Записки Ленинградского ордена Ленина Горного института.
Том XX, 1948 г.

Определение напряжений в подъемных канатах для больших высот подъема и спуска

Проф. *Н. П. Неронов*

§ 1. Основные уравнения

При больших высотах подъема необходимо учитывать как массу, так и вес каната. Будем рассматривать последний, как упругую нить, пренебрегая его поперечными размерами, и ограничимся случаем каната постоянного сечения. Таким образом мы приходим к некоторой частной задаче математической физики.

Для какой-либо точки M каната ее расстояние MB от конца B (рис. 1) является суммой двух слагаемых: первое x выражает нормальную (при отсутствии сил) длину рассматриваемой части MB каната, а второе $u\,(x,t)$ — ее деформацию (удлинение), являющуюся функцией абсциссы x и времени t.

Функция $u\,(x,t)$ является в нашей задаче искомой. Натяжение T на основании закона Гука выражается через нее следующим образом:

$$T = \kappa \frac{\partial u\,(x,t)}{\partial x}, \qquad (1)$$

где κ постоянная и $\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial x}$ относительное удлинение каната в рассматриваемой точке.

Процесс поднятия или опускания груза будет сопровождаться продольными упругими колебаниями каната, характеризуемыми функцией $u\,(x,t)$, которая остается непрерывной по отношению к переменным x и t. Ее же частные производные различных порядков, вообще говоря, испытывают в некоторых точках разрыв непрерывности.

Назовем этот разрыв слабым (второго порядка), если частные производные первого порядка $\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial x}$ и $\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial t}$ непрерывны и разрыв непрерывности испытывает хотя бы одна из частных производ-

ных второго порядка. Наоборот, разрыв непрерывности будет сильным (первого порядка), если он имеет место хотя бы по отношению к одной из частных производных первого порядка. Аналогично можно ввести понятие о разрыве непрерывности порядка i.

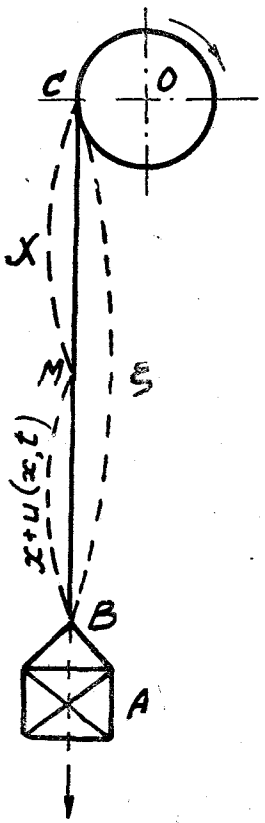


Рис. 1.

При движении груза в канате будет распространяться с некоторой конечной скоростью c,

$$c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}, \qquad (2)$$

прерывность того или другого порядка.

Здесь κ имеет прежнее значение, а ρ обозначает массу единицы длины каната. Заметим, что значение c совпадает со скоростью распространения звука в канате.

При нормальном режиме подъема или опускания груза имеют место слабые разрывы непрерывности, которыми мы, главным образом, и занимаемся в настоящем исследовании. Случай сильных разрывов нами затронут в дополнительном исследовании [1].

Некоторые примеры распространения сильных разрывов можно найти в работах академика А. Н. Динника [2] и проф. А. С. Локшина [3], например, при внезапной остановке вращающегося барабана. Впрочем, в последней задаче упругие колебания каната происходят при его постоянной длине (вследствие прекращения процесса навивания или сматывания каната с барабана), что вносит весьма существенное упрощение в решение рассматриваемой задачи.

Не отрицая безусловного интереса таким образом поставленной задачи, следует все-таки отметить, что с физической точки зрения было бы естественнее заменить мгновенную остановку барабана процессом торможения до полной остановки, хотя бы и весьма малой длительности. При такой постановке задачи мы будем иметь дело уже с распространением слабых разрывов непрерывности.

Неизвестная функция $u(x,t)$ определяется следующим функционально-дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка типа волнового уравнения (гиперболический тип):

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - b \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Bigg|_{x=0}, \qquad (3)$$

---

[1] Прикладная математика и механика, О некоторых вопросах, связанных с определением напряжений в подъемных канатах, т. IV, № 2, стр. 59—74, § 1, 1940.

[2] А. Н. Динник, Южный инженер, № 2-3, стр. 27—30; ibid. № 4, стр. 63—67, 1917.

