Записки Ленинградского ордена Ленина Горного института.
Том XX, 1948 г.

Логарифмически-нормальный закон распределения вещества и его свойства

Н. К. Разумовский

§ 1. Виды случайностей

Примером случайного, и притом равномерно случайного, распределения может служить распределение влаги дождя на небольшой площади. В начале падения дождя, когда еще площадь не сплошь влажная, пятнистость влажной земли равномерна. Постепенно и всюду одновременно количество сухой площади убывает, пока не исчезнет вовсе. Вот почему для измерения осадков можно применять небольшие ведра и ставить их где угодно: в силу равномерности, выборка все равно будет репрезентативна.

Приведем другой пример. Имеется 100 тысяч дробинок в ящике и мы хотим вынуть одну из них — подсчитать вероятность появления определенной дробинки сложнее. Естественно предположить, что искомая вероятность одинакова для всех дробинок и равна одной стотысячной. Но при внимательном рассмотрении вопроса мы замечаем, что вероятность появления для дробинок не одинакова. Впрочем, мы можем сделать ее одинаковой для всех дробинок, если пожелаем: например, можно перед каждым извлечением тщательно перемешивать все дробинки так, чтобы и нижние и верхние по много раз переменились местами и только после этого взять наудачу одну из них. В этом случае, очевидно, нет оснований приписывать какому-либо слою или участку ящика бо́льшие шансы быть извлеченными по сравнению с остальными. Но если таких специальных мер не принято, то, естественно, дробинку легче всего взять из середины ящика и близ верхнего слоя; следовательно, вероятность быть вынутой для этих дробин выше.

В некоторых процессах неодинаковая вероятность получит тот или иной результат еще очевиднее. Так, при многократном измерении какой-либо величины (например, расстояния между двумя реперами) мы стремимся найти точный результат, но совершаем ошибку, которая не может быть значительной; вообще говоря, грубые откло-

жения мало вероятны. Сделав допущения, что отклонения от истинного значения равновероятны как в сторону больших, так и меньших величин и что, кроме того, вероятность ошибки тем меньше, чем ошибка больше, Гаусс и пришел к своему знаменитому закону ошибок, выражаемому уравнением

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \qquad (1)$$

где: x — величина отклонения наблюдения от среднего арифметического M; σ — другая константа, находимая как средняя квадратическая всех отклонений, а y — плотность вероятностей появления тех или иных отклонений. При этих условиях наиболее вероятной величиной оказывается средняя арифметическая (σ при этом имеет минимум), и поэтому ее следует признать за наилучшее приближение к истинному значению измеряемой величины.

На практике плотность вероятностей обнаруживают посредством частоты появления изучаемой величины x в равных друг другу интервалах значений. Пусть у нас минимальное встреченное значение x_1, а максимальное — $x_п$. Тогда область существования величины x, равную $x_п - x_1$, делим на 10—20 равных интервалов $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_к - x_{к-1}$ и подсчитываем частоту появления x во всех интервалах. Числа n_1, $n_2 \ldots n_к$ будут в первом приближении пропорциональны плотностям вероятностей y.

§ 2

Долгое время господствовало убеждение, что вполне случайное распределение должно быть строго симметричным, и всякую асимметрию считали признаком тенденции к преимущественному появлению односторонних значений и, следовательно, признаком наличия каких-то связей, исключающих случайность. Что это не так, легко можно показать хотя бы на таком примере. Допустим, что имеем строго симметричное распределение, скажем, роста шотландских стрелков, весьма точно подчиняющееся закону Гаусса. Если определить веса этих же людей, то эти веса будут меняться, как кубы сходственных размеров, то есть того же роста. Следовательно, они дадут асимметричное распределение не гауссовой формы. Между тем, люди те же, и случайность распределения в обоих случаях, очевидно, осталась одна и та же.

Изучая распределение величины и частоту ее появления в каких-либо интервалах, мы, очевидно, должны признать вполне законным замену этой величины любой другой, функционально с ней связанной. В самом деле, обычно у нас нет никаких специальных оснований полагать, что именно тот, а не другой аргумент целиком управляет явлением. Поэтому замена аргумента функцией его вполне допустима. Следовательно, изучение частот появления аргумента x может быть заменено равносильной задачей — изучением частот величины $z = f(x)$, причем характер распределения, вообще говоря, изме-

нится. Таким образом, мы приходим к чрезвычайно полезной идее о семействе функций распределения разной формы, но связанных между собою через связи между аргументами. Среди этих форм может существовать и гауссова, и можно поставить задачу о нахождении такой связи между данным и искомым распределением, чтобы форма распределения стала гауссовой. Такого рода задача, как увидим дальше, может принести пользу.

§ 3

Ж. Бертран (4) привел хороший пример, изменяющий представление о том, что всякое среднее арифметическое всегда имеет физический смысл. Допустим, что мы имеем два шара диаметрами 1 и 3 *см*. Средний диаметр, очевидно, равен $(1+3):2=2$ *см*. Объемы этих шаров равны $0.\ 52.\ 1^3$ и $0.\ 52.\ 3^3$, и средний объем равен $0{,}52\left(\frac{1+27}{2}\right)=7.\ 28$ *см*^{3}, тогда как объем шара среднего диаметра всего лишь $0.52.2^3=4{,}16$ *см*^{3}. Значит, шар среднего диаметра не обладает средним объемом и обратно.

