Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института, том XXIX, вып. 3, 1954 г.

О ВЕРОЯТНОСТИ СИЛЬНО ФЛУКТУИРУЮЩИХ ВЕЛИЧИН

Доц. М. Л. Вержбинский,
проф. О. В. Сарманов,
доц. Р. Э. Соловейчик

1. Введение

Во многих экспериментальных исследованиях наличие какого-либо явления констатируется путем наблюдения „сигнала", т. е. путем установления того, что осуществляется некоторое, как мы будем говорить, элементарное событие A. Однако это элементарное событие может быть вызвано и причинами побочными, не связанными с изучаемым явлением. В таком случае лишь повторные появления события A позволят с достаточной уверенностью судить о наличии изучаемого явления.

Проведем серию n опытов, где событие A может появиться с некоторой вероятностью p (вообще говоря, меняющейся от опыта к опыту). Интересующее нас явление (осуществление этого явления назовем событием M) может быть в разной степени связано с элементарным событием A. Естественно считать, что между событием M и элементарным событием A существует довольно слабая зависимость, если для получения уверенности в осуществлении M нужно при n испытаниях наблюдать A достаточно часто (например, хоть однажды t раз подряд).

Наоборот, между событиями M и A существует более сильная зависимость, если для уверенности в осуществлении M достаточно наблюдать событие A в серии n испытаний сравнительно редко. Так, например, зависимость будет более сильной, чем в предыдущем примере, если для осуществления M достаточно, чтобы два каких-либо последовательных появления элементарного события A были бы разделены не более чем k непоявлениями его, т. е. в серии n наблюдений хоть один раз появился бы ряд

$$.\,A\underbrace{\bar{A}\bar{A}.\ .\bar{A}}_{s\text{ раз }(s\leqslant k)}A.\qquad(1)$$

Во всех случаях конкретно заданных зависимостей событий M и A возникает основной вопрос, какова вероятность P_n осуществления события M в серии n опытов, если вероятности p элементарного события A известны?

Очевидно, вероятность P_n должна равняться вероятности той комбинации появлений элементарного события A в проводимой серии n испытаний, которая в каждом рассматриваемом случае гарантирует осуществление события M.

В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением лишь трех типов зависимости событий M и A, наиболее важных для приложений.

Зависимость типа I. Событие M осуществляется, если при n испытаниях между двумя появлениями элементарного события (событие A) будет ровно t его непоявлений (событие $\overline{A}$) подряд. В этом случае событие M обозначим символом $M_{10^t1}^{(n)}$.

Зависимость типа II. Событие M осуществляется, если при n испытаниях хоть один раз два появления элементарного события (событие A) будут разделены не более чем k непоявлениями его (событие $\overline{A}$), следующими подряд.

Событие M в этом случае обозначим символом $M^{(n)}(k)$.

Зависимость типа III. Событие M наступает, если в серии n испытаний элементарное событие A появляется хоть однажды t раз подряд.

В данном случае M обозначается через $M_{1^t}^{(n)}$ Ниже решается задача о нахождении P_n для каждого из перечисленных случаев.

2. Решение в схеме Бернулли

Пусть вероятность появления элементарного события A постоянна во всех n независимых опытах. Таким образом, независимо от номера опыта в серии n испытаний

$$P(A) = p, \quad P(\overline{A}) = 1 - p = q.$$

Обозначим через Q_n вероятность события $\overline{M}$, противоположного M. Так как $Q_n + P_n = 1$, задача будет решена, если мы найдем выражение Q_n в зависимости от величин p и n.

Событие $\overline{M}$ наступает в двух случаях: 1) когда в первом опыте осуществляется элементарное событие A; 2) когда в первом опыте появляется $\overline{A}$. Соответствующие условные вероятности события $\overline{M}$ обозначим через Q_n^+ и Q_n^-. Полная вероятность Q_n события $\overline{M}$ равна сумме

$$Q_n = Q_n^+ + Q_n^-. \tag{2}$$

Легко видеть, что условная вероятность Q_n^- вычисляется по формуле

$$Q_n^- = qQ_{n-1}. \tag{3}$$

Тогда условная вероятность Q_n^+, как это следует из (2) и (3), получает следующее выражение:

$$Q_n^+ = Q_n - qQ_{n-1}. \tag{4}$$

Обратимся к конкретным заданиям зависимости между событием M и элементарным событием A.

