Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени Горного института, том XV—XVI, 1949

I. Горное дело

Воздушная полигонометрия и нивелирование с помощью базисных плоскостей отстояния

Проф. *Н. Г. Келль*

§ 1. Общие соображения

В существующих методах за условную горизонтальную плоскость обычно берут плоскость первого снимка маршрута.

При этом приходится учитывать разность высоты полета в формулах, выражающих отстояние. Нам представляется более простым взять в качестве условной горизонтальной плоскости плоскость, проходящую через базис и линию пересечения плоскостей стереоскопической пары смежных плановых аэроснимков одного маршрута. Эту базисную плоскость мы называем плоскостью отстояний. Направление отстояний в каждой паре немного отличается от вертикального направления, поскольку разность высот полета невелика и снимки являются плановыми с небольшим углом наклона.

Линии пересечения плоскостей снимков данной пары с плоскостью отстояний будут параллельны между собой и образуют собой прямые нулевых искажений того и другого снимка по отношению к плоскости отстояний.

§ 2. Вывод формул для элементов ориентирования снимков по отношению к плоскости отстояний

На рисунке 1 мы берем точку i, лежащую на первом снимке на оси Y_1, проходящей через o_1 и перпендикулярной к линии $o_1\, o_{2\,.\,1}$, принятой за ось X_1. Значит, $x_{i\,.\,1} = 0$.

На снимке II, ввиду небольшого угла между плоскостью II снимка и плоскостью отстояний, взаимное расположение точек o_2, c_2, $n_{1\,.\,2}$, n_2 и $o_{1\,.\,2}$ можно отнести и к плоскости отстояний.

c_2 — точка нулевых искажений,

n_2 — точка надира плоскости отстояний (условная точка надира)

$$O_{1\,.\,2}K \parallel o_2 n_2 \parallel \text{оси } X_c.$$

Непосредственно из рисунка 1 имеем:

$$x'_{i\,.\,c\,.\,2} = x_{i\,.\,2}\cos(\varphi + \varkappa) + y_{1\,.\,2}\sin(\varphi + \varkappa) + f\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha_2.$$

α_2 — угол между плоскостью II снимка и плоскостью отстояний.

$$y'_{i\,.\,c\,.\,2} = -x_{i\,.\,2}\sin(\varphi + \varkappa) + y_{i\,.\,2}\cos(\varphi + \varkappa).$$

Из теории (см. Геологическую фотограмметрию) имеем:

$$x_c = \frac{x'_c}{1-\omega}; \quad y_c = \frac{y'_c}{1-\omega}; \quad \omega = \frac{x'_c}{f}\sin\alpha, \tag{2.1}$$

и вообще

$$y = x_c \sin\varphi + y_c \cos\varphi + f \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \sin\varphi, \tag{2.2}$$

где y'_c, x'_c — координаты на плоскости снимка и y, x_c и y_c — координаты на плоскости отстояний.

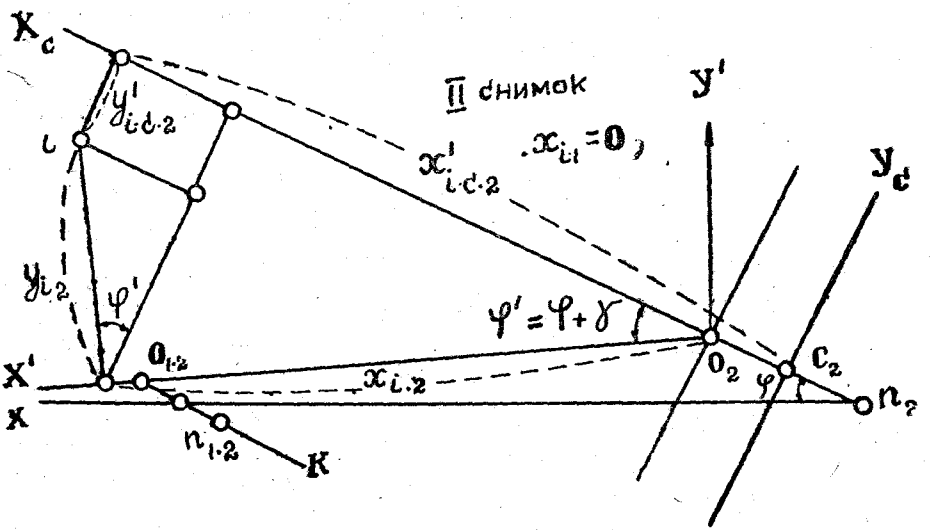


Рис. 1.

Подставляя в выражение (2.2) значения x_c и y_c и $x'_{i.c.2}$ и $y'_{i.c.2}$ получим:

$$y_i = \frac{x_{i.2}\cos(\varphi+\varkappa)\sin\varphi + y_{i.2}\sin\varphi\sin(\varphi+\varkappa) - x_{i.2}(\varphi+\varkappa)\cos\varphi + y_{i.2}(\varphi+\varkappa)\cos\varphi}{1-\omega i} +$$

$$+ \frac{f\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_2 \sin\varphi}{1-\omega_2} + f\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_2 \sin\varphi.$$

Поскольку ω_2 мало, последние малые члены, содержащие $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$, можно объединить в один $f\operatorname{tg}\alpha_2\sin\varphi$, и для y_i мы при этом получим такое выражение:

$$y_i = \frac{y_{i.2}\cos\varkappa - x_{1.2}\sin\varkappa}{1-\omega_2} + f\operatorname{tg}\alpha_2\sin\varphi, \tag{2.3}$$

где y_i, $y_{i.2}$ и $x_{i.2}$ — координаты любой точки, в том числе и не обусловленной равенством $x_{i.1}=0$.

Аналогично из координат I снимка получим то же значение на плоскости отстояний по формуле

$$y_i = \frac{y_{i.1}\cos\varkappa + x_{i.1}\sin\varkappa}{1-\omega_1} + f\operatorname{tg}\alpha_1\sin\varphi, \tag{2.}$$

где α_1 — условный угол наклона I снимка.

Сопоставив y_i для точки i, у которой $x_{i\,.\,1}=0$, получим равенство:

$$\frac{y_{i\,.\,2}\cos\varkappa - x_{i\,.\,2}\sin\varkappa}{1-\omega_2} + f\operatorname{tg}\alpha_2\sin\varphi = \frac{y_{i\,.\,1}\cos\varkappa}{1-\omega_1} + f\operatorname{tg}\alpha_1\sin\varphi,$$

или вследствие малости угла $\varkappa$, как увидим дальше, примем $\cos\varkappa$ за единицу и получим, заменяя $\frac{1}{1-\omega_2}$ через $1+\omega_2$ и $\frac{1}{1-\omega_1}$ через $1+\omega_1$, с точностью до членов первого порядка малости:

$$y_{i\,.\,2} - x_{i\,.\,2}\sin\varkappa + y_{i\,.\,2}\omega_2 + f\operatorname{tg}\alpha_2\sin\varphi = y_{i\,.\,1} + y_{i\,.\,1}\omega_1 + f\operatorname{tg}\alpha_1\sin\varphi,$$

или

(член $x_{i\,.\,2}\sin\varkappa\omega_2$ — отброшен, как второго порядка).

$$q_{i\,.\,2} = y_{i\,.\,1} - y_{i\,.\,2} = y_{i\,.\,2}\omega_2 - y_{i\,.\,2}\omega_1 - x_{i\,.\,2}\sin\varkappa + f\sin\varphi\,\Delta\alpha, \qquad (2.5)$$