В теории вероятностей известно условие, соблюдение которого приводит к согласованию средних от разных аргументов. В случае если между аргументами есть линейная зависимость, то средние по этим аргументам совмещаются в одном и том же реально осуществимом индивидуме. Возникает вопрос: нельзя ли связь не линейную внести к линейной? Это можно сделать посредством функционального преобразования. Например, в разобранном примере Бертрана надо найти среднюю не из d и v, а из их логарифмов. Тогда $\lg d$ и $\lg v$ будут связаны линейно, и средние, найденные таким образом, совпадут в одном реально существующем объекте. И не только эти свойства, но средние поверхности, моменты и ряд других качеств окажутся линейно скоррелированы этим приемом, и средние из логарифмов этих величин окажутся совмещенными в одном физически осуществимом образце. Таким образом, прием функциональной замены одного аргумента другим, жестко с ним связанный посредством известной нам функции, может оказать существенную помощь при нахождении форм распределения изучаемой величины.

§ 4

В природе весьма обычны асимметричные распределения. В некоторых случаях имеются веские основания допускать особого рода асимметрию, математическим выражением которой является логарифмически нормальный закон.

Например, отношения яркостей двух звезд, сравниваемых визуально, должны подчиняться этому закону. Действительно, по закону Вебера-Фехнера чувствительность ретины глаза пропорциональна относительному приращению возбуждения $dE=A\frac{dl}{l}$, где E — мера ощущения, а l — интенсивность света, выраженная в каких-либо единицах, A — переводной множитель. Интегрируя, найдем меру ощущения:

$$E=A\ln l+c\,.$$

Пусть мы измеряем какую-то яркость L и получаем значения $l_1, l_2 \ldots l_n$, тогда ошибки в ощущениях равны

$$\Delta_1 = A(lnl_1 - lnL) = Aln\frac{l_1}{L}; \qquad \Delta_2 = Aln\frac{l_2}{L}, \qquad \text{и т. д.}$$

Так как величины Δ_i вполне случайны, то они должны подчиняться нормальному закону случайностей. Поэтому наиболее вероятным значением искомой величины L будет то, при котором величина $e^{-h^2(\Delta_1^2+\Delta_2^2+\ldots+\Delta_n^2)}$ достигает максимума, т. е. когда $ln\frac{l_1}{L}+ln\frac{l_2}{L}+$ $+ln\frac{ln}{L}=0\ldots(1)$ или когда

$$\frac{l_1 l_2 \ldots l_n}{L^n}=1 \quad \text{или} \quad L=\sqrt[n]{l_1 l_2 \ldots l_i \ldots l_n}, \qquad (2)$$

т. е. при значении L, равном среднему геометрическому из наблюдений. Эту формулу вывел в 1863 г. Зайдель (1), и это, повидимому, первое открытие логарифмически нормального закона (6).

Если логарифмы наблюдаемой величины подчинены нормальному закону, то это значит, что сама величина имеет наиболее вероятное значение, которое можно найти, как среднее геометрическое (это следует из равносильности формул (1) и (2). Если логарифмы разобьем на равные интервалы, то распределение частот будет симметричным. Но сам аргумент при этом будет возрастать в геометрической прогрессии (так как прибавлению логарифма соответствует умножение величины интервала на постоянное число q). Поэтому у логарифмически-нормального закона есть замечательное свойство: если интервалы возрастают в геометрической прогрессии, то распределение частот делается симметричным. В этом последнем случае распределены симметрично не только частоты, но и накопления масс по классам (см. ниже, стр. 113). Это последнее свойство и было замечено практиками. Например, набор диаметров сит составляет геометрическую прогрессию: это удобно, так как веса фракций получаются примерно одинаковыми и с одним максимумом, грубо говоря, посредине.

В частности, в ситах Тайлера знаменатель $-\sqrt{2}$, в ситах Гувера $-\sqrt[3]{2}$, в ситах Риттингера $-\sqrt[4]{2}$. Наиболее ясно наличие логарифмически-нормального закона при распределении частиц, получаемых при дроблении, повидимому, констатировано Лавеландом и Травелли (2). Они указывают, что распределение частиц, получаемых при дроблении, химическом осаждении или другим путем, подчиняется логарифмически-нормальному закону. Необходимые уравнения были выведены Хэчем и Шетом (3). Исследования о трансформации ассиметричных распределений провел Гюмбель (5). Он дал уравнение обобщенного логарифмического закона и вывел формулы, позволяющие определять константы распределения по первым трем моментам.

Гумбель упоминает, что логарифмически-нормальному распределению подчиняются: а) частоты разводов в зависимости от длительности брака, б) наступление некоторых заболеваний и смертность от

них в зависимости от возраста, в) повозрастное распределение определенных групп живых людей.

При изучении россыпных месторождений золота автором обнаружено, что логарифмически-нормальному закону подчиняются: а) частоты или числа золотин, взятых с одного ключа и разбитых по размеру на фракции, б) веса фракций, в) значения проб, взятых с золотоносной площади каким-либо единообразным способом (например, закопушками по 5-метровой сетке), г) вертикальные запасы золотоносного пласта, полученные при разведке шурфами (9).

Кроме того, при изучении распределения содержания металлов в коренных месторождениях меди, свинца, цинка, никеля обнаружено, что и содержания распределены в первом приближении по логарифмически-нормальному закону (10).

