

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ТРАНСФОРМАЦИЯХ СО СТОХАСТИЧЕСКИМ ЯДРОМ

Проф. О. В. Сарманов

Введение

Целью настоящей работы является изучение свойств интегральных трансформаций вида $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r(y) K(x, y) dy$, совершаемых над функцией $r(y)$ посредством стохастического ядра $K(x, y)$. Согласно общепринятой терминологии, ядро называется стохастическим, если оно удовлетворяет условиям:

$$K(x, y) \geq 0 \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) dy = 1 \text{ при всех } x.$$

Стохастические ядра встречаются в теории корреляции, определяемой плотностью распределения $F(x, y)$ двух переменных на всей плоскости XU

Если обозначить $p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dy$, то $\frac{F(x, y)}{p(x)} = K(x, y)$ и будет стохастическим ядром, поэтому интегральные уравнения со стохастическим ядром были названы корреляционными [1].

Исследование свойств трансформированной функции $\varphi(x)$ естественно распадается на два случая симметричной и несимметричной $F(x, y)$.

1. О функциональных моментах симметричной корреляции

1. Рассмотрим корреляцию между двумя случайными переменными x и y , определяемую плотностью распределения $F(x, y)$ во всей плоскости XOY

Помимо обычных условий

$$F(x, y) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dx dy = 1, \quad (1)$$

функция $F(x, y)$ предполагается удовлетворяющей условию симметрии

$$F(x, y) = F(y, x) \quad (2)$$

и следующему важному ограничению:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F^2(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dx \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dy} dx dy = K < \infty. \quad (3)$$

Введем общепринятые в теории вероятностей обозначения и термины:

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dy; \quad p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dx. \quad (4)$$

Функции $p(x)$, $p(y)$, одинаковые в силу симметрии $F(x, y)$, называются соответственно априорными плотностями распределения x и y .

Функции $\frac{F(x, y)}{p(x)}$, $\frac{F(x, y)}{p(y)}$ соответственно называются условными плотностями y при данном x и x при данном y .

В силу свойства (1) и обозначений (4), условные и априорные плотности удовлетворяют очевидным соотношениям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x, y)}{p(x)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x, y)}{p(y)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(y) dy = 1. \quad (5)$$

Основное для этой работы ограничение (3) в терминах теории вероятностей выражается так: произведение условных плотностей распределения $\frac{F^2(x, y)}{p(x)p(y)}$ должно быть интегрируемо во всей плоскости. Это ограничение обычно выполняется на практике.

Пусть $r(y)$ произвольная функция, абсолютно интегрируемая с весом $\frac{F(x, y)}{p(x)}$, иначе говоря, $r(y)$ такова, что существует интеграл

$$r_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| \frac{F(x, y)}{p(x)} dy. \quad (6)$$

Актуальной задачей теории корреляции является изучение свойств функции

$$M. O. x r(y) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r(y) \frac{F(x, y)}{p(x)} dy, \quad (7)$$

которую можно назвать условным первым моментом функции $r(y)$ относительно плотности $\frac{F(x, y)}{p(x)}$ (условное математическое ожидание $r(y)$ при данном x).

Функцию $\varphi(x)$ мы называем функциональным первым моментом, в отличие от обычного степенного первого условного момента $\int_{-\infty}^{\infty} y \frac{F(x, y)}{p(x)} dy$, являющегося важным частным случаем $\varphi(x)$, получаемым при $r(y) = y$.

Задачей настоящей работы является выяснение ограничений для порядка роста функции (7), вытекающих из свойств „трансформируемой“ функции $r(y)$ и ограничений (1) — (3), влияющих на „трансформирующее ядро“ $\frac{F(x, y)}{p(x)}$

Если $r(y)$ ограниченная функция, т. е. $|r(y)| \leq A$ при всех y , то

$$|\varphi(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} r(y) \frac{F(x, y)}{p(x)} dy \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| \times \\ \times \frac{F(x, y)}{p(x)} dy \leq A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x, y)}{p(x)} dy = A.$$

Итак, из $|r(y)| \leq A$ вытекает тривиальная оценка $|\varphi(x)| \leq A$, поэтому с точки зрения определения порядка роста $\varphi(x)$ на бесконечности интерес представляют лишь функциональные моменты неограниченных функций $r(y)$.

Метод решения этой задачи опирается на теорию интегрального уравнения

$$\psi(x) \sqrt{p(x)} = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) \sqrt{p(y)} \frac{F(x, y)}{\sqrt{p(x)p(y)}} dy \quad (8)$$

с симметричным ядром $\frac{F(x, y)}{\sqrt{p(x)p(y)}}$ ($F(x, y)$ симметрична), имеющим интегрируемый квадрат $\frac{F^2(x, y)}{p(x)p(y)}$ (ограничение (3)), поэтому естественно предполагать и у неограниченной функции $r(y)$ интегрируемость её квадрата с весом $p(y)$.

Таким образом, задачей предлагаемой работы является выяснение ограничений порядка роста первого функционального момента $\varphi(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если $r(y) \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow \infty$, в предположении, что первый абсолютный функциональный момент функции $r(y)$, определяемый формулой (6), существует при всех x , кроме того существует второй априорный момент

$$M \int_{-\infty}^{\infty} r^2(y) p(y) dy, \quad (9)$$

а $F(x, y)$ удовлетворяет ограничениям (1) — (3).

