Записки Ленинградского ордена Ленина Горного института
Том XVII—XVIII, 1948

К расчету скорости свободного падения минеральных зерен

Доц. *А. К. Корольков*

Свободное падение теоретически определяется как падение изолированного зерна в неограниченном пространстве распределяющей среды (воды или воздуха). Практически оно рассматривается как падение совокупности зерен при такой концентрации, когда движение любого зерна существенно не нарушается непосредственно или через распределяющую среду сопутствующими зернами. Свободное падение имеет исключительное значение при процессе точной классификации, когда движение зерен рассматривается как равномерное, совершающееся с постоянной конечной скоростью.

Падая в среде, зерна вытесняют среду из тех мест, которые они сами последовательно занимают. Их формы и распределение внутри них масс, строго говоря, не остаются постоянными при таком перемещении, но эти изменения настолько малы, что ими безусловно пренебрегают. Во всех случаях взаимодействия зерна с жидкой средой мы получаем одно и то же явление — обтекание зерна средой. Это обтекание, обусловленное непроницаемостью для жидкой среды пространства занятого зерном, вызывает изменение в движении набегающего на зерно потока среды. Движение сопровождается трением на границе между зерном и средой. Поток среды вблизи зерна притормаживается и возникает пограничный слой. При медленном движении тел малого размера, линии обтекания имеют плавные очертания. При более высоких скоростях, пространство за телом заполняется вихревым течением, от которого отделяются вихревые кольца. При еще бо́льших скоростях образуется так называемое килевое течение. Выделяют виды обтекания тел средой: а) ламинарное, б) турбулентное, при ламинарном пограничном слое и в) турбулентное, при турбулентном пограничном слое. Вопрос о величине сопротивления, испытываемого движущимся телом, относится к древнейшим задачам динамики, однако до настоящего вре-

мени не достигнуто его окончательного теоретического решения, что и привело к попыткам прямого экспериментального определения сопротивления и дало начало успешному развитию экспериментальной гидро- и аэродинамики. В свете современных представлений, сопротивление среды движению в ней зерна может рассматриваться как сумма двух слагаемых: а) разницы в давлениях среды на противоположных по движению сторонах зерна (сопротивление формы) и б) величины сдвигающих усилий, затрачиваемых зерном на сдвижение слоев среды (поверхностное трение).

Поверхность зерна может быть разделена при этом по своим свойствам на две части, а именно: на часть, отбрасывающую от себя жидкость, и на часть, всасывающую в себя жидкость. Первое слагаемое сопротивления (а) предопределяется силами инерции, а второе (б) силами вязкости. Первое обычно превалирует над вторым. Величина сопротивления в общем виде может быть выражена как:

$$R = \psi v^n d^n \Delta^{n-1} \mu^{2-n},$$

где: R — сопротивление среды движению зерна;
v — скорость падения зерна;
d — линейный размер зерна (диаметр);
Δ — плотность среды;
μ — вязкость среды;
n — показатель степени, равный 1—2;
ψ — коэфициент сопротивления.

Коэфициент сопротивления ψ является функцией скорости падения (v), числа Рейнольдса (Re) и формы зерна. Функциональная зависимость $\psi = f(v)$ для сред, обладающих различными Δ, μ, и для зерен, имеющих разные d, выражается различными кривыми. Значительно удобнее рассматривать ψ как функцию Re. В этом случае получается единый закон изменения ψ в зависимости от изменения Re для геометрически подобных по форме зерен. Таким образом кривые $\psi = f(Re)$ для различных сред движения и для зерен разных крупностей накладываются в пределах точности друг на друга и дают одну кривую, характеризующую зерна данной формы. Такая кривая, установленная по экспериментальным значениям ее координат для зерен сферической формы, была предложена Риттингером и применена впервые для нужд обогащения Люнонном. Эта кривая послужила Лященко и Годену, как основа для разработки методов определения конечной скорости падения тел сферической формы в среде по параметру Рейнольдса. Таким путем были найдены общие решения вопроса об определении скорости падения зерен сферической формы в жидкой среде. В ходе изучения этого вопроса, как известно, было найдено еще ранее несколько частных его решений. Из числа их наибольшее значение представляли решения Стокса, Осеена, Аллена, Риттингера. Эти решения были получены для различных