где

$q_{1\,.\,2}$ — поперечный параллакс

$$\Delta\alpha = \operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1 = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Для точки o_1 и $o_{1\,.\,2}$ ординаты $y_{0\,.\,1}=0$; $y_{0\,.\,2}=0$; значит $q_0=0$, и

$$x_{0\,.\,1}\sin\varkappa + f\sin\varphi\Delta\alpha = 0.$$

Откуда

$$\sin\varkappa = \frac{f\Delta\alpha}{x_{0\,.\,2}}\sin\varphi = \frac{f\Delta\alpha}{b}\sin\varphi, \qquad (2.6)$$

где b — базис на первом или втором снимке.

$$b = \overline{o_1 o_{2\,.\,1}} \text{ или } = \overline{o_{1\,.\,2} o_2}.$$

Как видим $\varkappa$ такого же порядка, как и углы α_2 и α_1 и $\Delta\alpha$. Учитывая, что $x_{0\,.\,2}\sin\varkappa = f\sin\varphi\,\Delta\alpha$, можно принять, что и

$$x_{i\,.\,2}\sin\varkappa = f\sin\varphi\,\Delta\alpha, \qquad (2.7)$$

так как $x_{i\,.\,2}$ для случая $x_{i\,.\,1}=0$ не многим отличается от $x_{0\,.\,2}$ или от $b_2 = \overline{o_{1\,.\,1} o_2}$.

Значит, с той же точностью до членов первого порядка

$$q_{i\,.\,2} = y_{i\,.\,1} - y_{i\,.\,2} = y_{i\,.\,2}\omega_2 - y_{i\,.\,1}\omega_1, \qquad (2.8)$$

где при $x_{i\,.\,1}=0$,

$$\omega_2 = \frac{x'_{i\,.\,c\,.\,2}}{f}\sin\alpha_2 = \frac{x_{i\,.\,2}\cos(\varphi+\varkappa)\sin\alpha_2}{f} + \frac{y_{i\,.\,2}\sin(\varphi+\varkappa)\sin\alpha_2}{f} + 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha_2;$$

$$\omega_1 = \frac{x'_{i\,.\,c\,.\,1}}{f}\sin\alpha_1 = \frac{y_{i\,.\,1}\sin(\varphi+\varkappa)\sin\alpha_1}{f} + 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha_1.$$

Отбрасывая члены второго порядка $2\sin^2\frac{1}{2}\alpha_2$ и $2\sin^2\frac{1}{2}\alpha_1$, получим вместо равенства (2.8) такое:

$$q_{i\,.\,2} = \frac{y_{i\,.\,2}\,x_{i\,.\,2}\cos(\varphi+\varkappa)\sin\alpha_2}{f} +$$

$$+ \frac{y^2_{i\,.\,2}\sin(\varphi+\varkappa)\sin\alpha_2}{f} - \frac{y^2_{i\,.\,1}\sin(\varphi+\varkappa)\sin\alpha_1}{f},$$

или, считая приближенно $y_{i\,.\,2} = y_{i\,.\,1}$, имеем, что

$$q_{i\,.\,2} = \frac{x_{i\,.\,2} y_{i\,.\,2} \cos(\varphi + \varkappa) \sin \alpha_2}{f} + \frac{y_{i\,.\,2} \sin(\varphi + \varkappa)\, \Delta\alpha}{f}, \tag{2.9}$$

где $\Delta\alpha = \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 = \alpha_2 - \alpha_1$.

Возьмем две точки 1 и 2, у которых при $x_{1\,.\,1}$ и $x_{2\,.\,1} = 0$ ордината $y_{2\,.\,2} = -y_{1\,.\,2}$, тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} q_{1\,.\,2} &= \frac{x_{1\,.\,2}\, y_{1\,.\,2} \cos(\varphi + \varkappa) \sin \alpha_2}{f} + \frac{y^2_{i\,.\,2} \sin(\varphi + \varkappa)\, \Delta\alpha}{f} \\ q_{2\,.\,2} &= -\frac{x_{2\,.\,2}\, y_{2\,.\,2} \cos(\varphi + \varkappa) \sin \alpha_2}{f} + \frac{y^2_{1\,.\,2} \sin(\varphi + \varkappa)\, \Delta\alpha}{f}, \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

или

$$q_{1\,.\,2} = x_{1\,.\,2}\, y_{1\,.\,2}\, u_2 + y^2_{2\,.\,2} v_2 \quad \text{и} \quad q_{2\,.\,2} = -x_{2\,.\,2} y_{1\,.\,2} u_2 + y^2_{1\,.\,2} v_2, \tag{2.11}$$

где

$$u_2 = \frac{\cos(\varphi + \varkappa) \sin \alpha_2}{f} \quad \text{и} \quad v_2 = \frac{\sin(\varphi + \varkappa)\, \Delta\alpha}{f}. \tag{2.12}$$

Решением уравнений (2.11) найдем, что

$$u_2 = \frac{q_{1\,.\,2} - q_{2\,.\,2}}{y_{1\,.\,2}(x_{1\,.\,2} + x_{2\,.\,2})} \quad \text{и} \quad v_2 = \frac{q_{1\,.\,2} + q_{2\,.\,2}}{2y^2_{1\,.\,2}}. \tag{2.13}$$

При получении v_2 принято, что $x_{1\,.\,2} = x_{2\,.\,2}$.

Это допустимо не в гористой местности. Также для точек 3 и 4 при $x_{3\,.\,2} = x_{4\,.\,2} = 0$ и $y_{4\,.\,1} = -y_{3\,.\,1}$ найдем u_1 и v_1

$$u_1 = \frac{q_{3\,.\,1} - q_{4\,.\,1}}{y_{3\,.\,1}(x_{3\,.\,1} + x_{4\,.\,1})}; \quad v_1 = -\frac{q_{3\,.\,1} + q_{4\,.\,1}}{2y^2_{3\,.\,1}}, \tag{2.14}$$

где

$$u_1 = \frac{\cos(\varphi + \varkappa) \sin \alpha_1}{}; \quad v_1 = \frac{\sin(\varphi + \varkappa)\, \Delta\alpha}{f}. \tag{2.15}$$

Из сопоставления выражений (2.12) и (2.15) усматриваем, что v_1 должно быть равно v_2. Это является контролем и проверкой того, что $x_{1\,.\,2}$ и $x_{2\,.\,2}$ или $x_{3\,.\,1}$ и $x_{4\,.\,1}$ не слишком разнятся друг от друга.

Найдем разность $u_2 - u_1$

$$u_2 - u_1 = \frac{\cos(\varphi + \varkappa)\, \Delta\alpha}{f}; \quad v_2 = v_1 = \sin(\varphi + \varkappa)\, \Delta\alpha.$$

Разделим v_1 или v_2 на разность $u_2 - u_1$, получим

$$\operatorname{tg}(\varphi + \varkappa) = \frac{v_1}{u_2 - u_1} = \frac{v_2}{u_2 - u_1} \tag{2.16}$$

и сам угол $\varphi + \varkappa$.

После этого находим

$$\alpha_1 = \frac{u_1 f}{\cos(\varphi + \varkappa)} \cdot 3438'; \quad \alpha_2 = \frac{u_2 f}{\cos(\varphi + \varkappa)} \cdot 3438'. \tag{2.17}$$

Добавляем сюда равенство (2.6), находим угол $\varkappa$ и наконец получаем угол φ по формуле:

$$\varphi = (\varphi + \varkappa) - \varkappa. \tag{2.18}$$

Таким образом все элементы ориентировок обоих снимков по отношению к принятой базисной плоскости отстояний нами найдены.