Зависимость типа I. Рассматриваемое здесь событие $\overline{M}_{10^t1}^{(n)}$ произойдет с условной вероятностью Q_n^-, если исходом первого опыта окажется $\overline{A}$. При этом, для осуществления в серии n испытаний события $\overline{M}_{10^t1}^{(n)}$ необходимо и достаточно, чтобы в результате серия последующих $n-1$ испытаний (2-го, 3-го n-го) осуществилось событие $\overline{M}_{10^t1}^{(n-1)}$. Вероятность этого частного случая события $\overline{M}_{10^t1}^{(n)}$ равна

$Q_n^- = qQ_{n-1}$. Событие $\overline{M}_{10^t1}^{(n)}$ осуществится с условной вероятностью Q_n^+, если исходом первого испытания окажется A. Но так как $\overline{M}_{10^t1}^{(n)}$ состоит в том, что никакие два последовательные появления события A в серии n опытов не разделены равно t появлениями $\overline{A}$, это произойдет в любом из следующих случаев.

1. Когда после первого опыта $t+1$ раз осуществляется $\overline{A}$, а серия последующих $n-(t+2)$ испытаний приводит к осуществлению события $\overline{M}_{10^t1}^{(n-t-2)}$. Вероятность этого частного случая события $\overline{M}_{10^t1}^{(n)}$ будет

$$pq^{t+1}Q_{n-(t+2)}.$$

2. Когда после первого опыта s раз ($s=0,\ 1,\ \ldots\ t-1$) появляется $\overline{A}$, а в результате последующей серии $n-(s+1)$ испытаний осуществляется событие $\overline{M}_{10^t1}^{(n-s-1)}$, при условии, что исходом первого из этих $n-(s+1)$ испытаний явится событие A. Вероятности этих частных случаев равны $pq^sQ_{n-(s+1)}^t$, ($s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ t-1$), или, согласно формуле (4),

$$pq^sQ_{n-(s+1)}^+ = pq^sQ_{n-(s+1)} - pq^{s+1}Q_{n-(s+2)};\ (s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ t-1).$$

Таким образом,

$$Q_n^+ = pq^{t+1}Q_{n-(t+2)} + \sum_{s=0}^{t-1}(pq^sQ_{n-(s+1)} - pq^{s+1}Q_{n-(s+2)}).$$

Событие $\overline{M}_{10^t1}^{(n)}$ оказалось разбитым на $t+2$ частных случая (табл. 1)

Таблица 1

Номер частного случая	Номер опыта									Вероятности частных случаев	
	1	2	...	$s+1$	$s+2$	...	$t+2$	$t+3$	... n		
1	$\overline{A}$	событие $\overline{M}$								qQ_{n-1}	Q_n^-
2	A	$\overline{A}$	...	$\overline{A}$	$\overline{A}$		$\overline{A}$	Событие $\overline{M}$		$pq^{t+1}Q_{n-t+2}$	Q_n^+ =
$s+3$ ($s=0,1,2,\ldots t-1$)	A	$\overline{A}$		$\overline{A}$	Событие $\overline{M}$, при условии, что первые испытания дает A					$pq^sQ_{n-(s+1)}^+ = pq^sQ_{n-(s+1)} - pq^{s+1}Q_{n-(s+2)}$	

Тогда вероятность Q_n события $\overline{M}_{10^t1}^{(n)}$ окажется равной

$$Q_n = Q_n^- + Q_n^+ = qQ_{n-1} + pq^{t+1}Q_{n-(t+2)} + \sum_{s=0}^{t-1}pq^sQ_{n-(s+1)} - \sum_{s=0}^{t-1}pq^{s+1}Q_{n-(s+2)},$$

откуда легко получается уравнение в конечных разностях для Q_n

$$Q_n - Q_{n-1} + pq^tQ_{n-(t+1)} - pq^{t+1}Q_{n-(t+2)} = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) оказывается линейным однородным с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение будет

$$x^{t+2} - x^{t+1} + pq^tx - pq^{t+1} = 0. \qquad (6)$$

Общее решение уравнения (5) представится в форме

$$Q_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n + \ldots + C_{t+2} x_{t+2}^n, \qquad (7)$$

где x_1, x_2, x_{t+2} — корни характеристического уравнения.[1]

Для определения произвольных постоянных в формуле (7) имеем начальные условия

$$Q_0 = Q_1 = \ldots = Q_{t+1} = 1, \qquad (8)$$

вытекающие из того, что событие $\overline{M}_{10^{t}1}^{(m)}$ будет невозможным событием, если $m < t+2$, а, следовательно, событие $\overline{M}_{10^{t}1}^{(m)}$, при тех же условиях, окажется событием достоверным.