[3] А. С. Локшин, О динамических напряжениях в подъемных канатах, приложение к № 12 Горного журнала за 1929 г.

де

$$c = +\sqrt{\frac{k}{\rho}}, \qquad b = \frac{k}{m} \tag{4}$$

і m обозначает массу груза.

Начальные условия в нашей задаче таковы:

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = f_1(x), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_2(x) \tag{5}$$

ля значений переменного x, заключающихся в интервале

$$0 \leq x \leq l_0.$$

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в упомянутом выше интервале считаются непрерывными и имеющими столько непрерывных производных, сколько потребуется обстоятельствами вычислений.

В случае разрывов непрерывности второго порядка естественно наложить условие непрерывности на функции $f_1(x)$ і $f_2(x)$, а также на производную $f_1'(x)$ первого порядка функции $f_1(x)$.

Что касается аналитического выражения рассматриваемых функций, то оно может задаваться произвольно при выполнении следующих условий на границе интервала:

$$f_1(0) = 0, \quad f_2(0) = 0,$$
$$f_1(l_0) = \xi_0 - l_0, \quad f_2(l_0) = \xi'_0 - v(0). \tag{6}$$

Переходим к пограничным условиям. Первое из них относится к точке B каната и имеет вид

$$u(x, t)\,|_{t=0} = 0. \tag{7}$$

Второе относится к точке C и приобретает различную форму, в зависимости от того, происходит ли поднятие или опускание груза.

Имеем в случае поднятия[1]

$$v'(t) + c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=l} + v(t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}\Big|_{x=l} = g \tag{8}$$

і в случае опускания[2]

$$v'(t) - v^2(t)\varepsilon'(s) + [c^2 + v^2(t)] \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=l} + 2v(t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}\Big|_{x=l} = g. \tag{9}$$

Здесь

$$s = s(t) = \int_0^t v(t)\,dt,$$
$$l = l_0 + \int_0^t v(t)\,dt. \tag{10}$$

Функция $\varepsilon(s)$ считается известной и характеризует закон распределения относительного удлинения для части каната, навитой на бара-

[1] Об упругих деформациях в подъемном канате, Прикладная математика и механика, новая серия, т. 1, № 1, стр. 91—116, 1937.

[2] Об упругих деформациях в канате при опускании груза, Прикладная математика и механика, т. IV, № 1, стр. 103—110, 1940; idem, Записки Ленинградского Горного института, т. XIV, стр. 141—158, 1941.

бан. Функции $v(t)$, $\varepsilon(s)$, а также их производные $v'(t)$, $\varepsilon'(s)$ предполагаются нами в рассматриваемом интервале для времени t непрерывными.

Рассмотрим сначала простейший случай поднятия груза при вращении барабана по произвольному закону из состояния покоя. В начальный момент канат предполагается статически растянутым силами веса системы.

Распространяющаяся по канату прерывность будет второго или высшего порядка (слабый разрыв), если $v(0)=0$, и первого (сильный разрыв), если $v(0)\neq 0$. Полученные формулы сохраняют силу для обоих случаев.

Имеющий место разрыв при $v(0)\neq 0$ будет сильным по отношению к скорости точек каната. Именно, скорость последних меняется прерывно от нуля до $v(0)$ при прохождении через них фронта волны, отделяющего верхнюю часть каната, уже пришедшую в движение, от нижней, еще находящейся в покое. Натяжение каната T остается в тех же точках прерывной функцией, как и скорость.

Здесь нужно отметить, что начальный момент вращения барабана не будет совпадать с начальным моментом движения груза. Действительно, следствием вращения барабана явится распространение по канату с некоторой конечной скоростью c прерывности. Груз придет в движение только тогда, когда упругие перемещения, возникшие в верхней части каната, распространяясь сверху вниз, достигнут его нижнего конца, т. е. в момент времени

$$\tau=\frac{l_0}{c}.$$

В данном случае мы имеем дело с распространением прерывности того или иного порядка. Эта прерывность будет порядка i, если уравнение $v(t)=0$ имеет корень $t=0$ порядка кратности $i-1$.

Пусть, в частности, барабан вращается равноускоренно и происходит поднятие груза. Имеем:

$$v(t)=-jt.$$

Можно показать, что натяжение каната достигает наибольшего значения T_{max} в точке C (рис. 1) в тот момент, когда весь канат окажется пришедшим в движение. Именно:

$$T_{max}\doteq mg+\rho l_0(g+j).$$

Полученная формула имеет весьма простую интерпретацию.