Можно далее эти элементы уточнить, ориентировав снимки по прямым $c_1c_{2\cdot 1}$ и $c_{1\cdot 2}c_2$. Затем поставив снимки так, чтобы прямые o_1n_1 и o_2n_2 их были параллельны между собой и перпендикулярны к оси X прибора, мы непосредственно можем замерять x_c' и y_c' и вводить поправки. Это потребуется в гористой местности.

К уточнению величины α_1, α_2, φ и $\varkappa$ мы еще вернемся (см. § 12 ниже), а пока займемся пространственным полигоном, составленным из базисов и из плоскостей отстояний маршрута. Надо построить ломаную поверхность отстояний и базисный полигон в ней.

Формулы (2.13)—(2.18) проверены еще на геометрических соотношениях с привлечением керновых точек.

Если принять, что отрицательные ординаты имеют точки 1 и 3, и взять малые углы в аналитической мере, то из геометрических соотношений мы получаем такие выражения:

$$u_2 = \frac{1}{f}\alpha_2\cos\varphi = \frac{q_1 - q_2}{y'_{2\cdot 2}(x_{1\cdot 2} + x_{2\cdot 2})};\quad u_1 = \frac{1}{f}\alpha_2\cos\varphi = \frac{q_3 - q_4}{y'_{4\cdot 1}(x_{3\cdot 1} + x_{4\cdot 1})} \qquad (2.13\ bis)$$

$$v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{1}{f}\Delta\alpha\sin\varphi = \frac{1}{2}(v_1' + v_2') + (u_1 - u_2)\varkappa, \qquad (2.14\ bis)$$

где

$$y'_{2\cdot 2} = y_{2\cdot 2} - \frac{1}{2}(q_1 - q_2);\quad y'_{4\cdot 1} = y_{4\cdot 1} - \frac{1}{2}(q_3 - q_4);\quad \Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2,$$

$$v_1' = -\frac{q_3 + q_4}{2y'^2_{4\cdot 1}};\quad v_2' = \frac{q_1 + q_2}{2y'^2_{2\cdot 2}};\quad \varkappa = \frac{v_1' + v_2'}{b_1 + b_2}\cdot f^2, \qquad (2.15\ bis)$$

$$v_1 = v_1' + (u_1 - u_2)\varkappa;\quad v_2 = v_2' + (u_1 - u_2)\varkappa, \qquad (2.16\ bis)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{2}(v_1 + v_2)}{u_1 - u_2} = \frac{\frac{1}{2}(v_1' + v_2')}{u_1 - u_2} + \varkappa. \qquad (2.17\ bis)$$

φ — это дирекционный угол направления $\overrightarrow{o_1o_2}$ при оси X, представляющей собой прямую, соединяющую керновые точки 1 и 2 снимка, плоскости которых развернуты вокруг их линии пересечения и совмещены с принятой плоскостью отстояний.

Положительное направление оси X совпадает с направлением полета.

$\varkappa$ — это малые углы (положительные или отрицательные), образованные направлениями $\overrightarrow{o_1o_{2\cdot 1}}$ и $\overrightarrow{o_{1\cdot 2}o_2}$ с положительным направлением той же оси X.

$$\sin\varkappa_1 = \frac{v_1}{b_1}f^2;\quad \sin\varkappa_2 = \frac{v_2}{b_2}f^2. \qquad (2.18\ bis)$$

Знаки α_1, α_2 и $\varkappa$ и наименование четверти угла φ определяются знаками u_1, u_2 и v_1 или v_2. Заметим, что $x_{1\cdot 2}$ и $x_{2\cdot 2}$ имеют отрицательное значение, отражающееся на знаке u_2.

§ 3. Линейная и гномоническая проекция маршрута

Плоскость отстояний первой пары мы берем за общую плоскость проекций. Следующая пара из 2 и 3 снимка имеет с первой парой общую плоскость 2-го снимка, которая таким образом связывает вторую пару с первой, т. е. связывает плоскость отстояний второй пары с плоскостью проекций. На рис. 2 дана гномоническая проекция N_1, плоскости отстояния первой пары или линейная проекция нормали к этой плоскости.

N_1 — является центром проекции.

Проведем через N_1 условную главную вертикаль в виде прямой $N_1O_2O_1$, на которой отложим с помощью масштаба минут отрезки $N_1O_1 = \alpha_1$ и $\overline{N_1O_2} = \alpha_2$, где $\alpha_{1.1}$ и $\alpha_{2.1}$ выраженные в минутах углы наклона 1 и 2 снимка по отношению к плоскости отстояний первой пары. Далее, через N_1 проведена прямая B_1B_1, представляющая гномоническую проекцию первого базиса b или B_1.

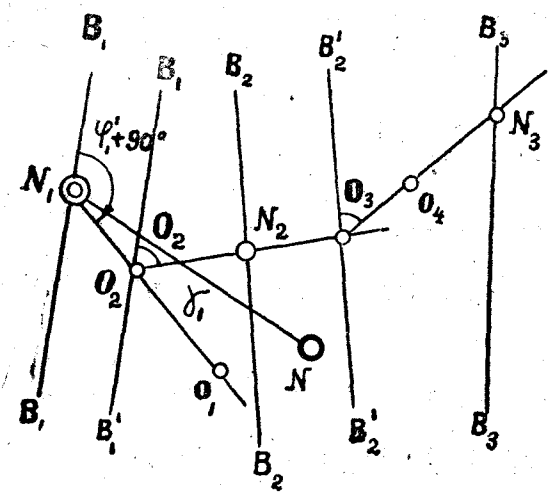


Рис. 2.

Направление B_1B_1 определяется углом $\varphi_1' + 90°$, где $\varphi_1' = \varphi_1 + \varkappa$, поясненному на рис. 1 в виде $\varphi + \varkappa$.

Проводим $B_1'B_1'$ через точку O_2 параллельно B_1B_1. Точка O_2 является гномонической проекцией плоскости II снимка, как точка O_1 плоскости I снимка.

По углу Θ_2, замеренному на II снимке, проводим прямую O_2O_3 условной главной вертикали второй пары. Для этой пары у нас получены углы $\alpha_{2.2}$ и $\alpha_{3.2}$. Откладываем отрезки $\overline{O_2N_2} = -\alpha_{2.2}$ и $\overline{N_2O_3} = \alpha_{3.2}$, с помощью масштаба минут получим точки N_2 и O_3 как гномонические проекции плоскости отстояния второй пары и плоскости III снимка. На рисунке 2 видно, что $\alpha_{1.1}$ и $\alpha_{2.1}$ имеют одинаковые знаки, а $\alpha_{2.2}$ и $\alpha_{3.2}$ — разные.

Проводим через O_3 прямую $B_2'B_2'$, параллельную B_2B_2, которая построена по соответствующему углу $\varphi_2' + 90°$ между ней и направлением O_2O_3 на III снимке.

Откладываем угол Θ_3, взятый с III снимка, получаем прямую O_3N_3, на которой сначала откладываем $O_3N_3 = -\alpha_{3.3}$ и затем $\overline{N_3O_4} = \alpha_{4.3}$. Строим B_3B_3 и т. д. Получаем точки O_i и N_i до последней пары в данном отрезке маршрута.