Повидимому, при всяком появлении неоднородности, например, разделении расплавленной магмы на составные компоненты при кристаллизации, при ликвации двух жидкостей, при диспергировании одного вещества в другом, как среде, — массы и размеры распределяются по логарифмически-нормальному закону. Конкретная проверка содержаний щелочей в эффузивах дала, например, распределение по показательному закону, точно также измерение диаметров сферолитов шлака в сталях дало распределение, близкое к логарифмически-нормальному. Как далеко идет влияние этого закона, видно из таблицы 1. В ней дано распределение мировых запасов угля (7). Если размеры запасов распределены в геометрической прогрессии, как это сделано в таблице, то частоты, как видно, располагаются симметрично. Наиболее частым типом является тип с запасом от 1 до 10 млрд. *m* угля.

Таблица 1

Распределение запасов угля по бассейнам и государствам

Классы	Запасы	Частоты
I	10^6 *m*	1
II	$10^6 - 10^7$ „	2
III	$10^7 - 10^8$ „	6
IV	$10^8 - 10^9$ „	7
V	$10^9 - 10^{10}$ „	13
VI	$10^{10} - 10^{11}$ „	8
VII	$10^{11} - 10^{12}$ „	5
VIII	$10^{12} - 10^{13}$ „	3
IX	более 10^{13}	0

Наконец, распределение элементов в земной коре также, повидимому, логарифмического стиля.

В. В. Билибин при подсчете запасов нефти нашел, что добыча нефти за год, рассматриваемая как функция времени (с начала эксплоатации скважины), также подчинена логарифмически-нормальному закону. Если взять за аргумент $\lg x$ (где x — время с начала эксплоатации), то корреляция между временем и запасами оказывается линейной (8).

Из всех этих работ вырисовывается весьма важный факт — участие логарифмически-нормального закона во всех тех случаях, где мы имеем дело с частицами вещества, индивидуализующимися в пространстве тем или иным способом, будь то механическое дробление или химическое выпадение или сегрегация одного соединения среди других, ему подобных (как, например, в горных породах).

Так как свойства этого своеобразного закона мало знакомы широкому кругу геологов и горных инженеров, то приведу их изложение в систематическом виде.

Обобщение функции нормального распределения Лапласа — Гаусса

Если распределение величины x ненормально, но существует такая монотонная функция от x $z=f(x)$, что распределение по аргументу z становится нормальным, то значит

$$P_z = y = \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(z-m)^2}{2\gamma^2}}, \tag{3}$$

где величины m и γ суть константы, не зависящие от z, а следовательно, и от x, и выраженные в размерности величины z.

Но если мы знаем распределение величины z_i, определяемой формулой (3), то на основании известной леммы (см. напр. Бернштейн, Теория вероятностей, изд. 4-е, стр. 267) можем найти и распределение в аргументах x_i, если связь величин z и x нам известна. А именно, лемма утверждает, что если мы знаем закон распределения величины z в виде какой-то вероятностной функции P_z и если $z=f(x)$, то законом распределения величины x будет иная функция P_x, которая равна:

$$P_x = P_{(z)} \cdot f'(x) = P_{[f(x)]} \cdot f'(x). \tag{4}$$

Отсюда распределение по аргументу x равно:

$$P_x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(f(x)-m)^2}{2\sigma^2}} \cdot f'(x). \tag{5}$$

Сравнивая формулы (3) и (5), видим, что вероятность $P(x<X<x+dx)$ величине X заключаться в пределах x и $x+dx$ равна $\frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{fa(-m)^2}{2\gamma^2}} f'(x)\,dx$, в то время как величина $Z=f(X)$ заключается в соответственных пределах $z<Z<z+dz$, с вероятностью

$$P(z<Z<z+dz) = \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-m)^2}{2\gamma^2}} \cdot dz.$$

Мы хотим найти такой вид функции $f(x)$, чтобы выражение

$$e^{-\frac{(f(x)-m)^2}{2\gamma^2}} - f'(x)$$

равное

$$e^{-\frac{(f(x)-m)^2+\ln f'(x)}{2\gamma^2}}$$

можно было привести к виду $e^{-\frac{(f(x)-k)^2}{2\sigma^2}}$, хотя и с другими пара-

метрами, но содержащее лишь квадрат линейной функции от $f(x)$. Значит, должно существовать уравнение:

$$-\frac{1}{2\gamma^2}(f(x)-m)^2+\ln f'(x)=-\frac{1}{2\sigma^2}(f(x)-k)^2. \qquad (6)$$

Это дифференциальное уравнение относительно $y=f(x)$ и $y'=f'(x)$, не содержащее x. Оно легко решается. Обозначим $\frac{1}{2\gamma^2}=A>0$ и $\frac{1}{2\sigma^2}=B>0$, $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$. Следовательно $\ln y'=-\ln x'$. После простых преобразований формулы (6) имеем:

$$\ln[x']=B(y-k)^2-A(y-m)^2,$$

откуда

$$\frac{dx}{dy}=e^{B(y-k)^2-A(y-m)^2},$$

интегрируя

$$x=N\int_0^y e^{-\frac{(y-e)^2}{2\alpha^2}}\cdot dy+c,$$

Еще раз проведя числовые преобразования с коэффицентами, окончательно получим:[1]:

$$ax+c=\frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}\int_0^y e^{-\frac{(y-e)^2}{2\alpha^2}}\cdot dy \qquad (8)$$

и

$$ax+c=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot dt. \qquad (8')$$

Постоянные a и c находятся из условий: при $t=0$, $ax+c=0{,}5$ и при $t=3$, $ax+c=99{,}73$. Если допустим, что один из параметров, именно γ, останется без изменений, т. е. что $\gamma=\sigma$, то решение упростится. Если $A=B$, то

$$\ln(x')=\alpha y+\beta\ \frac{dx}{dy}=De^{\alpha y+\beta}, ax=A\int_0^y e^{\alpha y+\beta}dy+c.$$

откуда имеем:

$$z=f(x)=\ln(x-a). \qquad (9)$$

Значит в этом случае z можно принять за логарифм линейной функции от $f(x)$.