условий обтекания тел сферической формы потоком вязкой жидкости. Для отдельных случаев обтекания были получены различные закономерности. Для условий ламинарного обтекания тела жидкостью, т. е. малых значений Re, задача о скорости была решена Стоксом. Решение Стокса привело к линейному закону сопротивления шара, которое он определил как:

$$R = 6\pi v r \mu.$$

Полученная им формула скорости имеет вид

$$v = \frac{2}{9} r^2 g \frac{\delta - \Delta}{\mu},$$

где: r — радиус зерна;
g — ускорение сил тяжести;
δ — плотность зерна;
Δ и μ — имеют прежние значения.

Так как Стокс при анализе вопроса движения пренебрегал влиянием внешних массовых сил (сил инерции), квадратами проекций скорости тела на оси координат, то полученное им решение ограничивалось значениями $Re \leqslant 1$ и привело Осеена к пересмотру его решения. Неполнота решений Стокса была отнесена Осееном за счет пренебрежения Стоксом сил инерции, которые при сравнительно небольших значениях Re уже достигают значительной величины. Оставляя часть инерционных членов в уравнениях Стокса, Осеен получил новое решение. Его решение привело к зависимости сопротивления от скорости в первой степени и в квадрате. Полученная им формула скорости имеет вид:

$$v = \frac{-\frac{3\mu}{r} \pm \sqrt{\frac{9\mu^2}{r^2} + 3\Delta(\delta - \Delta) gr}}{\frac{9}{4}\Delta}$$

Значения букв даны выше.

Как показали эксперименты, решение Осеена отклоняется от действительности при значении Re больше 3. В таких случаях результаты, исчисляемые по формуле Осеена, при всех условиях оказываются неудовлетворительными. В связи с этим явилось существенным решение Аллена, найденное им для области более высоких значений Re. Это решение привело к зависимости сопротивления от скорости в полуторной степени. Исходя из значения сопротивления среды

$$R = \frac{5\pi}{4} v^{1,5} d^{1,5} \Delta^{0,5} \mu^{0,5},$$

он получил формулу скорости в виде

$$v = 25{,}8\, d \sqrt[3]{\left(\frac{\delta - \Delta}{\Delta}\right)^2} \sqrt[3]{\frac{\Delta}{\mu}}.$$

Значения букв даны выше.

Как показали последующие данные, решение Аллена ограничено областью узких и сравнительно невысоких значений. Для области высоких значений Re решение было предложено Риттингером. Исходя из значения сопротивления

$$R = \frac{\pi}{16g} v^2 d^2 \Delta,$$

т. е. принимая квадратичный закон сопротивления, Риттингер получил формулу скорости в виде

$$v = 51{,}1 \sqrt{d \frac{\delta - \Delta}{\Delta}}.$$

Значения букв даны выше.

Таким образом, указанными выше формулами разрешался вопрос о конечной скорости падения зерен сферической формы. Наименее употребительными формулами этого ряда являлись формулы Осеена и Аллена, пользование которыми в практике расчета было крайне редким. Ввиду того, что применение формулы Осеена ограничивается весьма узким пределом значения Re (1—3), а сама формула сложна, в практике всегда предпочитают пользоваться более простой формулой Стокса, несмотря на погрешности, которые она дает для области значений Re 1—3. Рассматривая вопрос о применимости формулы Аллена, Лященко ограничивал ее применение лишь одним значением Re равным 100. Отсюда следовало, что для области средних значений Re, т. е. средних значений крупности, зерен не оказывается, как будто, достаточно простых формул, которые обеспечивали бы получение удовлетворительных расчетных значений конечной скорости падения. В связи с этим представляют интерес данные по этому вопросу профессора Леви И. И. Рассматривая движение зерен промежуточной крупности, Леви исходит из работ Прандля и Кармана. На основе новых представлений о процессах, протекающих в пограничных слоях потока. Прандлем, а также Карманом получены новые решения задачи о сопротивлении вязкой среды, при условии турбулентного обтекания ею тела. Для этого случая, при существенном влиянии вязкости среды и образовании ламинарного пограничного слоя, Леви принимает схему Прандля и считает сопротивление R пропорциональным скорости в полуторной степени. Для случая турбулентного обтекания, при турбулентном характере пограничного слоя, Леви принимает приближенное решение Кармана, считая сопротивление пропорциональным скорости в степени 1,75—1,8. Для первого случая им предлагается формула конечной скорости (формула Прандля — Блязиуса) в виде:

$$2v^{3/2} = \frac{gd^{3/2}}{5{,}65\sqrt{V}} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right),$$

где V кинематический коэфициент вязкости, равный $\frac{\mu}{\lambda}$,

ρ_1 — плотность зерна;

ρ_2 — плотность среды.

Значения остальных букв даны выше.

Применение этой формулы рекомендуется для значений Re_* равных 3—30 (при соответствующей крупности зерен $d =$ 0,125—0,6 мм).

Для второго случая Леви рекомендует зависимость (формула Кармана — Леви):

$$2v^{1,8} = \frac{gd^{1,2}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right)}{2{,}2\nu^{0,2}}.$$

Значения букв указаны выше.

Применение этой формулы рекомендуется при $Re = 30$—200 (при соответствующей крупности зерен $d = 0{,}6$—2 мм).

Таким образом, оставляя за формулой Стокса область наиболее малых значений Re и за формулой Риттингера область наиболее высоких его значений, Леви предлагает для промежуточной области две указанные выше формулы.

Произведем элементарные преобразования. В первом случае имеем

$$2v^{3/2} = \frac{gd^{3/2}}{5{,}65\sqrt{\nu}}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right),$$

откуда

$$v = \sqrt[1,5]{\frac{gd^{3/2}}{11{,}3\sqrt{\nu}}\,\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}}$$

Введем обозначения $\rho_2 = \Delta$; $\rho_1 = \delta$.

Тогда формула примет вид

$$v = d\sqrt[1,5]{\frac{g}{11{,}3}\,\frac{\delta - \Delta}{\Delta}\sqrt{\frac{\Delta}{\mu}}}$$

или

$$v \cong 19{,}6\, d\sqrt[3]{\left(\frac{\delta - \Delta}{\Delta}\right)^2}\sqrt[3]{\frac{\Delta}{\mu}}$$

Сопоставление этой формулы с формулой Аллена указывает на полное их сходство. Разница лишь в значениях коэфициентов перед радикалами. В формуле Аллена значение этого коэфициента 25,8, а в формуле Прандля — Блязиуса — 19,6.

Во втором случае имеем

$$2v^{1,8} = \frac{gd^{1,2}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right)}{2{,}2\nu^2}.$$

Вводя те же обозначения, что и выше, будем иметь

$$v = 20{,}7\, d^{0,67}\sqrt[1,8]{\frac{\delta - \Delta}{\Delta}}\sqrt[9]{\frac{\Delta}{\mu}}.$$

Мы получаем в данном случае новую формулу, принципиально отличную от ранее приведенных, которая предназначается

для верхнего предела области, ранее приписывавшейся рядом авторов формуле Аллена.[1]

На основании рассмотренного может быть намечен, таким образом, новый ряд формул (с включением одной новой формулы) для частных решений задачи о конечной скорости падения зерен сферической формы:

Формула Риттингера

$$v = K_R \sqrt{d \frac{\delta - \Delta}{\Delta}} \quad (d > 2 \text{ мм}).$$

Формула Кармана — Леви

$$v \quad K_K d^{0,67} \sqrt[1,8]{\frac{\delta - \Delta}{\Delta}} \sqrt{\frac{\Delta}{\mu}} \quad (d = 0{,}6 - 2 \text{ мм}).$$

Формула Аллена — Прандля — Блязиуса

$$v \quad K_A d \sqrt[3]{\left(\frac{\delta - \Delta}{\Delta}\right)^2} \sqrt[3]{\frac{\Delta}{\mu}} \quad (d = 0{,}12 - 0{,}6 \text{ мм}).$$