Переходим теперь к случаю равномерного вращения барабана ($v(t)=\text{const}=-v$, $v<c$), соответствующего поднятию груза, при произвольных начальных условиях (5). При этом по сравнению с общим случаем произвольного закона вращения все вычисления упрощаются, ход же решения остается неизменным.

Общий интеграл дифференциального уравнения в частных производных (3) может быть представлен в виде

$$u(x,t)=\varphi'(x+ct)+\psi'(x-ct)-\frac{b}{c^2}[\varphi(ct)+\psi(-ct)], \qquad (1$$

где φ и ψ обозначают произвольные функции соответствующих аргументов, а φ' и ψ' их производные.

Вышеупомянутые разрывы непрерывности происходят вдоль характеристик

$$x+ct=\text{const}, \quad x-ct=\text{const} \tag{12}$$

ифференциального уравнения (3), а также вдоль прямых $ct=\text{const}$.

Воспользуемся первым пограничным условием (7) для того, тобы привести вопрос к определению одной неизвестной функции) вместо двух φ и ψ, входящих в выражение (11) искомой деформации $u(x,t)$. Будем иметь:

$$u(x,t)=\frac{b}{c^2}[\Phi(x+ct)+\Phi(-x+ct)]+\Phi'(x+ct)-\Phi'(-x+ct)-$$
$$-\frac{2b}{c^2}\Phi(ct). \tag{13}$$

Начальные условия (5) дают значение функции $\Phi(z)$ в интервале $(0, l_0)$ изменения ее аргумента, а также позволяют экстраполировать ее за пределы этого интервала, давая значение функции в интервале $(-l_0,0)$. Итак, значение функции $\Phi(z)$ нам теперь известно в интервале $(-l_0, l_0)$. Следует заметить, что это значение зависит исключительно от начальных условий задачи, не завися от закона вращения барабана.

Чтобы отыскать значение функции $\Phi(z)$ в новой области изменения ее аргумента, обращаемся ко второму пограничному условию (8) или (9) и вносим в него значение (13) функции $u(x,t)$. Полученное уравнение дает возможность по известному значению функции $\Phi(z)$ в интервале $(-l_0, 0)$ найти ее значение в интервале

$$\left(l_0, \frac{2cl_0}{c+v}\right).$$

Следовательно, функция $\Phi(z)$ нам теперь известна в интервале

$$\left(-l_0, \frac{2cl_0}{c+v}\right).$$

Далее таким же путем, исходя из уравнения, доставляемого вторым пограничным условием, по значению функций $\Phi(z)$ в интервале $(0, l_0)$ экстраполируем ее за пределы последнего интервала и вычисляем ее значение в интервале

$$\left(\frac{2cl_0}{c+v}, \frac{3cl_0-vl_0}{c+v}\right)$$

и т. д. Указанный процесс может быть повторен неограниченное число раз. Уравнение (8) или (9) в нашей задаче играет роль „équation promotrice“ Сен-Венана.

Значение функции $\Phi(z)$, полученное путем последующих экстраполирований, не включая сюда первого, оказывается зависящим от закона вращения барабана.

Теперь остается положить $z=x+ct$ или $z=x-ct$ и внести значение функции $\Phi(z)$ в формулу (13) для деформации $u(x,t)$, воспользовавшись найденными ранее выражениями этой функции в различных интервалах, указанных выше.

Таким образом, мы последовательно получаем аналитические выражения функции $u(x,t)$ в областях I, II, III, IV и т. д., имеющие

вид, отличный для каждой области. Эти области разделяются одна от другой характеристиками (12) дифференциального уравнения (3). Произвольные постоянные интегрирования, входящие в выражение для $u(x, t)$, определяются из условия слабого разрыва непрерывности, то есть из условия, чтобы как сама функция $u(x, t)$, так и каждая из ее частных производных первого порядка $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ и $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ в двух смежных областях имели общее значение на соответствующих характеристиках, а также прямых $ct = \text{const}$, разделяющих эти области друг от друга (рис. 2). Прилагаемый чертеж соответствует случаю поднятия груза.