Итак, функцию z можно во многих случаях представить как логарифм разности:

$$z=\lg(x-a). \qquad (9')$$

Эту замену можно сформулировать следующим образом: если аргумент x уменьшим на величину a и разность прологарифмируем, то

[1] За просмотр рукописи и помощь в доказательстве этой теоремы приношу благодарность профессору математики ЛГУ Ю. В. Линник.

распределение аргумента z станет нормальным во всех тех случаях, где такая замена возможна. Величина a — это то значение аргумента x, меньше которого x быть не может; это вытекает из того, что логарифмы отрицательных чисел невозможны и, следовательно,

$$x - a \geqslant 0.$$

В некоторых случаях a известно из условий задачи; например, содержание металла в руде не может быть отрицательным, и потому предельное $a=0$, или при просеивании фракции через сито $d=3$ *мм* вся франция имеет диаметр $d \geqslant 3$ *мм* и, очевидно, $a=3$. Если мы сумели найти a, то перенесем начало координат в a, то есть положим $y_i = x_i - a$, тогда вид функции еще упростится:

$$z_i = \lg y_i . \qquad (9')$$

В общем случае величину a приходится находить из анализа распределения величин x_i.

§ 5. Свойства логарифмически-нормального распределения

Допустим, что в качестве аргумента принята шкала весов зерен породы или минерала (например веса золотинок, при ситовом анализе россыпного золота, или шкала содержаний меди в месторождениях и т. п.). Обозначим ее шкалой x. Значения $x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n$ будут обозначать, что встретилось зерно (или содержание) веса $x_1 \ldots x_i$. Логарифмы при основании 10 чисел x_i обозначим — z_i, т. е. $z_i = \lg x_i \ldots (10)$.

По условию распределение z_i нормально. Это значит, что относительные частоты (или, как их принято называть, „частости") подчиняются функции Лапласа—Гаусса. Если мы обозначим через $\Delta z P_z$ эти частости в равноинтервальных и достаточно мелких классах, то

$$\Delta z P_z = \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(z-m)^2}{2\gamma^2}} \Delta z, \qquad (11)$$

где m и γ — постоянные числа, выраженные в тех же наименованиях, что и z. Если m найдем, как среднюю арифметическую из логарифмов

$$m = \frac{\Sigma z_i}{N} = \frac{\Sigma_1 z_i n_i}{\Sigma n_i}, \qquad (12)$$

то, как можно доказать, величина γ, вычисленная по формуле

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Sigma (z_i - m)^2}{\Sigma n_i}}, \qquad (13)$$

достигает своего минимума. Поэтому обычно так их и определяют.

В нашем случае $z = \lg x$

и

$$P_{(z)} = \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(z-m)^2}{2\gamma^2}}, \qquad (13')$$

отсюда по формуле (4)

$$y = P_{(x)} = \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\lg x - m_m)^2}{2\gamma^2}} \cdot \frac{0 \cdot 4343}{x}, \qquad (14)$$

так как

$$z' = [\lg x]' = \frac{0 \cdot 4343}{x}.$$

Кроме того, средняя теперь будет уже не m, а какая-то другая. Обозначим ее m_m.

Из формулы (14) можно вывести ряд следствий:

Первое преобразование. Умножим обе части равенства на x:

$$x P_{(x)} = y \cdot x = \frac{0 \cdot 43\,43}{\gamma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\lg x - m_m)^2}{2\gamma^2}}. \qquad (15)$$

$P_{(x)}$ или y — это средняя плотность в очень малом классе, а x — значение класса. Если интервал имеет конечные размеры $x_i - x_{i+1}$, а плотность вероятности класса — y_i, то x надо взять где-то в середине класса, чаще берут $\bar{x}_i = 0{,}5(x_i + x_{i+1})$. При этом произведение $y_i \bar{x}_i$ превращается в сумму $\Sigma\,[x_i' + x_i'' + \ldots + x_i^k] = w_i$, то есть в накопление класса. Таким образом, здесь мы приходим к идее о том, что вместо частоты целесообразно брать накопления весов или вообще того аргумента, который мы изучаем. Как оказывается, в случае логарифмически-нормального закона, такая искусственная „частота" также распределена по уравнению Гаусса.

При функциональном преобразовании (когда мы вместо x берем $\lg x$) медиана сохраняет свое место на шкале (так как частости не меняются, а медиана — это та точка на шкале аргументов, до которой накоплена ровно половина „частот"). Поэтому m_m — это логарифм того значения веса, до которого накопилось веса $0{,}5\,W$ и после которого накопилось $0{,}5\,W$, если W — общий вес изучаемого коллектива. Эта средняя обычно не имеет названия, хотя ею нередко пользуются в практике. Я предлагаю ее назвать биссектрисой.