Примечание. Мы ограничиваемся наиболее интересным для теории корреляции случаем, когда $r(y)$ имеет смысл при всех конечных y и, следовательно, неограниченность $r(y)$ получается лишь за счет стремления $r(y)$ к ∞ при неограниченном росте y . Именно такой характер роста имеют обычные степени y^k при $k > 0$ (k может быть и дробным). Поэтому все наши результаты будут, в частности справедливы для любого условного степенного момента $M \cdot O_x y^k$, при единственном ограничении, что существует момент $M \int_{-\infty}^{\infty} y^{2k} p(y) dy$, где k — любое целое или дробное положительное число.

2. Функция $\varphi(x)$, определяемая равенством

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r(y) \frac{F(x, y)}{p(x)} dy,$$

„истокообразно“ представлена через симметризуемое ядро при помощи функции $r(y)$, имеющей интегрируемый с весом $p(y)$ квадрат¹.

Из теории интегральных уравнений известно, что при этих условиях $\varphi(x)$ разлагается при всех x в ряд Фурье по фундаментальным функциям ядра

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\lambda_1} \varphi_1(x) + \frac{\alpha_2}{\lambda_2} \varphi_2(x) + \dots + \frac{\alpha_n}{\lambda_n} \varphi_n(x) + \dots \quad (10)$$

где

$$\alpha_0 = \int_{-\infty}^{\infty} r(y) p(y) dy; \quad \alpha_i = \int_{-\infty}^{\infty} r(y) \varphi_i(y) p(y) dy; \quad i = 1, 2, \dots$$

есть коэффициенты Фурье функции $r(y)$, т. е. функции $r(y) \sqrt{p(y)}$ относительно системы ортогональных и нормальных фундаментальных функций $\varphi_i(y) \sqrt{p(y)}$ ядра $\frac{F(x, y)}{\sqrt{p(x)p(y)}}$

Рассмотрим, кроме того, абсолютный условный функциональный момент $r(y)$

$$r_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| \frac{F(x, y)}{p(x)} dy$$

и целую последовательность итерированных условных абсолютных функциональных моментов

$$r_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{k-1}(y) \frac{F(x, y)}{p(x)} dy; \quad k = 2, 3, \dots$$

Понятно, что функции $r_k(x)$ можно выразить через „итерированные поверхности корреляции“ $F^{(k)}(x, y)$

$$r_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| \frac{F^{(k)}(x, y)}{p(x)} dy, \quad (11)$$

где

$$F^{(1)}(x, y) = F(x, y),$$

а

$$F^{(2)}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x, t) F(y, t)}{p(t)} dt \quad (12)$$

и вообще

$$F^{(k)}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x, t) F^{(k-1)}(y, t)}{p(t)} dt; \quad k = 3, 4, \dots \quad (13)$$

Функции $r_1(x)$, $r_2(x)$, ..., $r_k(x)$, ..., как это видно из (11) истокообразно представлены через ядро $\frac{F(x, y)}{p(x)}$ и его итерации, по-

¹ По предположению существует $M \int_0^{\infty} r^2(y) dy < \infty$ — см. формулу (9).

этому все они разлагаются в ряды Фурье (по фундаментальным функциям ядра) следующего вида:

$$r_k(x) = C_0 + \frac{C_1}{\lambda_1^k} \varphi_1(x) + \frac{C_2}{\lambda_2^k} \varphi_2(x) + \dots + \frac{C_n}{\lambda_n^k} \varphi_n(x) +$$

где

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| p(y) dy - \text{априорное математическое ожидание } |r(y)|;$$

$$C_i = \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| \varphi_i(y) p(y) dy - \text{прочие коэффициенты Фурье функций } |r(y)| \sqrt{p(y)} \quad (i=1, 2, \dots).$$

Заметим, что для интегральных уравнений (8) $\lambda_0 = 1$, а все прочие характеристические числа $|\lambda_i| > 1$ [1].

Легко доказать, что при всех x существует предел $r_k(x)$ при $k \rightarrow \infty$ и этот предел равен C_0 .

В самом деле, C_i — коэффициент Фурье функции $|r(y)| \sqrt{p(y)}$, а $\frac{\varphi_i(x) \sqrt{p(x)}}{\lambda_i}$ — коэффициенты Фурье функции $\frac{F(x, y)}{\sqrt{p(x)p(y)}}$, рассматри-

ваемой как функция y , ибо $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x, y)}{\sqrt{p(x)p(y)}} \varphi_i(y) \sqrt{p(y)} dy = \frac{\varphi_i(x) \sqrt{p(x)}}{\lambda_i}$

по определению фундаментальных функций $\varphi_i(y) \sqrt{p(y)}$.

Поэтому, обозначив

$$\frac{1}{\sqrt{p(x)}} R_k(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left(C_1 \frac{\varphi_1(x) \sqrt{p(x)}}{\lambda_1^k} + C_2 \frac{\varphi_2(x) \sqrt{p(x)}}{\lambda_2^k} + \dots \right); \quad (14)$$

для $R_k(x)$ будем иметь следующую оценку:

$$\begin{aligned} |R_k(x)| &\leq \frac{1}{|\lambda_1|^{k-1}} \left\{ |C_1| \frac{|\varphi_1(x)| \sqrt{p(x)}}{|\lambda_1|} + |C_2| \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|^{k-1} \frac{|\varphi_2(x)| \sqrt{p(x)}}{|\lambda_2|} + \dots \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{|\lambda_1|^{k-1}} \left\{ |C_1| \frac{|\varphi_1(x)| \sqrt{p(x)}}{|\lambda_1|} + |C_2| \frac{|\varphi_2(x)| \sqrt{p(x)}}{|\lambda_2|} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

так как

$$\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right| \leq 1,$$

К последнему выражению применим сначала неравенство Буняковского, а потом неравенство Бесселя

$$\begin{aligned} |R_k(x)| &\leq \frac{1}{|\lambda_1|^{k-1}} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} C_i^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x) p(x)}{\lambda_i^2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{|\lambda_1|^{k-1}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} r^2(y) p(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F^2(x, y)}{p(x)p(y)} dy} \rightarrow 0 \\ &\text{при } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

при любом фиксированном x , в силу ограничения (3) и условия (9).

