\partial y_i}$$

После этого интегро-дифференциальное уравнение (28) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i(P) \frac{\partial w}{\partial x_i} = \lambda \int_D K(P, P_1) \left[T_{n\ 1}(P_1)\, w(P_1) + \sum_{i=1}^{n} T_i(P_1) \frac{\partial w}{\partial y_i} \right] dP_1. \tag{31}$$

Как следует из условий теоремы существования для уравнения в част ных производных первого порядка, функция $\omega_0(P)$ при тех ограни чениях, которые мы наложили на коэффициенты, непрерывна и не прерывно дифференцируема в D. Следовательно, таким же свойство обладают и коэффициенты $Z_i(P)$. Функции $T_i(P)$, очевидно, интегри руемы в D, так как мы предположили интегрируемыми функции $Y_i(P$ в этой области. Поэтому к уравнению (31) применим полностью из ложенный выше способ решения.

3. Поставим теперь задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения (1) так, как она ставится для линейного уравнения в част ных производных первого порядка с n независимыми перемен ными x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

Требуется найти решение интегро-дифференциального уравне ния (1), которое при $x_n = x_n^0$ обращается в данную дифференцируе мую функцию

$$u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \tag{32}$$

При этом мы предположим, что φ определена в окрестности точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0)$ и $X_n(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \neq 0$.[1] Для решения этой задачи выпишем снова интегралы (4) и (9) системы (3):

$$\psi_1(P) = C_1, \ \psi_2(P) = C_2, \ \ldots, \psi_{n-1}(P) = C_{n-1},$$

$$u = \lambda \int_D N(P, P_1)\, v(P_1)\, dP_1 = C_n. \tag{33}$$

Следуя общей схеме решения задачи Коши для линейного уравнения в частных производных первого порядка, положим в равенствах (33) $x_n = x_n^0$. Тогда, принимая во внимание равенство (7), будем иметь

$$\psi_1(\overline{P}) = \overline{\psi}_1, \ \psi_2(\overline{P}) = \overline{\psi}_2, \ \ldots, \psi_{n-1}(\overline{P}) = \overline{\psi}_{n-1}; \ u = \overline{\psi}_n, \tag{34}$$

где

$$\psi_i(\overline{P}) = \psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; x_n^0) = \overline{\psi}_i.$$

Разрешая первые $(n-1)$ уравнений (34) относительно $x_1, \ldots, x_n$, получим

$$\left.\begin{aligned} u &= \overline{\psi}_n \\ x_i &= \omega_i(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}) \end{aligned}\right\}. \tag{35}$$

Следовательно, равенство (32) с учетом соотношений (35) можно записать в виде

$$\overline{\psi}_n = \varphi(\omega_1(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1})).$$

Если в этом соотношении величины $\overline{\psi}_i$ заменить величинами ψ_i, входящими в левые части равенств (33), то получим формулу, дающую решение поставленной задачи:

$$u(P) = \varphi(\omega_1(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})) + \lambda \int_D N(P, P_1)\, v(P_1)\, dP_1. \tag{36}$$

Так как при $x_n = x_n^0$ ядро $N(P, P_2)$ обращается в нуль, то при $x_n = x_n^0$, в силу (35), это решение обращается в заданную функцию $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Кроме того, ядро N по всем координатам точки P обладает регулярными производными в рассматриваемой области. Поэтому решение (36) есть дифференцируемая функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Уравнение (36), подобно уравнению (13), может быть преобразовано к интегральному уравнению Фредгольма:

$$v(P) = \omega(P) + \lambda \int_D M(P, P_1)\, v(P_1)\, dP_1, \tag{37}$$

где $M(P, P_1)$ определяется равенством (15), а функция ω имеет следующий вид:

$$\omega(P) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(P) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + Y_{n+1}(P)\, \varphi,$$

---

[1] Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1945, стр. 648.

причем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_i} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial \psi_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}$$

Пусть $v^{(0)}(P)$ есть решение уравнения (37) для произвольных значений λ. Тогда решение задачи Коши для уравнения (1) при этих λ определяется формулой:

$$u(P) = \varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}) + \lambda \int_D N(P, P_1)\, v^{(0)}(P_1)\, dP_1.$$

Это решение единственное, в силу единственности решения $v^{(0)}(P)$ уравнения (37) и однозначности функции N, определяемой равенством (8).