Формула Стокса

$$v = \frac{2}{9} r^2 g \frac{\delta - \Delta}{\mu} \quad (d < 0{,}12 \text{ мм}).$$

После простейших преобразований и округления до десятых долей значений показателей степеней, формулам указанного ряда можно придать следующий общий вид:

Формула Риттингера

$$v = K_R d^{0,5} \left(\frac{\delta - \Delta}{\Delta}\right)^{0,5} \left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^{0,0}$$

Формула Кармана — Леви — Лященко

$$v = K_L d^{0,7} \left(\frac{\delta - \Delta}{\Delta}\right)^{0,6} \left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^{0,1}$$

Формула Аллена—Прандля — Блязиуса

$$v = K_A d^{1,0} \left(\frac{\delta - \Delta}{\Delta}\right)^{0,7} \left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^{0,3}$$

Формула Стокса

$$v = K_S d^{2,0} \left(\frac{\delta - \Delta}{\Delta}\right)^{1,0} \left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^{1,0}$$

При этом четко выявляется, что строение всех формул ряда одинаково. Каждая из них слагается из четырех множителей: K (постоянный коэфициент), d, $\frac{\delta - \Delta}{\Delta}$ и $\frac{\Delta}{\mu}$.

---

[1] В результате экспериментов, Лященко получил для области значений $Re = 500 - 100$ формулу аналогичного вида, но с другими значениями постоянного множителя и показателя корня при $\frac{\Delta}{\mu}$, очевидно, ближе отвечающим действительности.

Как видно, показатели степени при d возрастают по мере уменьшения крупности зерен. В том же направлении растут показатели при $\frac{\delta-\Delta}{\Delta}$ показатели при $\frac{\Delta}{\mu}$ изменяются в обратном направлении. Указанный ряд формул характеризует падение зерен различной крупности сферической формы.

Как указано выше, скорость падения минеральных зерен зависит от их формы, которая в большей или меньшей степени отличается от сферической. Форма зерен имеет весьма широкое значение. Влияние ее проявляется при различных методах обогащения: гравитационном, флотационном, электромагнитном и других. Форма кусков влияет на скорость их измельчения. При гравитационном методе обогащения форма зерен представляет один из важных факторов, влияющий на разделение минеральных компонентов. В результате огромного числа экспериментов, проведенных Риттингером, Ричардсом, Гуськовым, Лященко, и другими, установлено, что скорости падения минеральных зерен заметно отклоняются от теоретически расчетных, исчисляемых по приведенным выше формулам, и всегда меньше этих последних. Главная причина такого отклонения заключается в отклонении формы реальных минеральных зерен от сферической. Еще Галилей указывал, что «различие в форме весьма влияет на быстроту или медленность движения так, что тела формы широкой и плоской погружаются значительно медленнее, чем тела того же вещества, но формы более сжатой». При изменении формы, очевидно, изменяется характер обтекания зерна средой. Обтекание контура сфер достаточно плавное. При обтекании зерен неправильной формы среда, проходя их острые ребра, должна образовывать завихрения вокруг и позади таких зерен, постоянно стремясь заполнить пространство позади их, где отрицательные давления иногда доходят до величин вдвое больших, чем положительные. При зернах неправильной формы существенное значение приобретает ориентация зерна к направлению движения. В результате указанных экспериментов было предложено весьма большое число различных поправочных коэфициентов, учитывающих форму зерен. Для различных групп зерен по форме (округленных, угловатых, удлиненных, плоских) были получены различные поправки. Рассмотрим поправки для области высокой турбулентности (крупных зерен). Риттингер для основных групп зерен рекомендовал следующие коэфициенты: округленные зерна — 3,20; удлиненные — 2,65; плоские — 2,35; для зерен сферической формы — 5,11. Таким образом, поправочные множители для отдельных групп зерен: сферических — 1; округленных — 0,63; удлиненных — 0,52; плоских — 0,46. По Пернолету соответственно получаем: для сферических зерен — 1; округленных — 0,58; плоских — 0,41. Ричардсом были получены значения поправочных множителей для удлиненных зерен кварца — 0,57; округленных зерен свинцового блеска — 0,65. Месснер предлагал учитывать отклонения форм реальных зерен от сферических путем уменьшении постоянного множителя K