В самом деле, $|\lambda_1| > 1$ и, следовательно, $\frac{1}{|\lambda_1|^{k-1}} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, а интегралы, стоящие под корнем, существуют по предположению. Из (10) и (14) получим

$$r_k(x) = C_0 + \frac{1}{\sqrt{p(x)}} R_k(x) \rightarrow C_0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Итак, при всех x

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) \sqrt{p(x)} = C_0 \sqrt{p(x)} \quad (15)$$

или

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| p(y) dy. \quad (15')$$

Замечание 1. Если $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F^2(x, y)}{p(x)p(y)} dy$ не непрерывная функция x , то она при отдельных x может быть неограниченной, однако из-за ограничения (3) множество таких точек имеет меру нуль. В этом случае слова „при всех x “ в вышеприведённых рассуждениях нужно заменить словами „почти при всех x “.

Замечание 2. Мы рассматривали $C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| p(y) dy$, не оговаривая предельно существования этого интеграла, но этого и не нужно оговаривать, так как существование первого абсолютного момента вытекает из предположенного существования второго момента $\int_{-\infty}^{\infty} r^2(y) p(y) dy$ и из известного неравенства Ляпунова

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| p(y) dy \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} r^2(y) p(y) dy}$$

или даже из неравенства Буняковского

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| \sqrt{p(y)} |\sqrt{p(y)}| dy &\leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} r^2(y) p(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} 1^2 \cdot p(y) dy} = \\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} r^2(y) p(y) dy} \end{aligned}$$

(так как $\int_{-\infty}^{\infty} p(y) dy = 1$).

Основной результат этого пункта можно формулировать в виде следующей леммы

Лемма. Для любой неограниченной функции $r(y)$, у которой существует второй абсолютный момент (9), почти при всех x существует предел итерированных условных моментов $r_k(x)$, равный её априорному моменту, т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| \frac{F^{(k)}(x, y)}{p(x)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| p(y) dy.$$

Точно так же можно построить обыкновенные, т. е. не абсолютные, функциональные итерированные моменты $r(y)$

$$m_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r(y) \frac{F^{(k)}(x, y)}{p(x)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} m_{k-1}(y) \frac{F(x, y)}{p(x)} dy,$$

получив для них разложение, аналогичное (10)

$$m_k(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\lambda_1^k} \varphi_1(x) + \dots + \frac{\alpha_n}{\lambda_n^k} \varphi_n(x) +$$

и вытекающее из него соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(y) \frac{F^{(k)}(x, y)}{p(x)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} r(y) p(y) dy.$$

Существование же обычных моментов следует из существования абсолютных моментов, в частности,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} r(y) p(y) dy \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| p(y) dy,$$

$$|\varphi(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} r(y) \frac{F(x, y)}{p(x)} dy \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| \frac{F(x, y)}{p(x)} dy = r_1(x). \quad (16)$$

Доказанная лемма и накладывает весьма жесткие ограничения на порядок роста функции $\varphi(x)$ или $r_1(x)$, как мы увидим из следующего пункта, $r_1(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \rightarrow \infty$ не могут расти быстрее, чем трансформируемая исходная функция $r(x)$, если $F(x, y)$ симметрична.

3. Основная теорема. Если симметричная корреляция удовлетворяет ограничению (3), то функция

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r(y) \frac{F(x, y)}{p(x)} dy,$$

являющаяся первым условным функциональным моментом $r(y)$ (априорный момент $r^2(y)$ предполагается существующим), не может удовлетворять неравенству

$$|\varphi(x)| \geq \lambda (|r(x)| - A) \quad (17)$$

при

$$|r(x)| \geq A,$$

где

$$\lambda > 1, A > 0.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность абсолютных итерированных моментов функции $r(y)$:

$$r_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| \frac{F(x, y)}{p(x)} dy,$$

$$r_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{k-1}(y) \frac{F(x, y)}{p(x)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| \frac{F^{(k)}(x, y)}{p(x)} dy,$$

$$k = 1, 2, \dots, r_0(y) = |r(y)|.$$

Понятно, что, во-первых, $r_1(x) \geq |\varphi(x)|$, во-вторых, $r_1(x) \geq 0$. Построим функцию

$$\omega(|r(x)|) = \begin{cases} 0 & \text{при } |r(x)| \leq A \\ \lambda(|r(x)| - A) & \text{при } |r(x)| \geq A. \end{cases} \quad (18)$$

Функция $\omega(z)$ является непрерывной выпуклой функцией своего неотрицательного аргумента $z = |r(x)|$. Вообще же она не является выпуклой функцией x , поскольку не предполагается выпуклость функции $|r(x)|$.