В случае, когда λ' есть собственное число уравнения (18) ранга q и выполняются условия ортогональности

$$\int_D \Phi_k(P)\, \varphi(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})\, dP = 0, \tag{38}$$

где $\Phi_k(P)$ имеет тот же смысл, что и в равенстве (25), то задача Коши для уравнения (1) имеет бесконечное множество решений. Все они определяются формулой (24), в которой надо только заменить произвольную функцию ψ на заданную функцию φ. Если условия (38) не выполняются, то для $\lambda = \lambda'$ рассматриваемая задача Коши не имеет решений.

4. Задачу Коши для уравнения (1) рассмотрим еще в следующей постановке.

Найти интегральную поверхность, содержащую заданное $(n-1)$-мерное многообразие

$$\begin{aligned} x_k &= \varphi_k(t_1, \ldots, t_{n-1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \\ u &= \varphi(t_1, \ldots, t_{n-1}), \end{aligned} \tag{39}$$

где φ_k и φ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по всем t_k и определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_n \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_{n-1}} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \tag{40}$$

на многообразии (39) отличен от нуля.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dS} = X_k(P), \quad \frac{du}{dS} = \lambda \int_D K(P, P_1)\, v(P_1)\, dP_1 \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{41}$$

Допустим, что из первых n уравнений мы нашли интегралов этой системы:

$$x_k(S, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть вдоль некоторой характеристики системы (41), проходящей через точку $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, функции x_k принимают значения

$$x_k = x_k(S, x_1^0, \ldots, x_n^0) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{42}$$

Подставим эти значения x_k в последнее уравнение (41) проинтегрируем по S в пределах от 0 до S. Получим

$$u = u_0 + \lambda \int_D v(P_1)\, dP_1 \int_0^S K([P],\ P_1)\, dS,$$

где символом $[P]$ обозначен результат замены координат точки P их значениями (42).

Вычислив интеграл $\int_0^S K([P],\ P_1)\, dS$ и взяв в качестве начальных данных многообразие (39), получим $(n+1)$ интегралов системы (41):

$$x_k = x_k(S,\ t_1,\ \ldots\ t_{n-1}) \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots\ n) \tag{43}$$

$$u = u(t_1,\ \ldots\ t_{n-1}) + \lambda \int_D L(S,\ t_1,\ \ldots\ t_{n-1};\ P_1)\, v(P_1)\, dP_1, \tag{44}$$

где $L(S,\ t_1,\ \ldots\ t_{n-1};\ P_1)$ при $S = 0$ обращается в нуль. Разрешая систему (43) относительно S и t_k, найдем:

$$\left.\begin{aligned} S &= S(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n) \\ t_k &= t_k(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n) \end{aligned}\right\}. \tag{45}$$

Подставляя (45) в уравнение (44), получим следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$u(P) = \psi(P) + \lambda \int_D N(P,\ P_1)\, v(P_1)\, dP_1, \tag{46}$$

где

$$\psi(P) = u(t_1(P),\ \ldots\ t_{n-1}(P)),$$
$$N(P,\ P_1) = L(S(P),\ t_1(P),\ \ldots\ t_{n-1}(P)).$$

При $S = 0$ соотношения (43) и (44) переходят в (39). Но первое из равенств (45) при $S = 0$ дает

$$S(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n) = 0.$$

Отсюда, например, находим, что

$$x_n = \omega(x_1,\ \ldots\ x_{n-1}). \tag{47}$$

Так как

$$N(x_1,\ \ldots\ x_{n-1},\ \omega(x_1,\ \ldots\ x_{n-1});\ P_1) = 0,$$

замена в уравнении (46) x_n на $\omega(x_1,\ \ldots\ x_{n-1})$ приводит его к виду:

$$u = \psi(x_1,\ \ldots\ x_{n-1},\ \omega(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})) = g(x_1,\ \ldots\ x_{n-1}). \tag{48}$$

Из самой конструкции функции $N(P,\ P_1)$ следует, что она для произвольной, но фиксированной точки $P_1 \subset D$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (10). Таким образом, вместо задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными (39) мы имеем равносильную задачу: найти решение уравнения (46), которое при $x_n = \omega(x_1,\ \ldots\ x_{n-1})$ обращается в заданную дифференцируемую функцию $g(x_1,\ \ldots\ x_{n-1})$.

