Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени Горного института, том XV—XVI, 1949

IV. Общий отдел

О движении материальной точки в заданном силовом поле по винтовой линии на шероховатой поверхности

Проф. М. И. Акимов и доц. Н. Р. Малкин

Вопрос этот для случая однородного поля — поля силы тяжести подробно рассмотрен проф. М. И. Акимовым,[1] который нашел все поверхности, допускающие движение тяжелой точки по винтовым линиям с вертикальной осью при наличии трения, и исследовал условия для этих поверхностей, при которых рассматриваемое движение будет устойчивым.

Пользуясь обозначениями М. И. Акимова и вводя составляющие силового поля в цилиндрических координатах

$$H_r,\ H_\varphi \quad \text{и} \quad H_z - g,$$

получим уравнения движения точки единичной массы, отличающиеся от уравнений (3) М. И. Акимова лишь добавочными членами, содержащими H,

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 &= -N\frac{\frac{\partial F}{\partial r}}{\Delta} - kN\frac{\dot{r}}{v} + H_r, \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} &= -N\frac{\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}}{\Delta} - kN\frac{r\dot{\varphi}}{v} + H_\varphi, \\ \ddot{z} &= N\frac{1}{\Delta} - kN\frac{\dot{z}}{v} - g + H_z. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Здесь r, φ, z обозначают цилиндрические координаты точки:

$$\left.\begin{aligned} z = F(r, \varphi) &= z_0 + \varphi a + (r - r_0) f(r, \varphi) = \\ &= z_0 + a\varphi + (r - r_0) f(r_0, \varphi) + (r - r_0)^2 f_1(r, \varphi) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

есть уравнение поверхности, проходящей через винтовую линию, выражаемую уравнением

$$r = r_0,\quad z = z_0 + a\varphi \tag{3}$$

(см. уравнение 2 и 2′ М. И. Акимова).

[1] О движении тяжелой точки по винтовой линии на шероховатой поверхности (к теории спирального сепаратора), Записки Лен. Горного ин-та, том X, вып. I, стр. 1—21; т. XII, вып. 3, стр. 1—43, 1936 и 1939 гг.

Исследование движения тяжелой точки по шероховатой винтовой поверхности с вертикальной осью из состояния покоя составляет предмет особой работы М. И. Акимова, представленной в научно-исследовательский сектор Ленинградского Горного института в 1939 г. и печатающейся в Записках Ленинградского Горного института (см. относящийся сюда мемуар Леви-Чивита в Archiv der Mathematik und Physik, 3-te Reihe, Bd. V, S.28, 1903). Разбор численного примера предпринят в 1939 г. сотрудницей Ленинградского Астрономического института В. В. Нумеровой.

N есть нормальная реакция, k — коэффициент трения, v — скорость точки и

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2 + 1}.$$

Исходя из уравнения (1), получаем, так же как М. И. Акимов, т. е. умножая уравнения (1) соответственно на

$$-\frac{\partial F}{\partial r},\quad -\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi},\quad 1$$

и складывая их

$$N\Delta = g - H_z + H_r\frac{\partial F}{\partial r} + H_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi} +$$

$$+ r\dot{\varphi}^2\frac{dF}{\partial r} - 2\frac{\dot{r}\dot{\varphi}}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi} + 2\dot{r}u_1 + (r - r_0)u_2,$$

где выражения u_1 и u_2, получаемые из $\ddot{z}$, согласно формуле (2), имеют вид

$$u_1 = \frac{\partial f}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\dot{\varphi},$$

$$u_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\dot{r}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial \varphi}\dot{r}\dot{\varphi} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\dot{\varphi}^2.$$

Рассмотрим далее, как и в упомянутой работе, условия того, что точка движется по винтовой линии (3), т. е., что

$$r = r_0,\quad \dot{r} = 0,\quad \dot{z} = a\dot{\varphi},$$

т. е.