Зависимость типа II. Задачу об определении Q_n в случае зависимости типа II между M и элементарным событием A можно решить, исходя из того, что

$$M^{(n)}(k) = M_{10^{0}1}^{(n)} \text{ или } M_{10^{1}1}^{(n)}, \text{ или } M_{10^{2}1}^{(n)}, \text{ или } \ldots \text{ или } M_{10^{k}1}^{(n)}$$

Однако такой путь решения будет не самым экономным. Результат достигается более просто, если составить уравнение непосредственно в конечных разностях для Q_n, действуя так же, как в предыдущем случае.

Для этого событие $\overline{M}^{(n)}(k)$ разбиваем (табл. 2) на частные случаи (их два).

Таблица 2

Номер частного случая	Номер опыта							Вероятность частных случаев
	1	2	...	$k+2$	$k+3$	...	n	
1	$\overline{A}$	Событие $\overline{M}$						$Q_n^- = qQ_{n-1}$
2	A	$\overline{A}$	...	$\overline{A}$	Событие $\overline{M}$			$Q_n^+ = pq^{k+1}Q_{n-(k+2)}$

Тогда

$$Q_n = Q_n^- + Q_n^+ = qQ_{n-1} + pq^{k+1}Q_{n-(k+2)},$$

откуда получаем уравнение в конечных разностях для Q_n

$$Q_n - qQ_{n-1} - pq^{k+1}Q_{n-(k+2)} = 0. \qquad (9)$$

Его характеристическое уравнение

$$x^{k+2} - qx^{k+1} - pq^{k+1} = 0. \qquad (10)$$

Общее решение уравнения (9) будет

$$Q_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n + \ldots + C_{k+2} x_{k+2}^n, \qquad (11)$$

где x_1, x_2, x_{k+2} — корни уравнения (10) (см. подстрочное примечание по поводу формулы (7)).

---

[1] Для простоты записи приводится решение уравнения (5) в предположении что характеристическое уравнение (6) не имеет кратных корней. Если это не так, в формуле (7) необходимо ввести общеизвестные изменения (А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей, ОНТИ, 1936).

Постоянные C_1, C_{k+2} определяются из начальных условий

$$Q_0 = Q_1 = Q_2 = \quad = Q_{k+1} = 1. \tag{12}$$

Зависимость типа III. Событие $M_1^{(n)}$ разбивается на t частных случаев, сведенных в табл. 3.

Таблица 3

Номер частного случая	Номер опыта							Вероятности частных случаев	
	1	2	...	$s+1$	$s+2$		n		
1	$\bar{A}$	Событие $\bar{M}$						qQ_{n-1}	Q_n^-
$s+2$ ($s=0, 1, 2, t-2$)	A	A	...	A	Событие $\bar{M}$, при условии, что первое испытание дает $\bar{A}$			$p^{s+1}Q_{n-(s+1)}^- = p^{s+1}qQ_{n-(s+2)}$	$\Sigma = Q_n^+$

Тогда

$$Q_n = Q_n^- + Q_n^+ = qQ_{n-1} + q\sum_{s=0}^{t-2} p^{s+1}Q_{n-(s+2)} = q\sum_{s=0}^{t-1} p^s Q_{n-(s+1)}$$

Отсюда для Q_n получаем уравнение в конечных разностях:

$$Q_n - q\sum_{s=0}^{t-1} p^s Q_{n-(s+1)} = 0. \tag{13}$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$x^n - q\sum_{s=0}^{t-1} p^s x^{n-(s+1)} = 0.$$

Сокращая на x^{n-t}, имеем

$$x^t - q\frac{x^t - p^t}{x-p} = 0. \tag{14}$$

Общее решение уравнения (13):

$$Q_n = C_1x_1^n + C_2x_2^n + \quad + C_tx_t^n, \tag{15}$$

где x_1, x_2, .. x_t — корни (14) (см. подстрочное примечание по поводу формулы (7)).