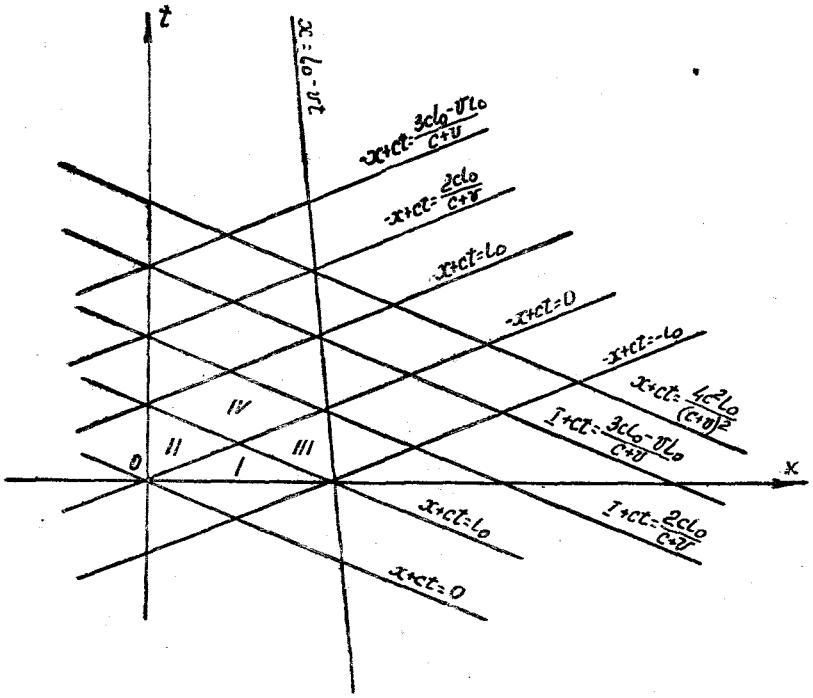


Рис. 2.

Последовательный переход от одной области к другой дает возможность получить выражение для деформации $u(x, t)$ в произвольной точке каната и для произвольного момента времени, а следовательно и значение натяжения T в этой точке на основании формулы (1). Соответствующие вычисления для области I, II, III, IV нами были выполнены ранее [1].

Задачи математической физики можно решать различными приемами или в замкнутой форме, или с помощью бесконечных рядов, например, пользуясь методом Фурье. Первый способ теоретически представляет известные преимущества по сравнению со вторым, од-

[1] Прикладная математика и механика, Об упругих деформациях в подъемном канате, т. I, № 1, стр. 91—116, 1937.

нако иногда с точки зрения простоты вычислений оказывается более выгодным второй способ. Рассматриваемый в настоящей статье вопрос решен в качестве примера для случая равномерного вращения барабана в замкнутой форме. Именно, приведя задачу к определению вида одной неизвестной функции Φ, путем экстраполирования за пределы данного интервала $(0, l_0)$ можно последовательно получить ее значение в интервалах:

$$(-l_0, 0);\ (0, l_0);\ \left(l_0, \frac{2cl_0}{c+v}\right);\ \left(\frac{2cl_0}{c+v}, \frac{3cl_0 - vl_0}{c+v}\right);$$

$$\left(\frac{3cl_0 - vl_0}{c+v}, \frac{4c^2l_0}{(c+v)^2}\right);\ \left(\frac{4c^2l_0}{(c+v)^2}, \frac{5c^2l_0 - 2cvl_0 + v^2l_0}{(c+v)^2}\right)$$

и т. д. Длины этих интервалов будут таковы:

$$l_0, l_0, l_0\frac{c-v}{c+v}, \quad l_0\frac{c-v}{c+v}, \quad l_0\left(\frac{c-v}{c+v}\right)^2, \quad l_0\left(\frac{c-v}{c+v}\right)^2, \ldots$$

Закон образования членов полученного ряда очевиден. Можно показать, что, если известно значение функции в $2n$ вышеприведенных интервалах, то указанные данные позволят вычислить деформацию $u(x, t)$ каната при поднятии груза на высоту h, не превышающую некоторой величины

$$l_0\left\{\left(1+\frac{v}{c}\right)\left[1-\left(\frac{c-v}{c+v}\right)^n\right]-\frac{v}{c}\right\},$$

которая имеет пределом l_0, если $n \to \infty$ и $v < c$.

Таким образом, если при решении поставленной задачи указанным выше способом ограничиваться значениями h, меньшими l_0, число необходимых операций остается конечным. Однако последнее неопределенно возрастает, если $h \to l_0$. Случай $h = l_0$ на практике исключается.