Предположим, что, вопреки утверждению теоремы, неравенство (17) выполнено для некоторого $A > 0$ и $\lambda > 1$. Тогда при всех x

$$r_1(x) \geq \omega(r(x)). \quad (19)$$

Найдем оценки снизу для всех $r_k(x)$ ($k = 2, 3, \dots$), аналогичные оценке (19).

При получении оценки снизу для $r_2(x)$ мы пользуемся неубыванием $\omega(z)$ при возрастании положительных значений аргумента z и известным неравенством Ляпунова — Гельдера для непрерывных выпуклых функций

$$\begin{aligned} r_2(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} r_1(y) \frac{F(x, y)}{p(x)} dy \geq \int_{-\infty}^{\infty} \omega(|r(y)|) \frac{F(x, y)}{p(x)} dy \geq \\ &\geq \omega\left(\int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| \frac{F(x, y)}{p(x)} dy\right) = \omega(r_1(x)) \geq \omega(\omega(|r(x)|)) = \\ &= \omega^{(2)}(|r(x)|). \end{aligned}$$

и вообще

$$r_k(x) \geq \omega^{(k)}(|r(x)|), \quad (20)$$

при всех x , где $\omega^{(k)}(|r(x)|)$ определяется по индукции и имеет следующее явное выражение:

$$\omega^{(k)}(|r(x)|) = \begin{cases} 0 & \text{при } |r(x)| \leq \frac{\lambda A}{\lambda - 1} \left(1 - \frac{1}{\lambda^k}\right) = C_k \\ \lambda^k(|r(x)| - \frac{\lambda A}{\lambda - 1} \left(1 - \frac{1}{\lambda^k}\right)) & \text{при } |r(x)| \geq C_k. \end{cases}$$

Если поэтому $|r(x)| > \frac{\lambda A}{\lambda - 1}$ а такие значения x найдутся, как бы ни было велико A и как бы ни было мало $\lambda - 1 > 0$, так как $r(x)$ по предположению неограниченная функция, то

$$r_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| \frac{F^{(k)}(x, y)}{p(x)} dy \geq \lambda^k \left(|r(x)| - \frac{\lambda A}{\lambda - 1}\right)$$

и, следовательно, при всех таких x $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = \infty$, что противоречит соотношению (15) леммы.

Из этой основной теоремы вытекает ряд следствий.

Следствие 1. Если симметричная корреляция удовлетворяет ограничению (3), то первый условный степенной момент

$$m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{F(x, y)}{p(x)} dy \quad (21)$$

не может удовлетворять неравенству

$$|m(x)| > (1 + \varepsilon)(|x| - A) \text{ при } |x| > A > 0, \varepsilon > 0$$

ни при одной паре чисел $A > 0, \varepsilon > 0$.

Два непосредственных доказательства первого следствия были опубликованы автором ранее [2]. Геометрический смысл следствия 1 сводится к следующему: так называемая кривая линия регрессии $y = m(x)$ при достаточно больших x не может проходить выше прямой с угловым коэффициентом, равным единице. С другой стороны, в случае прямолинейной корреляции $m(x) = R x$, где $|R| < 1$. При этом R может быть сколь угодно близким к единице.

Поэтому оценка $|m(x)| < (1 + \varepsilon)|x|$ при больших x сколько-нибудь существенно не улучшается.

Следствие 2. Вообще не существует „параболической“ симметричной корреляции, удовлетворяющей ограничению (3). Под параболической корреляцией понимается такая, у которой линия регрессии $y = m(x)$ есть парабола второй или более высокой степени. Это следствие совершенно очевидно: если линия регрессии не может при больших x проходить выше прямой с угловым коэффициентом, равным единице, то эта линия уж никак не может быть параболой степени больше единицы.

Следствие 3. Если симметричная корреляция, удовлетворяет ограничению (3), то условный степенной момент порядка k , т. е.

$$m_k(x) = M \int_{-\infty}^{\infty} y^k \frac{F(x, y)}{p(x)} dy, \quad (22)$$

не может при $x \rightarrow \pm \infty$ возрастать быстрее, чем $(1 + \varepsilon)(|x|^k - A)$. Следовательно, неравенство

$$|m_k(x)| \geq (1 + \varepsilon)(|x|^k - A) \text{ при } |x|^k \geq A \quad (23)$$

невозможно ни для какой пары чисел $\varepsilon > 0, A > 0$.

Если, в частности, известно, что условный степенной момент у порядка k (k — целое положительное число) есть многочлен от x , то степень этого многочлена не может быть выше k .

Мы опять получили неудовлетворительную оценку, так как можно привести пример симметричной корреляции, у которой любой условный момент порядка k есть многочлен степени k .

Примером такой симметричной корреляции может служить хорошо известная нормальная корреляция, определяемая плотностью

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-R^2}} e^{-\frac{x^2+y^2+2Rxy}{2(1-R^2)}} \quad |R| < 1.$$

В этом случае

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dy = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}; \quad \frac{F(x, y)}{p(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-R^2)}} e^{-\frac{(y-Rx)^2}{2(1-R^2)}},$$

поэтому для k -го степенного момента у при данном x получаем формулу

$$m_k(x) = M \cdot O_x \int_{-\infty}^{\infty} y^k \frac{e^{-\frac{(y-Rx)^2}{2(1-R^2)}}}{\sqrt{2\pi(1-R^2)}} dy,$$

или, положив $\frac{y - Rx}{\sqrt{1 - R^2}} = z$, получим $y = \sqrt{1 - R^2}z + Rx$,

$$M \cdot O_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} (Rx + \sqrt{1 - R^2}z)^k \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz.$$

Обозначим через $m_l = \int_{-\infty}^{\infty} z^l e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ моменты нормального распределения.