Начальные условия так же, как и в предыдущих случаях, выражаются равенствами

$$Q_0 = Q_1 = Q_2 = \quad + Q_{t-1} = 1. \tag{16}$$

3. Численные примеры

Приведем несколько конкретных примеров, иллюстрирующих решение задачи в схеме Бернулли.

Пример 1. Исследовать изменение $P_n = P(M_{12}^{(n)})$ в зависимости от p и n.

Характеристическое уравнение (14) в данном случае принимает вид:

$$x^2 - qx - qp = 0.$$

Корни его суть

$$x_1 = \frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q(q+4p)} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{q(q+4p)}$$

Так как событие $\bar{A}$ не есть достоверное событие, то $q \neq 0$ и значит $q(q+4p) > 0$.

Следовательно, корни x_1 и x_2 окажутся вещественными некратными. Тогда решение уравнения (13) будет:

$$Q_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n$$

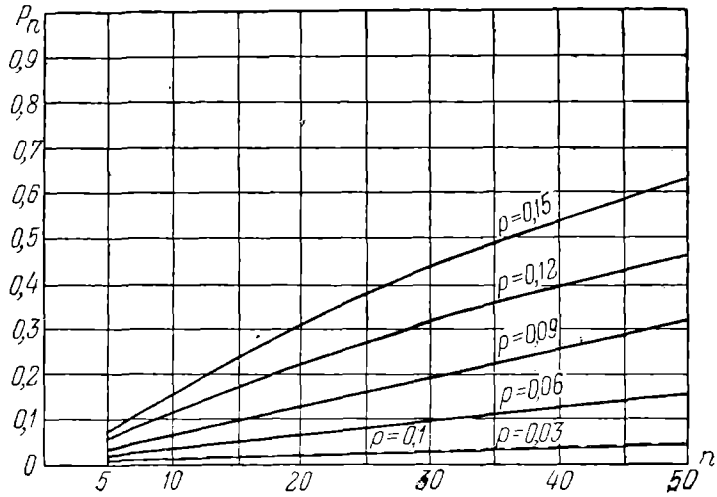


Рис. 1

Определив C_1 и C_2 из начальных условий $Q_0 = Q_1 = 1$, получим

$$Q_n = \frac{1 - x_2}{x_1 - x_2} x_1^n + \frac{1 - x_1}{x_2 - x_1} x_2^n$$

Придавая p значения 0,03, 0,06, 0,09, 0,12, 0,15 и изменяя n от 5 до 50, построим систему кривых, показывающую изменение вероятности события $M_{13}^{(n)}$ для перечисленных значений вероятности элементарного события A на интересующем нас диапазоне n (рис. 1).

Пример 2. Исследовать изменение $P_n = P(M_{13}^{(n)})$ при различных p и n.

В рассматриваемом случае характеристическое уравнение (14) принимает вид:

$$x^3 - qx^2 - pqx - p^2q = 0.$$

Это уравнение имеет один вещественный и два комплексных корня. Тогда общее решение уравнения (13) соответственно запишется:

$$Q_n = C_1\alpha^n + C_2 g^n \cos n\varphi + C_3 g^n \sin n\varphi,$$

где α — вещественный корень характеристического уравнения;

g — модуль, а φ — аргумент его комплексных корней.

Находим C_1, C_2 и C_3 из начальных условий (16)

$$C_1 = \frac{1 - 2g\cos\varphi + g^2}{\alpha^2 - 2g\alpha\cos\varphi + g^2};\quad C_2 = 1 - C_1;\quad C_3 = \frac{1 - C_1\alpha - C_2 g\cos\varphi}{g\sin\varphi}$$

Вычисляя α, g и φ (для заданных p), замечаем, что α всегда превосходит g, благодаря чему главным членом (при больших n) в выражении Q_n является первое слагаемое. Таким образом, получаем:

при $p = 0{,}03$ $Q_n \simeq 1{,}00009\,(0{,}99995)^n$

$p = 0{,}1$ $Q_n \simeq 1{,}00171\,(0{,}99910)^n$

„ $p = 0{,}2$ $Q_n \simeq 1{,}01181\,(0{,}99346)^n$

„ $p = 0{,}5$ $Q_n \simeq 1{,}13764\,(0{,}91962)^n$.