В связи с указанным выше решением поставленной задачи в замкнутой форме естественно возникает вопрос об единственности полученного решения. Теория уравнений Монж-Ампера непосредственно здесь неприменима как вследствие вида основного уравнения (3) задачи, так и характера второго пограничного условия, в которое входят частные производные второго порядка. Однако, если рассматривать движение системы из состояния покоя от начального момента вращения барабана до момента, соответствующего началу движения груза, то легко показать, что интересующая нас область изменения переменных x и t разбивается характеристиками на ряд областей, где данное уравнение имеет единственный правильный интеграл. В самом деле, в каждой из последних областей поставленная задача приводится к нахождению интеграла дифференциального уравнения в частных производных второго порядка обычного гиперболического типа. Условия, которым должен удовлетворять этот интеграл, соответствуют основной постановке проблемы Коши или заданию интеграла на характеристиках или так называемой „смешанной проблеме“. При этом полученные нами результаты будут одинаково применимы к распространению как слабого, так и сильного разрыва непрерывности.

Переходим теперь к вопросу о применении к нашей задаче метода Фурье. Заметим здесь, что во второе пограничное условие (8) или

(9) в нашей задаче входит явно время t и поэтому прямое применение метода Фурье здесь встречает затруднение, главным образом обусловленное тем обстоятельством, что длина l вертикальной части каната является не постоянной величиной, а функцией времени.

Поэтому изменим постановку задачи и будем рассматривать движение каната постоянной длины, верхнему концу которого сообщается скорость. Полученные нами результаты можно будет применить например, с одной стороны, непосредственно к кратковременным процессам торможения в силу малого изменения длины l, а с другой стороны, также к длительному движению груза, если полную высоту его поднятия или опускания разбить на ряд малых участков и для каждого из последних длину каната приближенно считать постоянной. Оценка получающейся при этом погрешности, а также эффективности применяемого метода требует дополнительного исследования. Само собой разумеется, что и новая задача может быть решена также в замкнутой форме аналогично изложенному выше[1].

В дальнейшем разбираются два случая задания движения верхнего конца каната.

§ 2. 1-й случай

До исследования более общего случая рассмотрим сначала тот, когда закон движения верхнего конца каната выражается полиномом третьего порядка, т. е.

$$s(t) = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3,$$

где α, β, γ постоянные коэффициенты, что соответствует параболической диаграмме линейной скорости $v(t)$ на окружности барабана. В частном случае ($\gamma = 0$) мы переходим к равнопеременному (равноускоренному или равнозамедленному), а в еще более частном ($\beta = 0$, $\gamma = 0$) к равномерному вращению барабана.

Наконец, если $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, мы имеем хорошо известный случай движения каната с грузом на конце, подвешенным к неподвижной точке. Для решения сформулированной выше задачи можно указать три способа.

1-й способ. Удерживаем предыдущие обозначения, отсчитывая абсциссу x от нижнего конца B каната, где

$$u(x, t)\Big|_{x=0} = 0.$$

Дифференциальное уравнение движения каната в новой задаче имеет прежний вид:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - b \frac{\partial u(x,t)}{dx}\Big|_{x=0}, \tag{14}$$

где

$$c = +\sqrt{\frac{k}{\rho}}, \qquad b = \frac{k}{m}. \tag{15}$$

[1] Phillips, De divers problèmes de Mécanique..., Journal de Mathématiques pures et appliquées, p. 25—83, 1864.

Точно также сохраняются начальные условия:

$$u(x,t)\Big|_{t=0}=f_1(x), \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=f_2(x), \tag{16}$$

где

$$0\leq x\leq l,$$

и первое из пограничных условий:

$$u(x,t)\Big|_{x=0}=0. \tag{17}$$

Изменяется только второе пограничное условие, принимающее в данном случае вид

$$s''(t)+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\Big|_{x=l}=g-b\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}. \tag{18}$$

Сохраняем ограничения, налагаемые на произвольные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и сформулированные ранее.