Легко проверить, что

$$m_{2l+1} = 0,$$

$$m_{2l} = (2l - 1)(2l - 3) \dots 3 \cdot 1 = (2l - 1)!!;$$

в этих обозначениях

$$M \cdot O_{xy^k} = m_k(x) = R^k x^{k-1} + C_k' \sqrt{1 - R^2} R^{k-1} x^{m-1} +$$

или, окончательно, мы получим для моментов чётного и нечётного порядков следующие выражения:

$$m_{2l}(x) = R^{2l} x^{2l} + C_{2l}^2 (1 - R^2) R^{2l-2} m_2 x^{2l-2} + \dots + (1 - R^2)^l m_{2l},$$

$$m_{2l+1}(x) = R^{2l+1} x^{2l+1} + C_{2l+1}^2 (1 - R^2) R^{2l-1} m_2 x^{2l-1} + \dots + \\ + C_{2l+1}^{2l} (1 - R^2)^l m_{2l} R x.$$

Таким образом, условный момент y нечётной степени есть многочлен от x того же порядка, содержащий одни нечётные степени x , а условный момент y чётного порядка есть многочлен от x того же порядка, содержащий одни чётные степени x .

В полном согласии с третьим следствием и теоремой коэффициенты при старшей степени x меньше единицы (по абсолютной величине), так как $|R| < 1$, поэтому и

$$|R|^{2l+1} < 1 \text{ и } R^{2l} < 1$$

(R — так называемый коэффициент корреляции).

Итак, поставленная задача решена с достаточной полнотой, так как оценки, полученные для функциональных моментов, чрезвычайно просты и сколько-нибудь существенно улучшены быть не могут.

II. О функциональных моментах несимметричной корреляции

1. Рассмотрим несимметричную корреляцию, заданную плотностью $F(x, y) \neq F(y, x)$ во всей плоскости XY

Помимо обычных условий

$$F(x, y) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dx dy = 1, \quad (24)$$

функция $F(x, y)$ предполагается удовлетворяющей следующему важному ограничению:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F^2(x, y)}{p(x)p(y)} dx dy = K^2 < \infty, \quad (25)$$

где

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dy; \quad P(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dx \quad (26)$$

так называемые априорные плотности распределения x и y соответственно. Эти функции различны из-за несимметрии корреляции ($F(x, y) \neq F(y, x)$). Функции $\frac{F(x, y)}{p(x)}$ и $\frac{F(x, y)}{P(y)}$, соответственно называются условными плотностями y при данном x и x при данном y .

В силу свойства (24) и обозначений (26) условные и априорные плотности удовлетворяют очевидным соотношениям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x, y)}{p(x)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x, y)}{P(y)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} P(y) dy = 1. \quad (27)$$

Пусть $r(y)$ произвольная функция, квадрат которой интегрируем с весом $\frac{F(x, y)}{p(x)}$, т. е. существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} r^2(y) \frac{F(x, y)}{p(x)} dy.$$

Актуальной задачей теории корреляции является изучение свойств функции

$$\varphi(x) = M O_x r(y) = \int_{-\infty}^{\infty} r(y) \frac{F(x, y)}{p(x)} dy, \quad (28)$$

которую можно назвать первым условным моментом функции $r(y)$ относительно плотности $\frac{F(x, y)}{p(x)}$ (условное математическое ожидание функции $r(y)$ при данном x).

Примеры различных конкретных корреляций показывают, однако, что функция $\varphi(x)$ может быть весьма произвольной для неизменной $r(y)$ для различных корреляций.

Но если, наряду с условным математическим ожиданием $r(y)$ при данном x , рассмотреть условное математическое ожидание $r(x)$ при данном y

$$\psi(y) = M O_y r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r(x) \frac{F(x, y)}{P(y)} dx, \quad (29)$$

то порядка роста на бесконечности двух этих функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ оказываются тесно связанными друг с другом.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ назовем соответственно функциональными моментами функций $r(y)$ и $r(x)$, в отличие от обычных степенных

моментов $\int_{-\infty}^{\infty} y^k \frac{F(x, y)}{p(x)} dy$ и $\int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{F(x, y)}{P(y)} dx$, являющихся частными слу-

чаями функциональных моментов, когда $r(y) = y^k$ и, следовательно, $r(x) = x^k$.

2. Кроме условных математических ожиданий $\varphi(x) = M O_x r(y)$, $\psi(y) = M O_y r(x)$, определяемых (28) и (29), рассмотрим целую после-

довательность абсолютных условных итерированных функциональных моментов:

$$r_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| \frac{F(x, y)}{P(y)} dy; \quad S_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} |r(x)| \frac{F(x, y)}{P(y)} dx, \quad (30)$$

$$r_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} r_1(x) \frac{F(x, y)}{P(y)} dx; \quad S_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(y) \frac{F(x, y)}{P(y)} dy. \quad (30')$$

Пользуясь равенствами (30), формулы (30') можно переписать так:

$$r_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} |r(x)| \frac{F_2(x, y)}{P(y)} dx; \quad S_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| \frac{F_1(x, y)}{P(y)} dy, \quad (31)$$

где

$$F_2(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t, x) F(t, y)}{P(t)} dt; \quad F_1(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x, t) F(y, t)}{P(t)} dt \quad (32)$$

две новые симметричные итерированные плотности корреляции, удовлетворяющие условиям (25)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_2^2(x, y)}{P(x) P(y)} dx dy \leq K^2; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1^2(x, y)}{P(x) P(y)} dx dy \leq k^2, \quad (32')$$

вытекающим из (25) в силу неравенства Буяковского.