Теперь остается найти линейную проекцию N отвесной линии или гномоническую проекцию горизонтальной плоскости (точка N на рис. 2) и вся система базисов ломаной поверхности отстояний и плоскостей снимков получит ориентировку относительно отвесной (вертикальной) линии. N строится по направлению и углу падения I плоскости (см. § 8 ниже).

Соединив точку N на рисунке 2 с точками O_1, O_2, O_3 и измерив с помощью масштаба минут отрезки NO_1, NO_2, NO_3, найдем величину углов

абсолютного наклона снимков по отношению к горизонтальной плоскости.

Длины перпендикуляров, опущенных из N на прямые B_1B_1, B_2B_2, B_3B_3, в масштабе минут дадут углы наклона δ_1, δ_2, δ_3, . . . базисов по отношению к горизонтальной плоскости.

§ 4. Установление длины базисов

Изображения базисов на снимках будут разно-масштабные. Их нужно привести к одному определенному масштабу.

Под изображением базиса мы понимаем расстояние между изображениями на снимках точек условных надиров, т. е. тех точек, которые лежат на поверхности земли в пересечении с ней прямых, нормальных к принятым плоскостям отстояний.

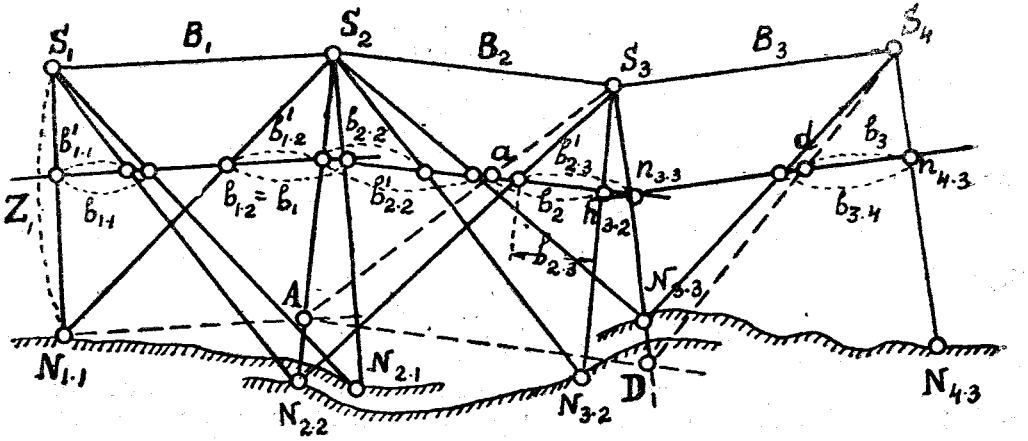


Рис. 3.

На рисунке 3 представлена часть базисного пространственного полигона, причем нужно себе представлять, что базисы B_1, B_2, B_3, . . . лежат в разных плоскостях.

Мы имеем ломаную линию в пространстве, а не на одной плоскости.

Прежде всего нужно заметить, что все длины $b_{1\,.\,1}$, $b'_{1\,.\,1}$, $b_{1\,.\,2}$, $b'_{1\,.\,2}$, $b_{2\,.\,2}$, $b'_{2\,.\,2}$ и т. д., представленные на рисунке 3, приведены к соответствующим плоскостям отстояний, т. е. исправлены за углы наклона $\alpha_{1\,.\,1}$, $\alpha_{2\,.\,1}$, $\alpha_{2\,.\,2}$, $\alpha_{3\,.\,2}$, $\alpha_{3\,.\,3}$ и т. д. (см. ниже § 11). Что представляют собой эти длины, ясно непосредственно из рисунка 3. Прямая $N_{1\,.\,1}A$ параллельна базису S_1S_2, прямая AD параллельна S_2S_3. Все базисы приведены как бы к одному отстоянию Z_1.

Приведенные таким образом к одному масштабу базисы на снимках обозначены через b_1, b_2, b_3, . . .

Очевидно,

$$b_1 = b_{1\,.\,2}, \tag{4.1}$$

$b_2 =$ отрезку $\overline{an_{3\,.\,2}}$.

Но так как изображения a точки A на III снимке нет, поскольку самой точки A, как воображаемой, в натуре нет, то приходится величину b_2 вычислять, *помножая* $b_{2\,.\,3}$ на отношение $\frac{b'_{1\,.\,2}}{b'_{1\,.\,1}}$, равное приближенно отношению $\frac{Z_1}{S_1N_{2\,.\,2}}$,

$$b_2 = b_{2\,.\,3}\frac{b'_{1\,.\,2}}{b'_{1\,.\,1}}. \tag{4.2}$$

Для получения b_3, равного отрезку $dn_{4\,.\,3}$, нужно сначала вместо $b'_{2\,.\,3}$ получить $b''_{2\,.\,3}$, приведя $b'_{2\,.\,3}$ к масштабу, отвечающему отстоянию Z_1, т. е. помножить $b'_{2\,.\,3}$ на отношение $\frac{b'_{1\,.\,2}}{b'_{1\,.\,1}}$, служившее для получения величины b_2.

$$b''_{2\,.\,3} = b'_{2\,.\,3}\frac{b'_{1\,.\,2}}{b'_{1\,.\,1}}.$$

Тогда аналогично с формулой (4.2)

$$b_3 = b_{3\,.\,4}\cdot\frac{b''_{2\,.\,3}}{b'_{2\,.\,2}},$$

или

$$b_3 = b_{3\,.\,4}\cdot\frac{b'_{1\,.\,2}}{b'_{1\,.\,1}}\cdot\frac{b'_{2\,.\,3}}{b'_{2\,.\,2}}. \tag{4.3}$$

Также

$$b_4 = b_{4\,.\,5}\cdot\frac{b'_{1\,.\,2}}{b'_{1\,.\,1}}\cdot\frac{b'_{2\,.\,3}}{b'_{2\,.\,2}}\cdot\frac{b'_{3\,.\,4}}{b'_{3\,.\,3}}. \tag{4.4}$$

Значит, для приведения базисов к одному масштабу (к одному отстоянию Z_1) нужно вычислять величины a_1, a_2, a_3, . . ., представляющие отношения

$$a_1 = 1;\ a_2 = \frac{b'_{1\,.\,2}}{b'_{1\,.\,1}};\quad a_3 = \frac{b'_{2\,.\,3}}{b'_{2\,.\,2}};\quad a_4 = \frac{b'_{3\,.\,4}}{b'_{3\,.\,3}};\ \ldots \tag{4.5}$$

и вычислить приведенные величины базисов по формулам:

$$b_1 = a_1b_{1\,.\,2} = b_{1\,.\,2};\ b_2 = a_2b_{2\,.\,3};\ b_3 = a_2a_3b_{3\,.\,4};$$
$$b_4 = a_2a_3a_4b_{4\,.\,5};\ \text{и т. д.} \tag{4.6}$$

§ 5. Угловые координаты базисов

Если согласно построению, объясненному на рисунке 2, мы имеем чертеж расположения линейных проекций нормалей к плоскостям отстояний, то легко получить направления базисов в пространстве по отношению хотя бы к первой плоскости отстояний и к первому базису в ней.

Первую плоскость отстояний мы принимаем за плоскость XY и первый базис в ней за ось X.

На рисунке 4 даны линейные проекции N_1, N_2, N_3, . . . на первой плоскости отстояний, полюсом которой является N_1. Кроме того даны гномонические проекции базисов $\overline{S_1S_2}$, $\overline{S_2S_3}$, $\overline{S_3S_4}$, $\overline{S_4S_5}$, . . . (см. рис. 3) в виде прямых B_1B_1, B_2B_2, B_3B_3, . . . , проходящих через N_1, N_2, N_3, . . .