Обратимся к формуле (15). Роль частоты для нас играет произведение $y \cdot x$, следовательно, частота каждого единичного значения, например $\lg x_i$ будет не единица, а $1 \cdot x_i = x_i$. Поэтому при вычислении среднего мы должны каждый логарифм взвешивать на величину x_i и вычислять по формуле

$$m_m = \frac{x_1 \lg x_1 + x_2 \lg x_2 + \ldots + x_n \lg x_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} = \frac{\Sigma\, x_i \lg x_1}{\Sigma\, x_i}, \qquad (16)$$

где $\sum_{i}^{n} x_i = W$ — вес всего накопления или сумма всех значений x. Но формула (16) равносильна следующей:

$$M_m = \sqrt[W]{x_1^{x_1} \ldots x_2^{x_2} \ldots x_n^{x_n}}. \qquad (17)$$

Если частости $\frac{xi}{\Sigma xi}$ обозначим P_i (так что $\Sigma P_i = 1$), то формулы (16) и (17) можем представить в ином виде:

$$m_m = P_1 z_1 + P_2 z_2 + \ldots + P_n z_n = \Sigma P_i z_i = \Sigma P_i \lg x_i, \tag{18}$$

$$M_m = x_1^{P_1} \cdot x_2^{P_2} \ldots x_n^{P_n}. \tag{19}$$

Когда наблюдений много, их, как обычно, объединяем в классы. Пусть в классе k_i имеем k значений от z_{i+1} до z_{i+k}, тогда взвешенная сумма класса равна

$$\sum_{i+1}^{i+k} x_{i+k} \cdot z_{i+k} = x_{i+1} \cdot z_{i+1} + x_{i+2} \cdot z_{i+2} + \ldots + x_{i+k} z_{i+k},$$

а среднее значение класса с частотой k равно

$$z_{ik} = \frac{x_{i+1} \cdot z_{i+1} + x_{i+2} \cdot z_{i+2} + \ldots + x_{i+k} \cdot z_{i+k}}{x_{i+1} + x_{i+2} + \ldots + x_{i+k}} = \frac{\sum_{i+1}^{i+k} x \cdot z}{W_k}. \tag{20}$$

Если границы класса не широки, то величину z_{ik} находят как $\left(\sum_{i+1}^{i+k}\right) : k$ или просто как середину из границ класса $z_{ik} = \frac{z_{i+k} + z_{i+1}}{2}$ и сумму $\sum_{i+1}^{i+k} x \cdot z$ считают равной $W_k \cdot z_{ik}$. Тогда формулы (16) и (17) перепишутся:

$$m_m = \frac{\Sigma W_i z_{ik}}{\Sigma W_i}, \tag{21}$$

$$M_m = \sqrt[W]{x_{1,2}^{W_1} x_{2,3}^{W_2} \ldots x_{e-1,e}^{W_e}}. \tag{22}$$

Следует все же помнить, что величины z_{ik}, а следовательно, и отвечающим им x_{ik} не совсем точные, и тем более они неточны, чем шире интервалы класса.

Второе преобразование. Заметив, что $\frac{1}{x} = x^{-1} = e^{-\ln x} = e^{-2{,}3026 \lg x}$, перепишем выражение (14) следующим образом:

$$y = \frac{0.4343}{\gamma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\lg x - m_m)^2}{2\gamma^2}} \cdot e^{-2.30 \lg x} = \frac{0\,43}{\gamma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\lg x - m_m)^2}{2\gamma^2} - 2{,}30 \lg x}.$$

Преобразуем показатель при e:

$$-\frac{(\lg x - m_m)^2 + 2.30\ \lg x \cdot 2\gamma^2}{2\gamma^2} = -\frac{\lg^2 x - 2\lg x m_m + 2\lg x \cdot 2{,}30 \cdot \gamma^2 + m_m^2}{2\gamma^2} =$$

$$= -\frac{\lg^2 x - 2\lg x(m_m - 2{,}3026\,\gamma^2) + m_m^2}{2\gamma^2}. \qquad (23)$$

Обозначим величину $m_m - 2{,}3026\,\gamma^2 = m_e$, то есть положим $m_e = m_m - 2{,}3026\,\gamma^2$, откуда $m_m - m_e = 2{,}3026\,\gamma^2 \ldots$ (24) и в выражении (23) будем $\lg^2 x$ рассматривать как квадрат первого количества, а $2\lg x \cdot m_m$ — как удвоенное произведение первого на второе. Очевидно, если мы прибавим $m_e^2 - m_e^2$ (то есть нуль), то можем выделить полный квадрат разности. Выражение преобразуется:

$$-\frac{(\lg x - m_e)^2 + m_m^2 - m_e^2}{2\gamma^2} = -\frac{(\lg x - m_e^2)}{2\gamma^2} - \frac{m_m^2 - m_e^2}{2\gamma^2},$$

но

$$-\frac{m_m^2 - m_e^2}{2\gamma^2} = -\frac{m_m + m_e}{2} \cdot \frac{m_m - m_e}{\gamma^2} = -2.3026\,\gamma^2 \cdot m_c,$$

где величиной m_c обозначено среднее арифметическое из m_m и m_e, то есть

$$m_c = \frac{m_m + m_e}{2}. \qquad (25)$$

Таким образом, выражение (23) примет такой вид:

$$y = \frac{0.4343}{\gamma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-2.30 m_c} \cdot e^{-\frac{(\lg x - m_e)^2}{2\gamma^2}},$$

но так как

$$e^{-2{,}30 m_c} = e^{-\ln M_c} = \frac{1}{M_c},$$

то

$$y = \frac{0.4343}{M_c \cdot \gamma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\lg x - m_e)^2}{2\gamma^2}}, \qquad (26)$$

где M_c — некоторая постоянная величина на шкале иксов, находимая как средняя геометрическая из медианы M_c и биссектрисы M_m:

$$M_c = \sqrt{M_e M_m}. \qquad (27)$$

Это следует из определения $m_c = \frac{m_e + m_m}{2}$ (m_c, m_e, m_m — величины обыкновенных логарифмов или числа шкалы зетов), а также из сравнения формул (13′) и (26), откуда видно, что $m = m_e$ и что $P_z = \frac{y \cdot M_e}{0{,}4343}$.