В табл. 4 приведены значения P_n для $p = 0{,}03$, 0,1, 0,2, 0,5 и $n = 5$, 10, 20, 30, 50, 100. Таблица содержит главный член P_n (первое слагаемое), вычисленный с пятью знаками и оценку суммы второго и третьего слагаемых (Δ).

Таблица 4

p	n					
	5	10	20	30	50	100
0,03	0,00015 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-10}$	0,00040 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-17}$	0,00084 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-33}$	0,00131 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-48}$	0,00221 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-78}$	0,00451 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-155}$
0,1	0,00278 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-6}$	0,00725 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-11}$	0,01613 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-22}$	0,02492 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-32}$	0,04228 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-52}$	0,08433 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-103}$
0,2	0,02088 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-4}$	0,05248 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-8}$	0,11266 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-15}$	0,16902 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-23}$	0,27124 Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-38}$	0,47509 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-75}$
0,5	0,34227 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-2}$	0,56739 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-4}$	0,81285 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-9}$	0,91903 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-13}$	0,98484 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-22}$	0,99977 + Δ $\lvert\Delta\rvert < 10^{-43}$

Табл. 4 иллюстрируется рис. 2, где масштаб (относительно P'_n) для $p = 0{,}03$ и $p = 0{,}1$ указан на правой кромке чертежа, а для $p = 0{,}1$; $p = 0{,}2$ и $p = 0{,}5$ — на левой (кривая, соответствующая $p = 0{,}1$, построена дважды в обоих масштабах).

Как видно из рисунка, при $p = 0{,}5$ событие $M_{13}^{(n)}$ делается очень близким к достоверному уже при 30—50 испытаниях.

Пример 3. Исследовать изменение $P_n = P(M^{(n)}(2))$ в зависимости от p и n.

В этом случае характеристическое уравнение (10) принимает вид:

$$x^4 - qx^3 - pq^3 = 0.$$

Оно имеет два вещественных (α и β ($\alpha \neq \beta$)) и два сопряженных комлексных корня ($\gamma = ge^{i\varphi}$ и $\delta = ge^{-i\varphi}$). Поэтому общее решение уравнения (10) представляется в форме

$$Q_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n + g^n (C_3 \cos n\varphi + C_4 \sin n\varphi).$$

Определив постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 из начальных условий

$$Q_0 = Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$$

и выделив главный член в выражении Q_n, составим сводную таблицу значений P_n для $p = 0{,}03, 0{,}1, 0{,}2, 0{,}5$ и $n = 5, 10, 20, 30, 50, 100$ (табл. 5).

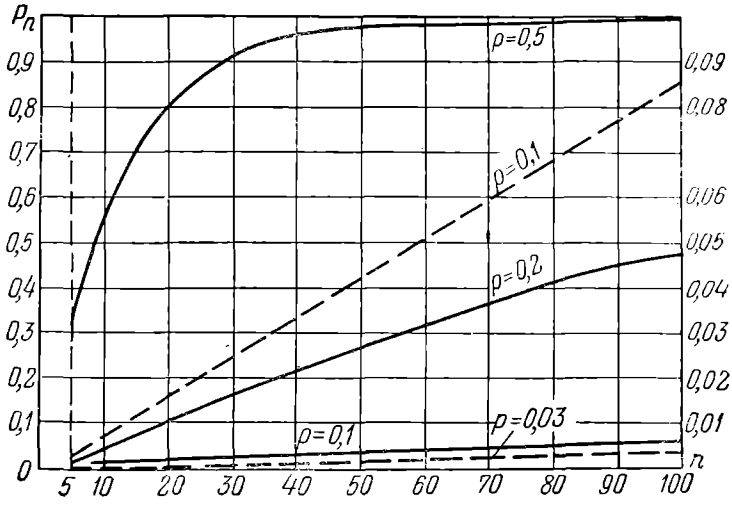


Рис. 2

В табл. 5 оценки сумм второго и третьего слагаемых не приводятся. Порядок их тот же, что и в табл. 4.