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r_0^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{(r_0^2 + a^2)\dot{\varphi}^2} = -\dot{\varphi}\sqrt{r_0^2 + a^2},$$

(при движении точки вниз по винтовой линии),

$$\left.\begin{aligned} \Delta = \Delta_0 &= \sqrt{f^2(r_0, \varphi) + \frac{a^2}{r_0^2} + 1}, \\ N\Delta &= g - H_z + f(r_0, \varphi)H_r + \frac{a}{r_0}H_\varphi + r_0\dot{\varphi}^2 f(r_0\varphi). \end{aligned}\right\} \quad (4$$

Первое из уравнений (1) дает тогда

$$\dot{\varphi}^2 = -\frac{H_r}{r_0} + \frac{a}{a^2 + r_0^2}f(r_0, \varphi)H_\varphi + \frac{r_0}{a^2 + r_0^2}(g - H_z)f(r_0, \varphi)$$

или

$$v = \sqrt{r_0(g - H_z)f(r_0, \varphi) - \frac{a^2 + r_0^2}{r_0}H_r + af(r_0, \varphi)H_\varphi}. \quad (5)$$

Подставляя это значение φ во второе из уравнений (1), получим после преобразований

$$\frac{r_0^2 f^2(r_0, \varphi) + a^2 + r_0^2}{r_0}\frac{d}{d\varphi}\left[-\frac{H_r}{r_0} + \frac{a}{a^2 + r_0^2}f(r_0, \varphi)H_\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{r_0}{a^2 + r_0^2}(g - H_z)f(r_0, \varphi)\right] = -2\left\{-fH_r + \frac{ar_0 f^2}{a^2 + r_0^2}H_\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{f^2 r_0^2}{a^2 + r_0^2}(g - H_z) + fH_r + \frac{a}{r_0}H_\varphi + g - H_z\right\}\left\{\frac{a}{r_0} -\right.$$

$$-\frac{kr_0}{\sqrt{a^2+r_0^2}}\sqrt{f^2+\frac{a^2+r_0^2}{r_0^2}}\Big]+2H_\varphi\left[f^2+\frac{a^2+r_0^2}{r_0^2}\right],$$

где в правой части под f следует подразумевать $f(r_0, \varphi)$.

Вводя еще угол α:

$$\cos\alpha=\frac{r_0}{\sqrt{a^2+r_0^2}},\quad \sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+r_0^2}},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{r_0},$$

получим после сокращений окончательную формулу

$$\frac{d}{d\varphi}\left[-\frac{H_r}{\cos^2\alpha}+f(\operatorname{tg}\alpha\cdot H_\varphi+g-H_z)\right]=$$

$$=-2\left[\operatorname{tg}\alpha H_\varphi+g-H_z\right]\left[\operatorname{tg}\alpha-k\sqrt{1+f^2\cos^2\alpha}\right]+\sqrt{\frac{2H_\varphi}{\cos^2\alpha}}. \qquad (6)$$

В равенствах (5) и (6) вместо z подставлено его значение из уравнения (3).

Если $f=f(r_0, \varphi)$ удовлетворяет уравнению (6), то поверхность (2), проходящая через винтовую линию (3), допускает движение по этой кривой в заданном поле сил H и силы тяжести g; при этом за $f_1(r, \varphi)$ можно взять произвольную конечную вблизи от начала координат функцию.

Для гладкой поверхности $k=0$ уравнение (6) упрощается и принимает вид:

$$\frac{d}{d\varphi}\left[-\frac{1}{\cos^2\alpha}H_r+f(H_\varphi\operatorname{tg}\alpha+g-H_z)\right]=-2[H_\varphi+(g-H_z)\operatorname{tg}\alpha]. \qquad (7)$$

Задавая произвольно поле сил H_r, H_φ, H_z можем определить из (6) или (7) искомые поверхности.

Поверхность (2) будет винтовой, если функции $f(r_0, \varphi)$ и $f_1(r, \varphi)$ не зависят от φ.

Положим

$$f=f(r_0, \varphi)=f'(r_0);$$

тогда

$$\frac{df}{d\varphi}=0$$

и уравнения (6), (7) принимают вид:

$$f\left[\operatorname{tg}\alpha\frac{dH_\varphi}{d\varphi}-\frac{dH_z}{d\varphi}\right]=\frac{1}{\cos^2\alpha}\frac{dH_r}{d\varphi}-2(\operatorname{tg}\alpha H_\varphi+$$

$$+g-H_z)(\operatorname{tg}\alpha-k\sqrt{1+f^2\cos^2\alpha})+\frac{2H_\varphi}{\cos^2\alpha}, \qquad (6')$$

$$f=\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}\frac{dH_r}{d\varphi}-2\left[\operatorname{tg}\alpha\cdot H_\varphi+g-H_z\right]\operatorname{tg}\alpha+\frac{2H_\varphi}{\cos^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha\frac{dH_\varphi}{d\varphi}-\frac{dH_z}{d\varphi}}. \qquad (7')$$

Отсюда можно определить f, если H_φ, или H_z после подстановки z из (3) будут зависеть от φ. Но чтобы f не зависело от φ, как мы далее предположим, числитель, т. е. H_φ, H_z и $\frac{dH_r}{d\varphi}$, вообще говоря, не должны зависеть от φ. Таким образом, существование гладких винтовых поверхностей, допускающих в заданном поле движение по винтовой линии на любом расстоянии от оси, если и возможно, то в специальных случаях.