Легко проверить, что итерированные условные моменты с чётными индексами выражаются через симметричные плотности (30)

$$r_{2k}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{2k-1}(x) \frac{F(x, y)}{P(y)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} r_{2k-2}(x) \frac{F_2(x, y)}{P(y)} dx,$$

$$S_{2k}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{2k-1}(y) \frac{F(x, y)}{P(x)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} S_{2k-2}(y) \frac{F_1(x, y)}{P(x)} dy.$$

Таким образом, на итерированные моменты с чётными индексами $r_{2k}(y)$ и $S_{2k}(x)$ распространяется общеизвестная теория интегральных трансформаций с симметричным ядром.¹

В частности, для них мы можем написать разложение в ряды Фурье по фундаментальным функциям $\{\varphi_n(x)\}$, $\{\psi_n(y)\}$ несимметрического ядра $\frac{F(x, y)}{\sqrt{P(x) P(y)}}$. При этом, поскольку исходные функции $|r(x)|$ и $|r(y)|$ имели интегрируемые квадраты, написанные ниже ряды сходятся почти при всех значениях аргументов

$$r_{2k}(y) = C_0 + \frac{C_1}{\lambda_1^k} \psi_1(y) + \frac{C_2}{\lambda_2^k} \psi_2(y) + \dots + \frac{C_n}{\lambda_n^k} \psi_n(y) + \dots \quad (33)$$

$$S_{2k}(x) = C'_0 + \frac{C'_1}{\lambda_1^k} \varphi_1(x) + \frac{C'_2}{\lambda_2^k} \varphi_2(x) + \dots + \frac{C'_n}{\lambda_n^k} \varphi_n(x) + \dots, \quad (33')$$

¹ Ядро имеет интегрируемый квадрат в силу ограничений (25').

где

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| P(y) dy; \quad C_i = \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| \psi_i(y) P(y) dy \quad i = 1, 2, \dots$$

коэффициенты Фурье функции $|r(y)| \sqrt{P(y)}$ относительно ортогональной и нормальной системы фундаментальных функций симметрического ядра $\frac{F_2(x, y)}{\sqrt{P(x)P(y)}}$, а

$$C'_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |r(x)| p(x) dx; \quad C'_i = \int_{-\infty}^{\infty} |r(x)| \varphi_i(x) p(x) dx \quad i = 1, 2,$$

коэффициенты Фурье функции $|r(x)| \sqrt{p(x)}$ относительно системы фундаментальных функций $\varphi_i(x) \sqrt{p(x)}$ симметрического ядра

$$\frac{F_1(x, y)}{\sqrt{p(x)p(y)}}.$$

Кроме того, характеристические числа „корреляционных ядер“

$$\frac{F_1(x, y)}{\sqrt{p(x)p(y)}} \quad \frac{F_2(x, y)}{\sqrt{P(x)P(y)}},$$

удовлетворяющих ограничению (32'), по абсолютной величине больше единицы $|\lambda_k| > 1$; $k \geq 1$; ($\lambda_0 = 1$).

Подробное обоснование используемых здесь вспомогательных вопросов теории корреляционных интегральных уравнений можно найти, например, в более ранних работах [1, 2], а также в первой части настоящей работы.

Так как $|\lambda_k| > 1$, $k \geq 1$, то из соотношений (33) и (33') выводим, что почти при всех y и x

$$\left. \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} r_{2k}(y) &= C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)| P(y) dy, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k}(x) &= C'_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |r(x)| p(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Таким образом, пределы итерированных моментов с чётными индексами существуют и равны постоянным априорным абсолютным моментам $|r(y)|$ и $|r(x)|$ соответственно.¹

Соотношения (34) и накладывают известные ограничения на порядок роста условных функциональных моментов $\varphi(x)$ и $\psi(y)$.

Заметим, что для теории корреляции представляют интерес функциональные моменты неограниченных функций $|r(y)| \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow \infty$. Поэтому в дальнейшем это всегда будет предполагаться.

3. Основная теорема. Не существует несимметричной корреляции, удовлетворяющей ограничению (25), и такой, чтобы условные функциональные моменты $M. O_x \cdot r(y) = \varphi(x)$ и $M. O_y \cdot r(x) = \psi(y)$ удовлетворяли неравенствам:

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\geq \tau(|r(x)|) \quad \text{при} \quad |r(x)| \geq A > 0 \\ |\psi(y)| &\geq \tau^{-1}[(1 + \mu)|r(y)|] \quad \text{при} \quad |r(y)| \geq B > 0, \mu > 0, \end{aligned} \quad (35)$$

¹Существование этих моментов вытекает из предположенного существования моментов у квадратов функций $r^2(y)$ и $r^2(x)$.

где $\tau(|r(x)|)$ — любая из функций, удовлетворяющих условиям:

(а) $\tau(0) = 0$;

(б) $\tau(|r(x)|)$ — монотонно возрастающая функция $|r(x)|$;

(в) $\tau(|r(x)|)$ — непрерывная функция $|r(x)|$;

(г) $\tau(|r(x)|)$ — выпуклая функция $|r(x)|$;

или $\tau^{-1}(|r(y)|)$ — выпуклая функция $|r(y)|$,

где τ^{-1} — однозначная функция, обратная τ существующая в силу условия (б).