Таблица 5

p	n					
	5	10	20	30	50	100
0,03	0,007	0,019	0,043	0,065	0,109	0,211
0,1	0,051	0,149	0,316	0,451	0,645	0,881
0,2	0,432	0,791	0,972	0,996	0,9999	0,99999
0,3	0,706	0,954	0,999	0,9999	0,99999	0,99999

Таблица значений P_n иллюстрируется рис. 3, из которого видно, например, что вероятность события $M^{(n)}(2)$ при $p = 0{,}5$ чрезвычайно близка к 1 уже при 10—20 испытаниях, т. е. события $M^{(10)}(2)$, $M^{(11)}(2)$ и т. д. практически достоверны. Напротив, при $p = 0{,}1$ даже 100 испытаний едва доводят вероятность события $M^{(n)}(2)$ до 0,9.

4. Решение в схеме переменных вероятностей

Как показано выше, решение рассматриваемой задачи особенно просто проходит в схеме Бернулли, так как постоянство p и q во всех n испытаниях позволяет получить для искомой вероятности Q_n события $\overline{M}$ уравнение в конечных разностях с постоянными коэффициентами.

Сложнее обстоит дело, если допустить возможность изменения от опыта к опыту вероятности p элементарного события A.

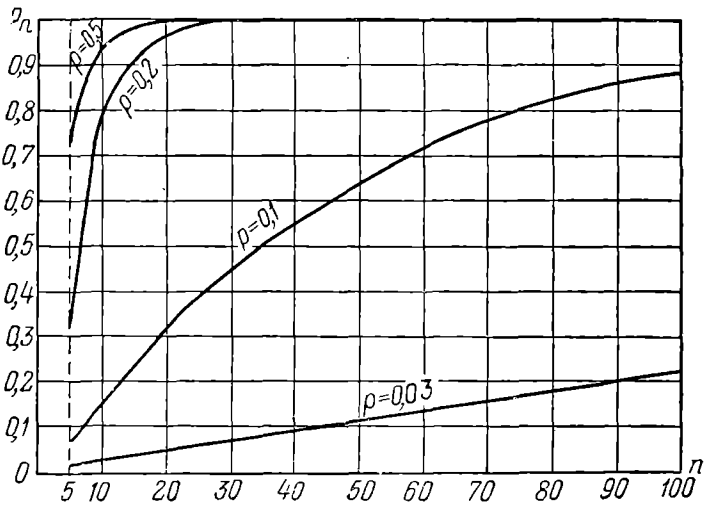


Рис. 3

Приводим решение задачи в схеме однородной цепи Маркова на примере зависимости типа II между M и A (событие $M^{(n)}(k)$). Иных схем с переменными вероятностями касаться здесь не будем. [1]

Пусть до начала первого испытания в приводимой серии n опытов вероятность элементарного события A будет равна p, а вероятность события $\overline{A}$ равна $q\,(p+q=1)$. Эти вероятности назовем начальными вероятностями серии n испытаний.

Так как по предположению цепь однородна, вероятности перехода не зависят от номера опыта, т. е условная вероятность события A в s-м опыте равна p^+ если в предыдущем $(s-1)$-м опыте осуществлялось A и p^- если в $(s-1)$-м опыте осуществлялось $\overline{A}$ (вероятности p^+, p^- одни и те же для всех s). При этом несущественно, каковы исходы всех опытов, предшествующих $(s-1)$-му испытанию. Условные вероятности $\overline{A}$ будут соответственно равны:

$$q^+ = 1 - p^+ \quad \text{и} \quad q^- = 1 - p^-$$

Обозначим вероятность события $\overline{M}$ при начальных вероятностях p и q через $Q_n(p, q)$.

---

[1] Аналогичные результаты, касающиеся однородной цепи Маркова, были получены В. Н. Блюменфельдом, использовавшим предложенный нами метод уравнений в конечных разностях для схемы Бернулли.

Условная вероятность $\overline{M}$, при условии, что в результате первого опыта осуществилось $\overline{A}$, будет

$$Q_n^-(p, q) = qQ_{n-1}(p^-, q^-).$$

Действительно, в первом опыте осуществилось $\overline{A}$ (имеющее вероятность q), а, следовательно, начальные вероятности для серии последующих $n-1$ испытаний будут p^- и q^-

Заметим, что если вместо начальных вероятностей p и q в серии n опытов взять начальные вероятности p^- и q^- соответствующая условная вероятность Q_n^- выразится:

$$Q_n^-(p^- \quad q^-) = q^-Q_{n-1}(p^- \quad q^-).$$

В самом деле, если и теперь в первом опыте осуществится событие $\overline{A}$, хотя и имеющее другую вероятность (q^-), начальными вероятностями последующей серии $n-1$ опытов опять-таки окажутся p^- и q^-

Вообще, если в s-м опыте произошло событие $\overline{A}$ с одной из возможных вероятностей q^- или q^+ (что зависит от исхода $(s-1)$-го опыта),[1] начальными вероятностями последующих $n-s$ испытаний будут p^- и q^-, так как они зависят только от исхода s-го опыта и не зависят от 1-го, 2-го $(s-1)$-го опытов.