Из формулы (26) можно сделать такие выводы:

1. Распределение частот логарифмов нормально и подчиняется закону Гаусса—Лапласа с той же дисперсией γ^2, но другим средним логариф-

мом m_e, меньшим, чем m_m (так как разность $m_m - m_e = 2{,}3026\,\gamma^2$ всегда равна положительному числу). Величина $m_e = m$ и есть среднее арифметическое из логарифмов $m_e = \frac{\Sigma \lg x}{\Sigma n_i}$, а отвечающая ей по шкале иксов величина M_e есть среднее геометрическое из всех иксов

$$M_e = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}, \tag{28}$$

где M_e — есть медиана по частоте, то есть до M_e имеется ровно $\frac{N}{2}$ значений, так же как и после M_e их $\frac{N}{2}$. Это следует из того, что m_e есть медиана логарифмической шкалы, а свойство медианы сохраняется при функциональном преобразовании шкалы.

2. Так как по свойству функции Гаусса, вся площадь

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(z-m_m)^2}{2\gamma^2}} \cdot dz = 1,$$

то из формулы (15) найдем весь вес накопления W. Он равен:

$$W = \sum_1^n y_i x_i = 0.4343 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\lg x - m_m)^2}{2\gamma^2}} dz = 0.4343. \tag{29}$$

Точно также из формулы (14) найдем полное число значений N. Оно равно:

$$N = \sum_1^n y_i = \frac{0.4343}{M_c} \int_{-\sim}^{+\sim} e^{-\frac{(\lg x - m_e^2)}{2\gamma^2}} dz = \frac{0.4343}{M_c}, \tag{30}$$

откуда средний вес одного индивида (зерна, золотины, анализа и т. п.) равен

$$\frac{W}{N} = \frac{0.4343 \cdot M_c}{0.4343} = M_c. \tag{31}$$

Таким образом, мы вывели, что M_c — это среднее арифметическое из всех иксов или так называемый первый начальный момент ν_1. Это очень важное свойство логарифмически-нормального закона.

Третье преобразование. Перемножим равенства (15) и (26) и извлечем из произведения квадратный корень:

$$y\sqrt{x} = \frac{0.4343}{\sqrt{Mc}\,\gamma\,\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\lg x - m_m)^2}{4\gamma^2} - \frac{(\lg x - m_e)^2}{4\gamma^2}}; \tag{32}$$

преобразуем показатель при e:

$$-\frac{2\lg^2 x - 2\lg x\cdot m_m + m_m^2 - 2\lg x\cdot m_e + m_m^2}{4\gamma^2} = -\frac{\lg^2 x - 2\lg x\,\frac{m_m+m_e}{2} + \frac{m_m^2+m_e^2}{2}}{2\gamma^2} =$$

$$= -\frac{(\lg x - m_c)^2 + \frac{m_m^2+m_e^2}{2} - m_c^2}{2\gamma^2} = -\frac{(\lg x - m_c)^2}{2\gamma^2} - 0{\cdot}6727\,\gamma^2.$$

Последний член получается, если подставим:

$$m_m = m_c + 1{,}1513\,\gamma^2 \text{ и } m_e = m_c - 1{,}1513\,\gamma^2$$

и преобразуем:

$$\frac{(m_c + 1{,}15\gamma^2)^2 + (m_c - 1{,}15\gamma^2)^2 - 2m_c^2}{4\gamma^2} = \frac{2\cdot(1{,}1513\,\gamma^2)^2}{4\gamma^2} = 0.5.1{,}1513^2\cdot\gamma^2 = 0.6627\gamma^2.$$

Отсюда выражение (32) получит окончательный вид:

$$y\sqrt{x} = \frac{0{\cdot}4343}{\gamma\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-0.6627\gamma^2}}{\sqrt{M_e}}\cdot e^{-\frac{(\lg x - m_c)^2}{2\gamma^2}}. \qquad (33)$$

Иначе говоря, если за частоту мы примем среднее геометрическое из частоты y_i и накопления $= \sqrt{y_i\cdot x_i}$, то получим нормальное распределение с центром в m_c и той же дисперсией γ^2.

Среднее m_c вычисляется по формуле

$$m_c = \frac{\sqrt{x_1}\cdot\lg x_1 + \sqrt{x_2}\cdot\lg x_2 + \ldots + \sqrt{x_n}\lg n}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \quad + \sqrt{x_n}} = \frac{\Sigma_1\sqrt{x_i}\cdot\lg x_i}{\Sigma\sqrt{x_i}}. \qquad (34)$$

В качестве примера проведем вычисление констант распределения для 24 золотинок фракции 3—4 *мм*. Их веса оказались следующие: 40, 45, 60, 67, 76, 78, 87, 99, 100, 120, 129, 132 * 150, 157, 175 * 203, 25[illegible], 274 * 274, 310, 343, 445, 510, 605. Общий вес фракции 4729 *мг*, то есть средний вес золотины 4279 : 24 = 197 *мг*. Среднее арифметическое из логарифмов получилось $m_e = 2{,}1766$, следовательно, медиана $M_e = 150$ *мг*. Действительно, золотина в 150 *мг* находится посредине. Далее, по формуле (16) вычисляем m_m. Оно равно 2,4060, то есть биссектриса $M_m = 255$ *мг*. Действительно, половина веса всего накопления находится между 18 и 19 золотинами. Наконец, средний логарифм по третьему преобразованию (по формуле 34)

$$m_c = \frac{\Sigma\sqrt{x_i}\cdot\lg x_i}{\Sigma\sqrt{x_i}} = \frac{723\cdot727}{315\cdot171} = 2{,}2963,$$