Проводим из точки N_1 перпендикуляры к этим прямым в виде лучей b_1, b_2, b_3, . . . и определяем точки B'_2, B'_3, B'_4, . . . Луч b_1 принимаем за ось X, а B_1B_1 за ось Y. Длины перпендикуляров $\overline{N_1B'_2}$, $\overline{N_1B'_3}$, $\overline{N_1B_4}$, . . . отвечают углам наклона δ_2, δ_3, δ_4, . . . базисов B_1, B_2, B_3, . . . по отношению к первой плоскости отстояний, а углы α_2, α_3, α_4, . . . являются дирекционными углами этих базисов.

Углы δ определяются по масштабу минут на рисунке 4, а углы α вычисляются по углам $\varphi' = \varphi + x$, поясненным на рисунке 1.

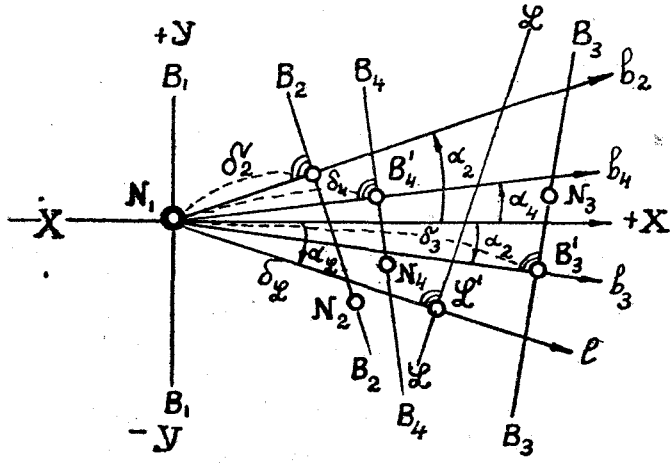


Рис. 4.

Имея для каждого базиса маршрута углы α и δ и приведенную длину b, легко вычислить три координаты вершин пространственного полигона $S_1S_2S_3S_4$ . . . в масштабе первого базиса b_1 и получить направление и длину l его замыкающей L в том же масштабе.

§ 6. Вычисление пространственного полигона

Обратимся к рисунку 3.

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Для точки } S_1\text{: } x_1 = 0;\ y_1 = 0;\ z_1 = 0.\\
&\text{Для точки } S_2\text{: } x_2 = b_1;\ y_2 0_1;\ z_2 = 0.\\
&\text{Для точки } S_3\text{: } x_3 = b_1 + b_2 \cos\delta_2 \cos\alpha_2,\\
&\qquad\qquad y_3 = b_3 \cos\delta_2 \sin\alpha_2\text{: } z_3 = b_2 \sin\delta_2.\\
&\text{Для точки } S_4\text{: } x_4 = x_3 + b_3 \cos\delta_3 \cos\alpha_3,\\
&\qquad\qquad y_4 = y_3 + b_3 \cos\delta_3 \sin\alpha_3;\ z_4 = z_3 + b_3 \sin\delta_3. \text{ и т. д.}
\end{aligned}\right\} \quad (6.1)$$

Напомним, что здесь α_2, α_3, α_4, . . . не углы наклона снимков, а дирекционные углы базисов по отношению к первому базису.

Так как углы α_2, α_3, α_4, . . . не велики — полет прямолинеен, то они вычисляются, как указано выше, просто по углам $\varphi' = \varphi + x$ без особого их приведения к первой плоскости отстояний.

Длина l замыкающей L между точкой S_1 и последней точкой S_i выразится известной формулой

$$l=\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2}\,. \tag{6.2}$$

Ее направление по взятой системе координат определится углами δ_L и α_L, находимыми по формулам

$$\sin\delta_L=\frac{z_i}{l}\,, \tag{6.3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_L=\frac{y_i}{x_i}\,. \tag{6.4}$$

По углам α_L и δ_L можно нанести на рисунке 4 гномоническую проекцию направления L в виде прямой LL. Для этого откладываем угол α_z от оси X и получаем луч l. На нем откладываем по масштабу минут отрезок N_1L'', равный δ_L, и через точку L' проводим LL, перпендикулярную к лучу. Она и будет гномонической проекцией, замыкающей L полигона.

§ 7. Масштабирование пространственного полигона

В целях более точного масштабирования пространственного полигона, составленного из приведенных базисов b_1, b_2, b_3, . . . , необходимо в начале и в конце маршрута иметь по одной точке, заданной тремя геодезическими координатами, если местность гористая или, по крайней мере, имеющей определенное плановое положение, если местность не особенно гориста.

Одним словом, с достаточной точностью должно быть известно истинное расстояние между этими опорными точками.

Назовем их через P и Q. Точка P изображена на первой паре снимков, а Q — на последней паре с номером i данной части маршрута.

Истинное расстояние между ними найдено и равно D.

Остается найти соответствующее расстояние d модели местности.

Определим x_p, y_p и отстояние z_p точки P по первой паре снимков с базисом b_1.

Также найдем x''_Q, y''_Q и z''_Q точки Q по последней паре снимков с базисом b_i, приведенным к масштабу базиса b_1.

Координаты x''_Q, y''_Q и z''_Q нужно привести в общую систему координат первой плоскости отстояний. Получим.

$$\left.\begin{aligned} x'_Q&=x''_Q\cos\alpha_i-y''_Q\sin\alpha=x''_Q-y''_Q\sin\alpha_i\\ y'_Q&=y''_Q+x''_Q\sin\alpha_i \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

Для получения z'_Q нужно найти расстояние d_Q от изображения точки Q на левом снимке последней пары до прямой, проходящей через условную точку надира n_i этого снимка и параллельной прямой пересечения плоскости отстояния последней пары i с первой плоскостью отстояний, т. е. прямой перпендикулярной N_1N_i на рисунке 4. Тогда:

$$z'_Q=z''_Q+d_Q\sin\delta_i.$$

Координаты x'_Q, y_Q и z'_Q нужно прибавить к координатам x_i, y_i и z_i предпоследней точки стояния S_i, выраженным согласно формуле (6.1) (z'_Q — следует вычесть). После этого мы получим координаты x_Q, y_Q и z_Q точки Q в системе координат первой плоскости отстояний.

Остается вычислить d, расстояние между P и Q, в масштабе базисов или в масштабе модели местности m.

$$d = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}, \tag{7.3}$$

$$m = \frac{d}{D}, \text{ или } \frac{1}{m} = \frac{D}{d}. \tag{7.4}$$

Отсюда истинные длины базисов будут:

$$B_1 = b_1 \cdot \frac{1}{m}; \; B_2 = b_2 \cdot \frac{1}{m}; \; B_3 = b_3 \cdot \frac{1}{m}; \; \ldots \tag{7.5}$$

m — является искомым масштабом модели.

Конечно, точки P и Q не обязательно должны относиться к первой и последней паре, но это желательно. В противном случае придется экстраполировать.