В табл. 6 приведены частные случаи события $\overline{M}^{(n)}(k)$ (сравните с табл. 2).

Таблица 6

Номер частного случая	Номер опыта							Вероятности частных случаев
	1	2		$k+2$	$k+3$		n	
1	$\overline{A}$	Событие $\overline{M}$						$Q_n^-(p, q) = qQ_{n-1}(p^-, q^-)$
2	A	$\overline{A}$		$\overline{A}$	Событие $\overline{M}$			$Q_n^+(p, q) = pq^+(q^-)^k Q_{n-(k+2)}(p^-, q^-)$

Полная вероятность $Q_n(p, q)$ события $M^{(n)}(k)$ будет:

$$Q_n(p, q) = qQ_{n-1}(p^- \quad q^-) + pq^+(q^-)^k Q_{n-(k+2)}(p^-, q^-). \qquad (17)$$

Полученное уравнение в конечных разностях содержит две неизвестные функции ($Q_n(p, q)$ и $Q_n(p^-, q^-)$), что осложняет его решение.

Однако, если воспользоваться сделанным выше замечанием и заменить начальные вероятности p и q серии n опытов на другие начальные вероятности, равные p^- и q^-, получим уравнение в конечных разностях, содержащее только одну неизвестную функцию

$$Q_n(p^- \quad q^-) - q^-Q_{n-1}(p^- \quad q^-) - p^-q^+(q^-)^k Q_{n-(k+2)}(p^- \quad q^-) = 0. \qquad (18)$$

[1] Можно считать, что $P(\overline{A})$ в s-м опыте равно произвольно заданной правильной дроби: например, q.

Уравнение (18) есть линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами относительно функции $Q_n(p^- \; q^-)$. Его общее решение

$$Q_n(p^- \; q^-) = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n + \quad + C_{k+2} x_{k+2}^n, \tag{19}$$

где $x_1, x_2, \quad , x_{k+2}$ — корни характеристического уравнения[1]

$$x^{k+2} - q^- x^{k+1} \quad p^- q^+ (q^-)^k = 0. \tag{20}$$

Начальные условия, необходимые для нахождения постоянных множителей $C_1, C_2, \quad C_{k+2}$ в выражении (19) очевидны:

$$Q_0(p^-, q^-) = Q_1(p^- \; q^-) = . \quad = Q_{k+1}(p^-, q^-) = 1. \tag{21}$$

Теперь для определения вероятности события $\overline{M}^{(n)}(k)$ остается лишь подставить соотношение (19) в формулу (17), откуда получаем

$$\begin{aligned} Q_n(p, \; q) = q\,(C_1 x_1^{n-1} + C_2 x_2^{n-1} + \quad . + C_{k+2} x_{k+2}^{n-1}) + \\ + pq^+ (q^-)^k (C_1 x_1^{n-(k+2)} + C_2 x_2^{n-(k+2)} + \quad .. + C_{k+2} x^{n-(k+2)}). \end{aligned} \tag{22}$$

В заключение заметим, что если уравнение (20) не имеет кратных корней и наибольший по модулю его корень (пусть это будет x_1) вещественен и положителен, то при больших n вероятность события $\overline{M}^{(n)}(k)$ асимптотически выражается

$$Q_n(p, \; q) \sim q\, C_1 x_1^{n-1} \tag{23}$$

Отсюда вероятность события $M^{(n)}(k)$ асимптотически представляется формулой

$$P_n(p, \; q) \sim 1 - q\, C_1 x_1^{n-1} \tag{24}$$

Понятно, что к аналогичным уравнениям в конечных разностях можно прийти при определении вероятностей и других событий: $M_{10^t 1}^{(n)}$, $M_{1^t}^{(n)}$ и т. п.

---

[1] Так же, как и во втором разделе статьи, для простоты записи, приводится случай некратных корней характеристического уравнения.

Поступило
27 VII 1952 г.