Для шероховатой поверхности, наоборот, отыскание таких повер ностей не представляет особых затруднений. Предположим для простот что сила поля в точках поверхности обладает осевой симметрией — отн сительно оси OZ и H_r, H_φ, H_z не зависят от z и φ; тогда из (6) следу

$$\frac{df}{d\varphi} = -2(\operatorname{tg}\alpha - k\sqrt{1+f^2\cos^2\alpha}) + \frac{2H_\varphi}{H_\varphi \sin\alpha\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha - H_z\cos^2\alpha}. \quad ($$

Если $H_\varphi = 0$, то получается поверхность, не зависящая от остальных кс понент силового поля, т. е. такая же, как для обычной тяжелой точ только скорость движения будет другая, как то видно из формулы (5 Для увеличения скорости H_z и H_r должны быть отрицательны. Это обс ятельство может иметь практическое значение, так как обычные спира ные сепараторы часто плохо работают.

Переходя к случаю $H_\varphi \neq 0$, мы, задав H_r, H_φ и H_z, можем из ди ференциального уравнения (8) найти f. Исследуемая поверхность бу винтовой, если $\frac{df}{d\varphi} = 0$. В таком случае уравнение (8) из дифференциа ного превращается в простое алгебраическое и дает

$$f = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{1}{k^2}\left(\frac{H_\varphi + (H_z - g)\operatorname{tg}\alpha}{H_\varphi + \operatorname{tg}\alpha + g - H_z}\right)^2 - 1},$$

где H_φ и H_z могут быть любыми функциями от r_0.

Заметим, что первый случай ($H_\varphi = 0$) легко создать при помощи э тростатического поля, расположив, например, вдоль оси цилиндра (т оси винтовой линии) достаточно длинную нить одноименных полюсов. лучим поле, отвечающее потенциалу

$$U = \pm c \lg r,$$

откуда

$$H_\varphi = 0,\quad H_z = 0,\quad H_r = \pm\frac{c}{r},$$

$$v = \sqrt{r_0\left[gf \pm \frac{c}{r_0\cos^2\alpha}\right]}.$$

Второй случай характерен для электромагнитного поля. Например, пустив вдоль оси цилиндра электрический ток, получим магнитное

$$H_z = 0,\quad H_r = 0,\quad H_\varphi = \frac{c}{r}.$$

Тогда уравнение (9) даст

$$f = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{1}{k^2}\left(\frac{\frac{c}{r_0} - g\operatorname{tg}\alpha}{g + \frac{c}{r_0}\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 - 1},$$

$$v = \sqrt{f\left(r_0 g + \frac{ac}{r_0}\right)}.$$

[1] Как частный случай для $k = 0$, при этом получается поверхность Каталана А. В. Светлов, О винтовых поверхностях, допускающих движение точки по винт линиям. Известия Ленинградского Электротехнического института им. В. И. Уль (Ленина), вып. XXII, 1940, стр. 117—138.

Практическое применение этого поля затрудняется. Поэтому желательно, может быть, конструирование более сложных полей.

Рассмотрим еще *однородные поля*.

Для поля, направленного вдоль оси цилиндра,

$$U = \pm cz,$$

$$H_r = 0, \quad H_\varphi = 0, \quad H_z = \pm c$$

и мы получим из (9)

$$f = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}_1^2\alpha}{k^2} - 1},$$

т. е. случай винтовой поверхности, рассмотренный М. И. Акимовым. Здесь

$$v = \sqrt{r_0 f(g \pm c)}.$$

Для горизонтального поля

$$U = Cx = Cr\cos\varphi,$$

$$H_z = 0, \quad H_r = C\cos\varphi, \quad H_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -C\sin\varphi.$$

Формула (6) дает уравнение

$$\frac{df}{d\varphi}(g - C\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi) - Cf\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\varphi + 3\frac{C\sin\varphi}{\cos^2\alpha} =$$

$$= -2[g - C\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi][\operatorname{tg}\alpha - k]\sqrt{1 + f^2\cos^2\alpha}.$$

В этом случае f, вообще говоря, должна зависеть от φ.