№ 8. Геодезическое ориентирование модели

Нанесем в некотором масштабе M на отдельном листе бумаги проекцию базисного полигона на первую плоскость отстояний по координатам $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots$, вычисленным по формулам (6.1) и помноженным затем на обратный масштаб $\frac{1}{m} = \frac{D}{d}$. Масштаб M не равен m. Например, $M = \frac{1}{50000}$ или и $\frac{1}{20000}$, а m. дробное не круглое число. Проставим у каждой вершины полигона его условную отметку, равную $z \cdot \frac{1}{m}$, где z вычислено по формуле (6. 1). Имея эти отметки и направления линий пересечения отдельных плоскостей отстояний с первой плоскостью, найденные на рисунке 4 как прямые, перпендикулярные к векторам $\overline{N_1N_2}$, $\overline{N_1N_3}$, $\overline{N_1N_4}$, . . . мы можем начертить условные горизонтали всей ломаной поверхности отстояний на взятом листе по отношению к верхней плоскости.

Назовем этот лист листом горизонталей. На нем нанесен и полигон базисов.

Далее по обычным формулам вычисляем в натуральную величину координаты точек, выбранных на разных парах снимков. Формулы эти следующие:

$$\left.\begin{aligned} Z'' &= f\frac{B}{x_1 - x_2} \\ X' &= x_1\frac{B}{x_1 - x_2} \\ Y'' &= y\frac{B}{x_1 - x_2} \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

где x_1, x_2, и y измеренные стереоскопически на снимках координаты, исправленные за условный наклон снимков данной пары их.

Определим отстояние Z'' и координаты X' и Y' всех характерных точек, заснятых на данном маршруте.

По координатам X' и Y', имея направление каждого базиса и его начальную точку на листе горизонталей, можно нанести на этом листе все взятые характерные точки и выписать для них исправленные отстояния Z', полученные из Z'' путем вычитания из него поправки $\delta Z''$

$$Z' = Z'' - \delta Z''. \qquad (8.2)$$

Поправка $\delta Z''$ получается интерполированием отметок условных горизонталей ломаной поверхности отстояний, между которыми данная точка находится.

Среди характерных точек должно быть не менее трех опорных точек, имеющих абсолютные или относительные отметки. Эти точки должны образовать возможно бо́льший по площади треугольник, во всяком случае они не должны находиться на одной прямой.

Сопоставляя отметки этих трех или большего числа опорных точек с исправленными отстояниями Z', мы наносим на всей площади листа горизонталей особые горизонтали первой плоскости отстояний, которые мы называем отраженными горизонталями первой плоскости отстояний. По этим горизонталям мы находим направление и угол падения I плоскости.

Нулевая отраженная горизонталь может отвечать любой круглой отметке H_0, близкой к отметке H_A, одной (точки A) из опорных точек. Она наносится по разности $H_A - H_0$ и по найденному заложению отраженных горизонталей.

Отметки отраженных горизонталей, так же как и условных, выражаются в целых метрах.

Они представляют собой поправку $\delta Z'$ к отстояниям Z', которую следует вычитать из Z', чтобы получить вертикальное отстояние Z от горизонтальной плоскости.

$$Z = Z' - \delta Z' = Z'' - (\delta Z'' + \delta Z') = Z'' - \delta Z. \qquad (8.3)$$

Можно на листе горизонталей произвести сложение первой плоскости и ломаной поверхности отстояния, т. е. сложить условные и отраженные горизонтали последней, распространенные на всю площадь листа.

В результате получим отраженные горизонтали всей поверхности отстояний в виде системы параллельных ломаных кривых линий, отдельные стороны которых представляют отраженные горизонтали соответствующих плоскостей отстояния, составляющих ломаную поверхность отстояний.

На рисунке 5 представлены отраженные горизонтали части ломаной поверхности (часть листа горизонталей). 3, 4, 5, 6 — линия базисов B_3, B_4, B_5, . . .

В пределах перекрытия отдельных пар горизонтали продолжены пунктиром, как относящиеся к данному перекрытию.

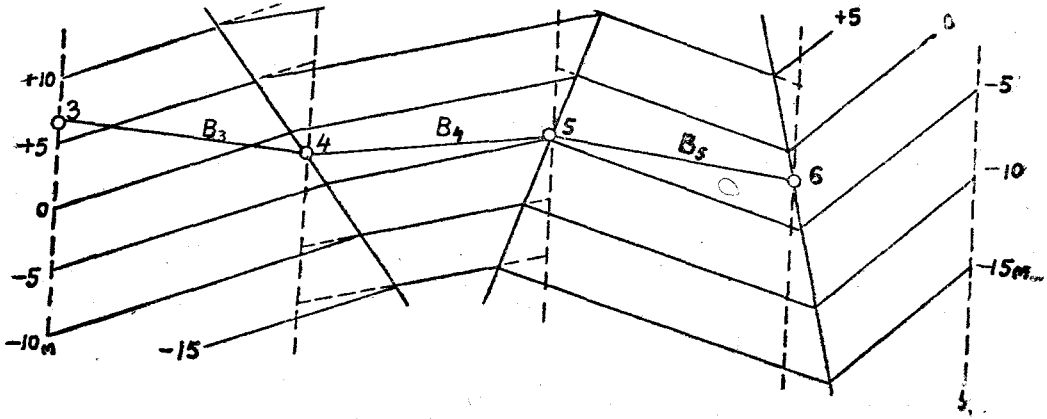
Отраженные горизонтали ломаной поверхности отстояний дают поправки δZ, равные сумме $\delta Z'' + \delta Z'$, с помощью которых мы исправляем Z'', находя Z.

Направление линии падения первой плоскости отстояния и угол падения ее по отношению к горизонтальной плоскости являются элементами ориентирования модели.

Эти элементы определяются направлением отраженных горизонталей первой плоскости и заложением между ними. Направление их и заложе-

ние мы получаем по разностям приращений $\Delta Z'$ и ΔH отстояний Z' и высот H опорных точек по отношению к одной из них.

На рисунке 2 прямая N_1N определяет направление линии падения первой плоскости, а отрезок $\overline{N_1N}$ — величину угла падения ее γ.



Меридиональный профиль горы Золотухи

§ 9. Нивелирование

Найдем вертикальное отстояние Z_0 точек с высоты H_0 для данного маршрута или его части, как единого целого.

Это отстояние, очевидно, получается из равенства:

$$Z_0 = Z_A + (H_A - H_0), \tag{9.1}$$

где Z_A отстояние определенной точки A, имеющей высоту H_A, близкую к круглой высоте H_0, как это отмечено выше в предыдущем параграфе.

Разность между Z_0 и Z дает превышение h точек местности над высотой H_0, над горизонтальной плоскостью, имеющей высоту H_0.

$$h = Z_0 - Z. \tag{9.2}$$

Отсюда высота H точек местности получается как сумма H_0 и h

$$H = H_0 + h. \tag{9.3}$$

Таким образом, измерив на стереокомпараторе или топографическом стереоскопе координаты любых точек любой стереоскопической пары данного маршрута или его части и исправив их за условные углы наклона снимков пары, мы находим по формулам (8.1) отстояния Z'' и координаты X' и Z'. По последним наносим эти точки на лист горизонталей, приняв за ось X' соответствующий базис B на этом листе и за начало координат начальную точку этого базиса. Затем по отраженным горизонталям определяем поправки δZ и по формулам (8.3), (9.2) и (9.3) вычисляем Z, h и H. Можно сразу вычислить и H, применяя формулу

$$H = A_0 + \delta Z - Z'', \tag{9.4}$$

где A_0 — постоянная величина, равная $H_0 + Z_0$,

Z'' — находится на отдельных парах снимков, и

δZ — снимается с листа горизонталей.