Покажем, что ее решение дает действительно решение задачи Коши для уравнения (1) с начальным многообразием (39). Пусть $u_0(P)$ есть решение уравнения (46) при некотором значении λ. Тогда

$$u_0(P) \equiv \psi(P) + \lambda \int_D N(P, P_1)\, v(u_0)\, dP_1, \tag{49}$$

причем

$$u_0(x_1, \quad x_{n-1}, \omega(x_1, \quad x_{n-1})) \equiv g(x_1, \quad x_{n-1}).$$

Применяя к тождеству (49) оператор $X = \sum_{k=1}^{n} X_k(P) \frac{\partial}{\partial xk}$, получим в силу (10)

$$X[u_0] \equiv \lambda \int_D K(P, P_1)\, v(u_0)\, dP_1, \quad X[\psi] \equiv 0.$$

Применяя к тому же тождеству оператор v, будем иметь:

$$v(u_0) = \Phi(P) + \lambda \int_D Q(P, P_1)\, v(u_0)\, dP_1,$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Phi(P) = v(\psi) &= \sum_{k=1}^{n} Y_k(P) \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + Y_{n+1}(P)\, \psi(P), \\ Q(P, P_1) = v(N) &= \sum_{k=1}^{n} Y_k(P) \frac{\partial N}{\partial x_k} + Y_{n+1}(P)\, N(P, P_1) \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Иначе говоря, подстановка $u_0(P)$ в уравнении (1) приводит к тождеству

$$\int_D K(P, P_1) \left[v(u_0) - \Phi(P_1) - \lambda \int_D Q(P, P_1)\, v(u_0)\, dP_2 \right] dP_1 \equiv 0.$$

Чтобы фактически найти решение уравнения (46), преобразуем его к интегральному уравнению Фредгольма

$$Z(P) = \Phi(P) + \lambda \int_D Q(P, P_1)\, Z(P_1)\, dP_1, \tag{51}$$

где Φ и Q определяются равенствами (50).

Отсюда вытекают следующие результаты.

Пусть λ произвольно и $Z_0(P)$ — решение интегрального уравнения (51) при этом значении λ. Тогда уравнение (1) с начальным многообразием (39) имеет единственное решение

$$u(P) = \psi(P) + \lambda \int_D N(P, P_1)\, Z_0(P_1)\, dP_1,$$

причем

$$u(x_1, \quad x_{n-1}, \omega) \equiv g(x_1, \quad , x_{n-1}).$$

Пусть λ' есть собственное число ядра Q, q — его ранг и $Z_k(P)$ — собственные функции, соответствующие λ'. Если $Z^0(P)$ есть решение

уравнения (51) при $\lambda = \lambda_1'$ то задача Коши для уравнения (1) имеет решение:

$$u(P) = \psi(P) + \lambda' \int_D N(P, P_1) Z^0(P_1) dP_1 + \sum_{k=1}^{q} A_k v_k(P),$$

где v_k определяются формулами, аналогичными (20), и при $x_n = \omega(x_1, \ldots, x_{n-1})$ обращаются в нуль.

Это решение зависит от q произвольных параметров. Если при $\lambda = \lambda'$ уравнение (51) не имеет решений, то и рассматриваемая задача Коши не имеет решений.

Наконец заметим, что если определитель (40) на многообразии (39) обращается в нуль, то система (43) не разрешима, или разрешима неоднозначно относительно S и t_k. Поэтому в уравнение (46) будут входить произвольные параметры. Следовательно, если начальное многообразие (39) является характеристическим, то уравнение (1) не имеет ни одного, или имеет бесконечное множество решений.

Поступило
16 V 1952 г.