в формуле скорости на 20—30%, или принимать поправочный множитель, примерно, 0,75 вне зависимости от фактической формы того или иного зерна. По эмпирическим формулам Лященко выявляется следующий ряд значений поправочных множителей: для сферических — 1 округленных — 0,95; угловатых — 0,81; удлиненных — 0,75; плоских — 0,51.

Легко видеть, что все приведенные цифры указывают на непостоянство поправочных множителей для отдельных групп зерен по форме.

В результате экспериментов для зерен неправильной формы были построены кривые $\psi = f(Re)$, подобные кривой Рееля для зерен сферической формы. Значения ψ и Re определялись при этом по аналогичным формулам, но вместо действительного диаметра зерна сферической формы в формулы вводился эквивалентный диаметр зерна неправильной формы, представляющий диаметр эквивалентного по весу или объему шара. В этом случае поправка в скорости на форму зерна учитывается коэфициентом сопротивления. Для зерен различной формы коэфициент сопротивления получает различные значения, возрастающие в направлении от зерен сферической к зернам плоской формы. Отношение конечных скоростей падения зерен сферической и неправильной формы может быть определено так:

$$\frac{v_i}{v_s} = \left(\frac{\psi_s}{\psi_i}\right)^{0,5} \quad \text{или} \quad v_s = v_i \left(\frac{\psi_s}{\psi_i}\right)^{0,5}$$

где v_s — скорость падения зерна сферической формы;
v_i — то же, неправильной формы;
ψ_s — коэфициент сопротивления зерна сферической формы;
ψ_i — то же, неправильной формы.

По данным Лященко, для области высокой турбулентности ($Re > 1000$) $\left(\frac{\psi_s}{\psi_i}\right)^{0,5}$ для отдельных групп зерен равно: округленных — 0,74; угловатых — 0,66; удлиненных — 0,59; плоских — 0,44. По другим данным (Ричардс, Шмидель), получаем для зерен округленной формы — 0,53, плоских — 0,22. Таким образом, данные, получаемые по кривым $\psi = f(Re)$, также обнаруживают непостоянство значений поправочных коэфициентов для однородных по форме зерен. Указанное непостоянство должно быть объяснено безусловным различием форм зерен в исследовавшихся случаях. Как показали полные и обширные исследования Ричардса, зерна минерала из одной и той же узкой фракции крупности показывают различную скорость падения в одинаковых условиях. Отношение максимальной скорости (v_{max}) к минимальной (v_{min}) для исследованных Ричардсом случаев колебалось в пределах 1,7—8,9. По данным Ричардса наибольшие колебания скорости обнаруживаются в тех случаях, когда мине-

[1] Весьма большая работа в этом направлении была проделана проф. В. Лященко.

ральные зерна имеют наименьшую плотность (1,5— антрацит) и наименьшую крупность (0,12 мм). Очевидно, что в первом случае (малой плотности) проявляется большее относительное влияние на скорость движения формы зерна. Еще Галилей указывал, что «для тела, имеющего удельный вес близкий к удельному весу среды, быстрее обнаруживается каждое малое различие, происходящее от изменения фигуры». В связи с этим следует полагать, что в средах относительно повышенной плотности должно в большей степени проявляться всякое изменение в форме. В области малых зерен, повидимому, обнаруживается более худшая дублируемость опытов. Следует полагать, что форма зерен не имеет прямой связи с их крупностью. Данные Ричардса указывают, что колебания поправочных множителей для однородных по форме групп зерен, безусловно, определяются отсутствием строгого соответствия форм зерен при различных исследованиях. В связи с значительными колебаниями результатов, Ричардс определял среднюю величину скорости для зерен узкой фракции крупности на основании 100 наблюдений, как статистическую среднюю. Зегжда полагает, что указанное число наблюдений, согласно теории вероятности, следовало бы увеличить для повышения точности конечных результатов.