При значительной длине маршрута, очевидно, следует внести еш поправки $\delta Z_к$ в отстояния Z' от первой плоскости, зависящие от кривизн уровней поверхности земли. Они могут быть представлены на листе гор зонталей изолиниями одинаковых $\delta Z_к$ в виде дуг круга. Поправки $\delta Z_к$ до жны вычитаться из Z', как и поправки $\delta Z'$.

Поэтому к ломаной поверхности отстояний, выраженной отраже ными горизонталями δZ, нужно прибавить уровненную поверхность земл выраженную горизонталями $\delta Z_к$. Получим общие отраженные н сколько изогнутые горизонтали, отметки которых мы обозначим чере

$$\omega = \delta Z + \delta Z_к. \qquad (9.$$

Вместо формулы (9. 4) будем иметь

$$H = A_0 + \omega - Z'', \qquad (9.$$

где ω также снимается с листа горизонталей, на котором все горизонтал кроме ω, стираются (или ω переносятся на новый лист).

Радиусы r дуг горизонталей $\delta Z_к$ вычисляются по формуле

$$r = \sqrt{2R \cdot \delta Z_к}, \qquad (9.7$$

где $\delta Z_к$ берется равным последовательно 1, 2, 3 и т. д. метров; R — р диус земли.

Центром этих дуг является исходная точка A, отстояние которой Z и высота H_A фигурируют в равенстве (9·1). В точке A поправка δZ_k равн нулю.

§ 10. Получение плановых координат

Координаты X' и Y', получаемые по формулам (8.1), должны рассма риваться как приращения координат в системе данной пары по отноше нию к начальному концу базиса (левой точки стояния) этой пары.

Поэтому, прежде всего должны быть определены плановые координат вершин базисного полигона.

Для этого проведем на листе горизонталей через исходную точку прямую $A'A'$, перпендикулярную к линиям падения или параллельную отр женным горизонталям первой плоскости отстояний. Определим расстояния от вершины базисного полигона до прямой $A'A'$. Тогда исправляюще перемещение данной вершины базисного полигона пойдет по перпендику ляру к прямой $A'A'$ в направлении к $A'A'$.

Величина этого перемещения определится по формуле:

$$\delta p = \frac{1}{2} p\gamma_1^2, \qquad (10.$$

где γ_1 — угол наклона (падения) первой плоскости отстояний, выраженны в аналитической мере и найденный по ее отраженным горизонталя (см. конец § 8).

Величину δp в весьма крупном масштабе можно нанести графическ на лист горизонталей и тут же графически определить поправки δX и δ к координатам X' и Y', полученным из координат x и y базисного поли гона помножением их на $\frac{1}{m}$, согласно § 7. Координаты x и y найдены п формулам (6.1), согласно § 6.

Исправив, таким образом, координаты точек отстояния или вершин базисного полигона, как частных начал отдельных пар, мы переходим к исправлениям приращений координат по отношению к этим началам, представленным частными координатами X' и Y', найденными по формулам (8.1).

Для этого нужно сначала аналитически повернуть координатные оси на дирекционные углы α, фигурирующие в формулах (6.1), т. е. применить обычные формулы поворота осей, взяв в качестве угла поворота дирекционный угол α. Затем нужно определить графически поправки δX и δY за угол наклона γ частных плоскостей отстояния, найденный по отраженным горизонталям δZ в пределах этих плоскостей (см. рис. 5).

Поправки δX и δY строятся, т. е. получаются путем проектирования на соответствующие оси отложенных в направлении перпендикуляров p в весьма крупном масштабе на листе горизонталей отрезков δp, вычисленных по формуле (10.1), где вместо γ_1 берется угол наклона данной плоскости отстояния, найденный по ее отраженным горизонталям, а p представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из данной точки на отраженную горизонталь, проходящую через левую точку стояния этой плоскости.

Таким образом, мы получаем аналитические плановые координаты всех интересующих нас точек местности в некоторой местной системе координат, у которой ось X совпадает с направлением первого базиса, а началом координат является начальная точка этого базиса.

По аналитическим координатам можно более точно в желаемом, достаточно крупном масштабе нанести на план найденные точки и начертить затем на этом плане координатную сетку в общей государственной системе координат, если по крайней мере две из определенных точек имеют координаты в этой системе, как заданные опорные геодезические пункты (опознаки).

Вот в общих чертах новый намечаемый путь получения плановых координат и высот точек местности по плановым аэроснимкам. Как минимум в маршруте должно быть три опорных геодезических пункта.

Остается еще несколько коснуться вопроса, каким образом вносятся поправки координат за наклон плоскости отстояний по отношению к плоскостям снимков стереопары.

§ 11. Поправки координат за наклон снимков

Угол наклона снимка α по отношению к плоскости отстояний, или иначе говоря, наклона последней по отношению к плоскости снимка мы будем принимать положительным, когда часть плоскости отстояний с положительными абсциссами x_c (см. рис. 6) проходит выше плоскости снимка.

На рисунке 6 точка c — точка нулевых искажений; cY_c — линия нулевых искажений; a' — изображение некоторой точки на снимке; a — ее проекция на плоскости отстояний. cX — прямая, параллельная оси X, проходящей через условные точки надира снимков, т. е. через n_1 и $n_{2\cdot 1}$, или через $n_{1\cdot 2}$ и n_2 (см. рис. 1).

Как мы знаем

$$\frac{\overline{ca'}}{ca} = 1 - \omega = 1 - \frac{x_c'}{f}\sin\alpha \qquad (11.1)$$

или

$$\frac{\overline{a'a}}{ca} = \omega = \frac{x_c'}{f}\sin\alpha = \frac{\delta x}{x} = \frac{\delta y}{y} \qquad (11.2)$$

Нам известны x' и y'; находим $x = x' + \delta x$ и $v = y' + \delta y$; $x - \delta x = x'$;

$$\frac{x}{\delta x} = \frac{1}{\omega}; \quad x = \frac{1}{\omega}\delta x; \quad \frac{\delta x}{\omega} - \delta x = x' = \frac{1-\omega}{\omega}\delta x.$$

Значит

$$\delta x = \frac{\omega}{1-\omega} x' = \mu x'. \tag{11.3}$$

Аналогично

$$\delta y = \frac{\omega}{1-\omega} y' = \mu y', \tag{11.4}$$

где

$$\omega = \frac{x_c}{f} \sin\alpha = k x'_c, \tag{11.5}$$

$$k = \frac{\sin\alpha}{f} \tag{11.6}$$

постоянная величина для данной стереопары.

В соответствии с этим вычисляем k_1 и k_2 для левого (первого) и правого (второго) снимка, устанавливая знак для α_1 и α_2 или $\sin\alpha_1$ и $\sin\alpha_2$ согласно указаниям в начале настоящего параграфа.

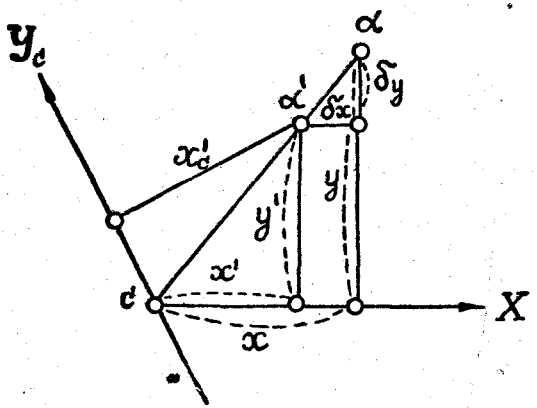


Рис. 6.