Покажем, что неравенства (35) невозможны для несимметричной корреляции.

А. Пусть $\tau(|r(x)|)$ — выпуклая функция $|r(x)|$ и неравенства (35) выполнены для всех x и y , для которых $|r(x)| \geq A$, $r(y) \geq B$, а такими должны быть все достаточно большие x и y , так как $r(x)$ и $r(y)$ неограниченно растут хоть в одном направлении по мере роста x и y .

Построим две вспомогательные функции

$$\begin{aligned} \text{I. } \omega(|r(x)|) &= \begin{cases} 0 & \text{при } |r(x)| \leq A \\ \tau(|r(x)|) - \tau(A) & \text{при } |r(x)| \geq A \end{cases} \\ \text{II. } \bar{\omega}(|r(y)|) &= \begin{cases} 0 & \text{при } |r(y)| \leq B \\ \tau^{-1}[(1+\mu)(|r(y)| - B)] & \text{при } |r(y)| \geq B. \end{cases} \end{aligned}$$

Функции I и II непрерывны, так как $\tau^{-1}(0) = \tau(0) = 0$.

Первая из них выпуклая функция $|r(x)|$, так как τ по предположению выпукла.

Абсолютные условные функциональные моменты (30) очевидно всегда удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} r_1(x) &= M \ O_{.x} |r(y)| \geq |M \ O_{.x} r(y)| = |\varphi(x)|; \quad r_1(x) \geq 0 \\ S_1(y) &= M \ O_{.y} |r(x)| \geq |M \ O_{.y} r(x)| = |\psi(y)|; \quad S_1(y) \geq 0 \end{aligned} \right\}, \quad (36)$$

поэтому, если верны (35), при $|r(x)| \geq A$, $|r(y)| \geq B$, то уже при всех без исключения x и y верны неравенства:

$$\left. \begin{aligned} r_1(x) &\geq \omega(|r(x)|) \\ S_1(y) &\geq \bar{\omega}(|r(y)|). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Используя неравенство Ляпунова — Гёльдера для выпуклых функций, легко найти оценку снизу для $r_2(y) = M \ O_y r_1(x)$

$$\begin{aligned} r_2(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} r_1(x) \frac{F(x, y)}{P(y)} dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} \omega(|r(x)|) \frac{F(x, y)}{P(y)} dx \geq \\ &\geq \omega \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |r(x)| \frac{F(x, y)}{P(y)} dx \right\} = \omega[S_1(y)] \geq \omega(\bar{\omega}(|r(y)|)) = \\ &= \omega^2(|r(y)|). \end{aligned} \quad (38)$$

Напишем явное выражение для $\omega^{(2)}(|r(y)|)$

$$\omega^{(2)}(|r(y)|) = \begin{cases} 0 & \text{при } |r(y)| \leq \frac{\tau(A)}{1+\mu} + B \\ (1+\mu)(|r(y)| - B) - \tau(A) & \text{при } |r(y)| \geq \frac{\tau(A)}{1+\mu} + B \end{cases}$$

или, если положить

$$C = B + \frac{\tau(A)}{1+\mu}, \quad (39)$$

для $\omega^{(2)}(|r(y)|)$ получим следующее явное выражение:

$$\omega^{(2)}(|r(y)|) = \begin{cases} 0 & \text{при } |r(y)| \leq C \\ (1+\mu)(|r(y)| - C) & \text{при } |r(y)| \geq C. \end{cases} \quad (40)$$

Принимая во внимание рекуррентные формулы (30'), выражающие последовательные абсолютные моменты с чётными индексами, используя (38) и неравенство Ляпунова-Гельдера, найдем

$$\begin{aligned} r_4(y) &\geq \omega^{(4)}(|r(y)|) \text{ и вообще} \\ r_{2k}(y) &\geq \omega^{(2k)}(|r(y)|), \end{aligned} \quad (41)$$

где, как легко проверить по индукции, функция $\omega^{(2k)}(|r(y)|)$ имеет следующее явное выражение

$$\omega^{(2k)}(|r(y)|) = \begin{cases} 0 & \text{при } |r(y)| \leq C_k = \frac{(1+\mu)C}{\mu} \left(1 - \frac{1}{(1+\mu)^k}\right) \\ (1+\mu)^k \left\{ |r(y)| - \frac{(1+\mu)C}{\mu} \left(1 - \frac{1}{(1+\mu)^k}\right) \right\} & \text{при } |r(y)| \geq C_k. \end{cases} \quad (42)$$

Из соотношений (41) и (42) вытекает $r_{2k}(y) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, при всех y , для которых $|r(y)| \geq \frac{(1+\mu)C}{\mu}$, что противоречит (34).

В. Пусть $\tau^{-1}(|r(y)|)$ — выпуклая функция $|r(y)|$. Обозначим

$$\tau^{-1}[(1+\mu)|r(y)|] = \chi(|r(y)|) = |z|.$$

Тогда

$$|r(y)| = \chi^{-1}(|z|) = \frac{\tau(|z|)}{1+\mu},$$

отсюда

$$\tau(|z|) = (1+\mu)\chi^{-1}(|z|) \geq \chi^{-1}[(1+\mu)|z|].$$

Последнее неравенство верно для любой вогнутой функции, а поскольку χ выпукла, χ^{-1} — вогнута.