Очевидно, форма зерен нуждается в достаточно точной количественной оценке. Отдельные авторы указывают, что для определения скорости падения зерна неправильной формы необходимо правильно отнести его к той или иной группе по форме, однако, критерии для этого отсутствуют. Форма минеральных зерен естественно непостоянна. Так, по одним данным форма зерен каменного угля угловатая, или угловато-продолговатая, а по другим данным кубическая или кубическая со сбитыми углами куба (т. е. округленная). Тоже для касситерита, по одним данным угловатая или угловато-округленная, а по другим продолговатая. При количественной оценке формы зерен речь идет о показателе, который одним значением («single — value») оценивал бы форму зерна с точки зрения его падения в среде. В качестве такого показателя в разное время предлагались: а) удельная поверхность зерна, б) коэфициент пластинчатости, в) коэфициент сферичности и другие. Первый — удельная поверхность — может характеризовать, с указанной точки зрения, лишь зерна одинаковой геометрической формы, так как при одной и той же удельной поверхности минеральные зерна могут иметь различную форму. Второй — коэфициент пластинчатости — предлагался для выражения формы зерен морской гальки. Величина его определялась как $\frac{l+b}{2t}$ где t — длина зерна, b — его ширина и t — толщина. Величина этого отношения не определяет однозначно формы и для зерен различной формы (например шара и куба) получается одинаковой. Третий — коэфициент сферичности χ — предложен в виде отношения поверхностей равнообъемных шара и зерна неправильной формы. Стандартной формой для сравнения выбирается при этом сферическая, имеющая наи-

меньшую поверхность при данном объеме. Значения коэфициента сферичности, очевидно, однозначно определяют форму зерна (зерна, имеющие равные поверхности и объемы, имеют одинаковые формы, и имеющие равные объемы, но разные поверхности, имеют разную форму).

Исключая шар, при возрастании одного или двух каких-либо размеров тела, χ понижается. С уменьшением χ уменьшается округленность площадей поперечных сечений тела. Два тела, имеющие близкие значения χ, могут различаться в деталях поверхности. Можно полагать, что коэфициент сопротивления ψ является непрерывной функцией χ, то есть ψ как функция Re определяется χ.

В областях больших значений Re, т. е. развитой турбулентности ($Re > 500$), должны иметь место, повидимому, более существенные изменения ψ при изменении χ (особенно при значении $\chi < 0{,}5$), то есть в этих областях влияние формы должно проявляться больше. По опытным данным, при $Re > 500$, примерный ряд относительных скоростей для сферы, куба, диска ($\chi = 0{,}26$) получается 1 0,5 0,25. При Re меньше 10 имеем 1 0,7 0,5 (изменение скорости принимается пропорциональным $\frac{1}{\psi}$). Отсюда следует, что точный учет формы более необходим для области крупных зерен, где влияние формы проявляется в большей степени. Очевидно, названные ряды скоростей соответствуют определенному ряду значений χ и при изменении его соответственно изменяются. При использовании χ важно отыскать быстрый способ его оценки для минеральных зерен. Для зерен кварца Уэделл предложил исчислить χ по отношению $\frac{d_э}{do}$ где $d_э$—диаметр круга, площадь которого равна наибольшей площади проекции зерна, а do диаметр окружности, описанной вокруг площади проекции зерна. Ошибка в определении χ таким путем не превышает по Уэделлю одного интервала значения χ (0,05). Для более точного расчета скорости падения различных минеральных зерен выявляется необходимость построения кривых ψ, как функция Re в зависимости от числовых значений χ и разработки общего метода определения χ зерен, что позволит устранить элементы исключительной субъективности при расчете скорости падения минеральных зерен неправильной формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лященко. Гравитационные методы обогащения. 1940.
2. Wadell. Volume, Shape and Roundness of Rock Particle. 1932.
3. Леви. Отстойники и промывные устройства.
4. Гуськов. Обогащение каменного угля. 1934.