Устанавливаем на стереоприборе снимки по осям (керновым лучам) $n_1 n_{2.1}$ и $n_{1.2} n_2$ и передвигаем их поступательно так, чтобы ось X прибора прошла через точки c_1 и c_2 снимков. После этого измеряем координаты x_1', y_1' и x_2' и y_2' согласно рисунку 6 для всех интересующих нас точек и выписываем на особом листе их значения.

Затем поворачиваем снимки вокруг точек c_1 и c_2 так, чтобы линии нулевых искажений cY_c были направлены по осям Y прибора, измеряем и выписываем абсциссы $x'_{c.1}$ и $x'_{c.2}$ тех же точек. Для особых целей (см. ниже) нужно измерить и $y'_{c.1}$ и $y'_{c.2}$. Наконец устанавливаем опять снимки более тщательно по осям $n_i n_{2.1}$ и $n_{1.2} n_2$, возможно точнее измеряем и выписываем координаты x_1'', y'', x_2'' и y_2'' при началах координат в точках условного надира n_1 и n_2. Теперь остается:

1) по формуле (11.5) вычислить ω_1 и ω_2

$$\mu_1 = \frac{\omega_1}{1-\omega_1} \quad \text{и} \quad \mu_2 = \frac{\omega_2}{1-\omega_2},$$

2) по формулам (11.3) и (11.4) вычислить поправки δx_1, δx_2, δv_1 и δy_2;

3) по формулам

$$x = x'' + \delta x, \text{ и } y = y'' + \delta y \tag{11.7}$$

найти исправные координаты x_1, v_1, x_2 и v_2.

При этом y_2 должно равняться y_1, что должно служить контролем вычислений и свидетельствовать о том, насколько точно определены углы α_1 и α_2 и направление линии нулевых искажений.

Величины μ_1 и μ_2, пожалуй, проще вычислять по таким формулам

$$\mu_1 = \frac{x'_{c.1}}{k_1 - x'_{c.1}}; \qquad \mu_2 = \frac{x'_{c.2}}{k_2 - x'_{c.2}}, \tag{11.8}$$

где постоянные для данной стереопары величины k_1 и k_2 находятся заранее по формулам

$$k_1 = f \operatorname{cosec} \alpha_1; \quad k_2 = f \operatorname{cosec} \alpha_2. \tag{11.9}$$

Заметим, что по абсолютному значению величины k_1 и k_2 значительно больше $x'_{c.1}$ и $x'_{c.2}$, и их можно выражать в метрах; тогда и x_c' следует выражать в метрах. Например, пусть $f = 100$ мм; $\alpha = 2°30'$; $x_c' = 60$ мм, тогда

$$k = f \operatorname{cosec} \alpha = 0{,}1 \cdot 22{,}9 = 2{,}29 \text{ м},$$

$$k - x_c' = 2{,}29 - 0{,}06 = 2{,}23 \text{ м},$$

$$\mu = \frac{0{,}0600}{2{,}23} = 0{,}0269.$$

Итак, на особом листе вычислений исправленных координат мы имеем столбцы для первого и второго снимка отдельно в виде таблиц.

№ пары . . . . . ; $k_1 = 2{,}29$ Левый снимок

№№ точ.	x_1'	y_1'	$x'_{c.1}$	x_1''	y_1''	$k_1 - x'_{c.1}$	μ_1	δx_1	δy_1	x_1	y_1	Примечание
1												
2												
3												
.												
.												
.												

№ пары . . . . . ; k_2 . . . . . Правый снимок

№ точ.	x_2'	y_2'	$x'_{c.2}$	x_2''	y_2''	$k_2 - x'_{c.2}$	μ_2	δx_2	δy_2	x_2	y_2	Примечание
1												
2												
.												
.												
.												

При заметных разностях между y_1 и y_2, что следует ожидать в гористой местности, нужно уточнить углы α_1 и α_2 и направление линии нулевых искажений, т. е. угол $\varphi' = \varphi + \varkappa$ (см. рис. 1). Это можно сделать, исходя из этих остаточных разностей $q = y_1 - y_2$ для различных точек, где они оказались значительными.

Как показывает статья Щеглова И. В. (Инф. тех. сб. ВТУ 1940,1), реальная точность углов α, отвечающая разрешающей способности, должна быть для широкоугольного объектива при $f = 100$ мм около 4′.

§ 12. Исправление ориентировки снимков

Изменение углов α_1 и α_2 на величины $\delta\alpha_1$ и $\delta\alpha_2$ и угла φ' на величину $\delta\varphi$, если учитывать только члены первого порядка малости, влечет за собой соответствующее изменение множителей μ, а именно: множители μ заменяются произведениями

$$\mu\left(1+\frac{\delta\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{x_c'+\delta x_c'}{x_c}\right)=\mu\left(1+\frac{\delta\alpha}{\alpha}\right)\left(1+\frac{y_c'\sin\delta\varphi}{x_c'}\right)=$$

$$=\mu\left(1+\frac{\delta\alpha}{\alpha}\right)\left(1+\operatorname{tg}\Theta\sin\delta\varphi\right)=\mu\left(1+\frac{\delta\alpha}{\alpha}+\operatorname{tg}\Theta\sin\delta\varphi\right).$$

Отсюда имеем, что

$$\frac{y_1-y_2}{y}=\frac{q}{y}=\mu_1\frac{\delta\alpha}{\alpha_1}+\mu_1\operatorname{tg}\Theta\sin\delta\varphi-\mu_2\frac{\delta\alpha_2}{\alpha_2}-\mu_2\operatorname{tg}\Theta_2\sin\delta\varphi$$

или, введя обозначения

$$\left.\begin{gathered}\mu_1=m;\quad \mu_2=n;\quad \frac{\delta\alpha_1}{\alpha_1}=u;\quad \frac{\delta\alpha_2}{\alpha_2}=v,\\ \mu_1\operatorname{tg}\Theta_1-\mu_2\operatorname{tg}\Theta_2=\mu_1\frac{y_{c\cdot 1}'}{x_{c\cdot 1}'}-\mu_2\frac{y_{c\cdot 2}'}{x_{c\cdot 2}'}=a,\\ \frac{q}{y}=l,\end{gathered}\right\}\qquad(12.1)$$

получаем следующие уравнения для различных точек с заметным q:

$$m_i u-n_i v+a_i\sin\delta\varphi-l_i=0.\qquad(12.2)$$

Взяв три точки с наибольшими q, мы получим три уравнения (12.2), решив которые относительно u, v и $\sin\delta\varphi$, мы согласно обозначениям (12.1) найдем затем поправки $\delta\alpha_1$, $\delta\alpha_2$ и по $\sin\delta\varphi$ поправку $\delta\varphi$ к углам α_1, α_2 и φ'.

Если число заметных q больше трех, то уравнения (12.2) могут быть решены по способу наименьших квадратов.

Для составления уравнений (12.2), очевидно, следует для точек с заметными $q=y_1-y_2$ замерить еще $y_{c\cdot 1}'$ и $y_{c\cdot 2}'$ или просто транспортиром замерить на снимках углы Θ_1 и Θ_2, составляемые радиусами-векторами, проведенными из c_1 и c_2 к данным точкам, с осью X_c, перпендикулярной $\overline{c\Theta_c}$ на рисунке 6.

С помощью тангенсов этих углов и расхождений между y_1 и y_2 мы исправляем ориентировку снимков по отношению к плоскости отстояния и к направлению базиса в ней. При широкоугольных и короткофокусных снимках углы α должны определяться точнее.