откуда $M_c = 197{,}8$. Прямое определение $M_c = 197{,}1$. Особенно интересно вычисление ремовента. Он должен быть одинаков по трем приемам. И действительно:

1) $\frac{\Sigma(\lg x)^2}{N} = \frac{116\cdot207}{24} = 4{,}8420 - 2{,}1766^2 = 0{,}1044 = \gamma^2;\ \gamma = 0{,}323,$

2) $\frac{\Sigma x(\lg x)^2}{\Sigma x} = \frac{27789\cdot891}{4729} = 5{,}8765 - 2{,}406^2 = 0{\cdot}0868 = \gamma^2;\ \gamma = 0{,}296,$

3) $\frac{\Sigma\sqrt{x}(\lg x)^2}{\Sigma\sqrt{x}} = \frac{1693\cdot912}{315\cdot171} = 5{,}3746 - 2{,}2963^2 = 0{,}1016;\ \gamma = 0{,}319.$

У нас есть еще один прием вычислить γ, это воспользоваться формулой (25)

$$m_m - m_e = 2{,}3026\,\gamma^2 = 2{,}40614 - 2{,}1766 = 0{,}22942,$$

отсюда

$$\gamma^2 = 0{,}09964 \text{ и } \gamma = 0{,}316.$$

Как видим, вычисления близки друг к другу, различие $1—2^0/_0$ измеряемой величины.

Этот пример, взятый из практики без какого-либо специального выбора, любопытен еще в том отношении, что здесь закономерность прилагается не к группам наблюдений, а к каждому единичному факту, каким является вес отдельной золотины. И тем не менее, связи логвер-закона, как показывают вычисления, весьма точно регулируют случайности появления отдельных золотинок.

§ 6. Вычисление констант распределения

Когда z_i как функция от x нам известна и распределение стало гауссовой формы, то по накоплению частот мы из таблиц гауссовой фракции можем найти нормированное отклонение t. Последнее связано с константами распределения линейным уравнением

$$t_i = \frac{z_i - m}{\gamma}, \tag{35}$$

но $= z \lg (ax + b)$, следовательно,

$$t = \frac{\lg (ax + b) - m}{\gamma}, \tag{36}$$

или

$$t\gamma = \lg (ax + b) - m. \tag{37}$$

Продифференцировав, получим (γ и m от x не зависит):

$$\frac{0.43\,dx}{ax + b} = \gamma \cdot dt, \tag{38}$$

или, в конечных разностях,

$$\frac{0.43\,\Delta x_i}{a(\overline{x_i} - c)} = \gamma \cdot \Delta t_i, \tag{39}$$

положив:

$$\frac{0{\cdot}43}{a \cdot \gamma} = h \text{ и } \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} = u_i,$$

имеем:

$$h \cdot u_i = \overline{x_i} - c. \tag{40}$$

Найдя для всех имеющихся у нас значений t_i (по таблице 1 интеграла функции Гаусса) и средние значения класса $\overline{x_i} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, мы для всех интервалов вычислим разности Δx_i, Δt_i и найдем u_i. Получим $k - 2$ уравнения, в которых u_i и $\overline{x_i}$ будут известны, а h и c найдем, решая эти $(k - 2)$ уравнения с 2 неизвестными по способу наименьших квадратов.

Таблица 1

Зависимости между накоплением S % и нормированным отклонением t

%	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	%
50	0.000	003	005	008	010	0.013	015	018	020	023	0.025	49
51	0.025	028	030	033	035	0.038	040	042	045	048	0.050	48
52	0.050	053	055	058	060	0.063	065	068	070	073	0.075	47
53	0.075	078	080	083	085	0.088	090	093	095	098	0.100	46
54	0.100	103	105	108	110	0.113	116	118	121	123	0.126	45
55	0.126	128	131	133	136	0.138	141	143	146	148	0.151	44
56	0.151	154	156	158	161	0.164	166	169	171	174	0.176	43
57	0.176	179	181	184	187	0.189	192	194	197	199	0.202	42
58	0.202	204	207	209	212	0.215	217	220	222	225	0.227	41
59	0.227	230	233	235	238	0.241	243	246	248	250	0.253	40
60	0.253	256	258	261	264	0,266	269	272	274	277	0.279	39
61	0.279	282	284	287	290	0.292	295	298	300	303	0.306	38
62	0.306	308	311	313	316	0.319	321	324	327	329	0.332	37
63	0.332	334	337	340	342	0.345	348	351	353	356	0.358	36
64	0.358	361	364	366	369	0.372	375	377	380	383	0.385	35
65	0.385	388	391	394	396	0.399	402	404	407	410	0.412	34
66	0.412	415	418	421	423	0.426	429	432	434	437	0.440	33
67	0.440	443	446	448	451	0.454	457	459	462	465	0.468	32
68	0.468	471	473	476	479	0,482	485	487	490	493	0.496	31
69	0.496	499	501	504	507	0.510	513	516	519	521	0,524	30
70	0.524	527	530	533	536	0.539	542	545	548	551	0.553	29
71	0.553	556	559	562	565	0.568	571	574	577	580	0.583	28
72	0.583	586	589	592	595	0.598	601	604	607	610	0.613	27
73	0.613	616	619	622	625	0.628	631	634	637	640	0.643	26
74	0.643	646	649	652	656	0.659	662	665	668	671	0.675	25
75	0.675	678	681	684	687	0.690	694	697	700	703	0.707	24
76	0.707	710	713	716	719	0.722	726	730	733	736	0.739	23
77	0.739	742	745	749	752	0.755	759	762	765	769	0.772	22
78	0.772	775	779	782	786	0.789	793	796	800	803	0.807	21
79	0.807	810	813	816	820	0.824	828	831	835	838	0.842	20
80	0,842	845	849	853	856	0.860	864	867	871	874	0.878	19
81	0.878	882	886	889	893	0.897	901	904	908	911	0.915	18
82	0.915	919	923	927	931	0.935	939	942	946	950	0.954	17
83	0.954	958	962	966	970	0.974	978	982	986	990	0.994	16
84	0.994	998	002	007	011	1.015	020	024	028	032	1.036	15
85	1.036	040	045	049	054	1.058	063	067	072	076	1.080	14
86	1.080	485	089	094	098	1.103	108	112	117	122	1.126	13
87	1.126	131	136	140	145	1.150	155	160	165	170	1.175	12
88	1.175	180	185	190	195	1.200	205	210	216	221	1.227	11
89	1.227	232	238	243	248	1.254	259	265	270	276	1.282	10
90	1.282	287	293	299	305	1.311	317	323	329	335	1.341	9
91	1.341	347	353	360	366	1.372	378	385	391	398	1.405	8
92	1.405	412	419	426	433	1.440	447	454	461	469	1.476	7
93	1.476	484	491	499	506	1.514	522	530	538	546	1.555	6
94	1.555	563	572	581	590	1.598	607	616	626	636	1.645	5
%	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	%