При $|z| = |r(x)|$ последнее неравенство даёт $\tau(|r(x)|) \geq \chi^{-1}[(1+\mu)|r(x)|]$ и вместо условий (35), приведенных в формулировке теоремы, получим следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\geq \chi^{-1}[(1+\mu)|r(x)|] & \text{при } |r(x)| \geq A > 0 \\ |\psi(y)| &\geq \chi(|r(y)|) & \text{при } |r(y)| \geq B > 0, \end{aligned}$$

где χ — выпуклая функция, удовлетворяющая всем тем условиям, которым в предыдущем пункте удовлетворяла функция τ :

$$\begin{aligned} \chi(0) &= 0, \text{ так как } \tau^{-1}(0) = 0; \\ \chi(|r(y)|) &\text{ — монотонно возрастающая функция } |r(y)|; \\ \chi(|r(y)|) &\text{ — непрерывная функция } |r(y)|; \\ \chi(|r(y)|) &\text{ — выпуклая функция } |r(y)|. \end{aligned}$$

Таким образом, это небольшое изменение обозначений поставило нас в прежние условия A , правда, функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ поменялись ролями, поэтому при доказательстве теоремы вместо функций $r_{2k}(y)$

надо рассматривать $S_{2k}(x)$, вместо $F_2(x, y)$ — симметричную корреляцию $F_1(x, y)$. В остальном доказательство останется прежним. Основная теорема доказана полностью.

4. Из-за стремления к большой общности, формулировка основной теоремы носит несколько отвлечённый характер, поэтому полезно сформулировать несколько очевидных следствий этой теоремы с более конкретными условиями.

Следствие 1. Не существует несимметричной корреляции, удовлетворяющей ограничению (25) и такой, что

$$|\varphi(x)| \geq \lambda |r(x)|, \lambda > 0 \text{ при } |r(x)| \geq A > 0$$

$$|\psi(y)| \geq \frac{1+\mu}{\lambda} |r(y)|, \mu > 0 \text{ при } |r(y)| \geq B > 0.$$

В самом деле, функция $\lambda |r(x)| = \tau(|r(x)|)$ выпукла относительно аргумента $|r(x)|$, так как всякая линейная функция выпукла и вогнута одновременно. Во всяком случае все неравенства Ляпунова — Гельдера для неё превращаются в равенства и ими попрежнему можно пользоваться в наших оценках

Далее, $\tau(0) = 0$; $\tau(|r(x)|)$ как функция $|r(x)|$ непрерывна и монотонно возрастает с возрастанием $|r(x)|$. Таким образом, все условия основной теоремы выполнены.

Условия (35) особенно наглядно иллюстрируются геометрически. Пусть $\lambda > 0$ и μ настолько велико, что $\frac{1+\mu}{\lambda} > 1$. Тогда, начиная с некоторого места при $|r(x)| \geq A$, $|r(y)| \geq B$, графики функций $|\varphi(x)|$ и $|\psi(y)|$ не могут одновременно лежать выше соответствующих графиков $|r(x)|$ и $|r(y)|$, трансформируемых функций $r(x)$ и $r(y)$.

Один из графиков функционального момента, т. е. трансформации функции, может лежать выше графика трансформируемой функции, но тогда другой условный момент должен проходить ниже графика трансформируемой функции при достаточно больших значениях аргумента.

Пусть трансформируются простейшие функции $r(x) = x$; $r(y) = y$, т. е. мы будем иметь дело не с функциональными, а с обычными первыми условными моментами. Тогда кривые $y = \varphi(x)$ и $x = \psi(y)$ будут называться линиями регрессии x на y и y на x соответственно.

Приведенная теорема показывает, что одна из функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$, определяющих уравнения линий регрессии, может быть многочленом степени выше единицы, но тогда другая в этом случае уже не может быть многочленом, а должна иметь порядок роста ниже единицы так, чтобы произведение порядков роста на ∞ не превышало единицы, поэтому вообще не существует „параболической“ корреляции, т. е. такой корреляции, в которой обе линии регрессии являются параболой степени выше первой.

Можно поэтому сформулировать следующее следствие из основной теоремы.

Следствие 2. Если в произвольной корреляции как симметричной, так и несимметричной обе линии регрессии такие, что $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ являются многочленами положительной степени (т. е. не вырождаются в константы), то степень многочленов обязательно равна единице, т. е. корреляция прямолинейна. Следствие 2 особенно на-

глядно можно проиллюстрировать на примере прямолинейной несимметричной корреляции. Тогда линии регрессии имеют вид

$$Y = \varphi(X) = R \frac{\sigma_1}{\sigma} X; \quad X = \psi(Y) = R \frac{\sigma}{\sigma_1} Y,$$

поэтому произведение коэффициентов при X и Y (так называемых коэффициентов регрессии) равно R^2 , которые меньше единицы, а следствие 2 (при $r(x) = x$, $r(y) = y$) и утверждает, что это произведение не может быть равно

$$\lambda \frac{1 + \mu}{\lambda} = 1 + \mu,$$

которые при положительном μ больше единицы.

ЛИТЕРАТУРА

Сарманов О. В. О монотонных решениях корреляционных интегральных уравнений, Доклады АН СССР, 1946, т. 53, № 9.

Сарманов О. В. О порядке роста линий регрессии II, Доклады АН СССР, 1948, т. 60, № 4

Поступило
7 V 1952 г.