Продолжение

%	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	%
95	1.645	655	665	675	685	1.695	706	717	728	739	1.750	4
96	1.750	762	774	787	799	1.812	825	838	852	866	1.881	3
97	1.881	896	911	927	943	1,960	977	996	014	034	2.054	2
98	2.054	075	097	120	144	2.170	197	226	257	290	2.326	1
99.0	2.326	330	334	338	342	2.346	350	354	358	362	2,366	0.9
99.1	2.366	370	374	379	383	2.387	392	396	400	405	2.409	0.8
99.2	2.409	414	418	423	427	2.432	436	441	446	451	2.457	0.7
99.3	2.457	462	468	473	478	2.484	490	495	501	506	2.512	0 6
99.4	2.512	518	524	531	537	2.543	550	556	563	570	2.576	0.5
99.5	2.576	583	590	597	604	2.612	620	628	636	644	2.652	0.4
99.6	2.652	661	670	678	688	2.697	707	717	727	737	2.748	0,3
99.7	2.748	759	771	782	794	2.807	820	834	848	863	2.878	0.2
99 8	2.878	894	911	929	948	2.968	988	011	036	061	3 090	0,1
99.9	3.090	122	156	194	239	3,291	358	431	541	720	∞	0.0
%	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	%

Выводы

1. Рассматривая различные распределения природных качеств и свойств, главным образом из области геологических наук, автор пришел к мысли о замене одного аргумента другим, функционально с ним связанным. При такой замене вид функции распределения меняется и, например, симметричные формы распределения переходят в асимметричные и наоборот.

2. Функциональная трансформация переменных приводит к выделению семейств функций распределения, в разных формах отражающих один и тот же природный процесс. Среди форм могут существовать и более простые, например симметричные, и их нахождение целесообразно.

3. Автор ставит в общем виде проблему: каков должен быть вид связи между взаимно-заменяемыми аргументами, чтобы асимметричная монотонная форма была сведена к функции Гаусса, и при том так, чтобы некоторые константы остались без изменения? Решение этой проблемы устанавливает, что вид функции — логарифмический. Частный вид этой связи будет иметь выражение

$$z = \lg(x - a) + c.$$

4. Автор выводит некоторые свойства логарифмического распределения и указывает многочисленные случаи (в геохимии, петрологии, геологии, обогащении, подсчете запасов полезных ископаемых, при распределении вещества при осаждении, гидравлической классификации и пр.), где асимметричные распределения могут быть преобразованными в гауссову форму логарифмическим преобразованием.

Литература

1. Saidel, München Abhandlung, 9, 1863.
2. R. P. Loveland and A. P. H. Travelli, Matematical methods of freguency analysis of size of particles, Journal of the Franklin Institute, Philadelphia, aug. at. sept. 1927
3. Th. Hatsh, Determination of „average particle size" from the skreen analysis of non — uniforme particulate substances, Journ. of the Franklin Institute, Philadelphia, vol. 215. 1933, стр. 27—37.
4. Э. Борель, Случай, ГИЗ, 1923, стр. 97.
5. Гюмбель, Диалектика в природе, Сборник № 3, Вологда, 1928, стр. 246—266.
6. Уэтеккер и Робинсон, Приближенные вычисления, т. I, изд. 2-е, 1935, стр. 207.
7. П. И. Степанов, Геология месторождений ископаемых углей, 1937, стр., 402.
8. В. В. Билибин, Подсчет подземных запасов нефти, Баку, ОЗОНТИ. 1937.
9. Н. К. Разумовский, Механический состав россыпного золота и новые данные по методике подсчета запасов россыпей, Золотая промышленность, 1939, № 12, стр. 39—48.
10. Н. К. Разумовский, Характер распределения содержания металлов в рудных месторождениях, ДАН СССР, т. 28, № 9, 1940, стр. 815.