Представляем искомую деформацию $u(x,t)$ в виде суммы

$$u(x,t)=\sum TX, \tag{19}$$

где T является функцией только t, а X функцией только x, называемой фундаментальной. Пусть каждое слагаемое предыдущей суммы представляет частное решение уравнения (14). Тогда подстановка в это уравнение и разделение переменных дают дифференциальные уравнения, определяющие функции T и X, именно

$$\frac{T''}{T}=\frac{c^2X''-bX'(0)}{X}=\text{const}=-n^2, \tag{20}$$

где постоянная n остается пока произвольной. Приписывая функциям T и X индекс n, получим в результате интегрирования дифференциальных уравнений (20):

$$u(x,t)=T_0X_0+\sum_n T_nX_n, \tag{21}$$

где

$$T_0=A_0t+B_0, \qquad X_0=C_0x^2+D_0x+E_0,$$
$$T_n=A_n\sin nt+B_n\cos nt, \quad X_n=C_n\sin\frac{nx}{c}+D_n\cos\frac{nx}{c}+E_n \tag{22}$$

и через

$$A_0,\ B_0,\ A_n,\ B_n,\ C_0,\ D_0,\ E_0,\ C_n,\ D_n,\ E_n$$

обозначены произвольные постоянные интегрирования. При этом

$$2C_0=\frac{b}{c^2}D_0, \qquad E_n=\frac{b}{nc}C_n. \tag{23}$$

Обращаемся к первому пограничному условию (17). Пусть ему удовлетворяет каждое слагаемое суммы (21), которой выражается неизвестная функция $u(x, t)$. Отсюда

$$X_0(0) = 0, \quad X_n(0) = 0 \tag{24}$$

или

$$E_0 = 0, \quad D_n + E_n = 0. \tag{25}$$

Наконец вносим значения $u(x, t)$ и $s(t)$ во второе пограничное условие (18), которое будет удовлетворяться тождественно, если имеют место равенства

$$A_0 = -\frac{3\gamma}{c^2}, \quad B_0 = \frac{g - 2\beta}{2c^2}, \quad D_0 = \frac{2c^2}{b}, \tag{26}$$

$$X_n''(l) = 0. \tag{27}$$

Второе из последних равенств

$$\sin\frac{nl}{c} = \frac{b}{nc}\cos\frac{nl}{c} \tag{28}$$

определяет значения n, по которым производится суммирование в выражении (21) для $u(x, t)$, то есть так называемые характеристические числа задачи.

Вводим обозначения

$$\nu = \frac{nl}{c}, \qquad p = \frac{bl}{c^2} = \frac{M}{m}, \tag{29}$$

где положительный параметр p представляет отношение массы M каната к массе m груза, и переписываем уравнение (28) в следующей форме

$$\nu \operatorname{tg} \nu = p. \tag{30}$$

Полученное трансцендентное уравнение имеет бесчисленное множество положительных корней ν_i $(i = 1, 2, 3\ldots)$, где

$$\nu_i = \frac{n_i l}{c}, \tag{31}$$

беспредельно возрастающих с увеличением индекса i.

Асимптотическое выражение для корня ν_i имеет вид $(i \to \infty)$

$$\nu_i = \pi(i - 1).$$

Для очень больших значений параметра p имеем приближенно $(p \to \infty)$

$$\nu_i = \frac{\pi}{2}(2i - 1)$$

и для очень малых $(p \to 0)$

$$\nu_i = \pi(i - 1).$$

В общем случае определение корней уравнения (30) неоднократно встречавшегося в различных вопросах математической физики, не встречает затруднений.

На основании всего сказанного выше выражение (21) для деформации $u(x, t)$ принимает вид, если положить без уменьшения общности $C_0 = C_n = 1$,

$$u(x, t) = (A_0 t + B_0)(x^2 + D_0 x) + \sum (A_n \sin nt + B_n \cos nt) X_n, \quad (32)$$

где

$$n = \frac{\nu c}{l}, \qquad \nu \operatorname{tg} \nu = p, \qquad X_n = \sin \frac{nx}{c} - \frac{b}{nc} \cos \frac{nx}{c} + \frac{b}{nc} \quad (33)$$

и коэффициенты A_0, B_0, D_0 имеют ранее найденные значения, именно

$$A_0 = -\frac{3\gamma}{c^2}, \qquad B_0 = \frac{g - 2\beta}{2c^2}, \qquad D_0 = \frac{2c^2}{b}. \quad (34)$$

Для определения коэффициентов A_n и B_n будем исходить из начальных условий (16).

Прежде всего нужно исследовать вопрос, является ли система фундаментальных функций X_n ортогональной. С этой целью возьмем два корня λ и μ, $\lambda \neq \mu$, трансцендентного уравнения (28), составим выражения соответствующих им фундаментальных функций

$$X_\lambda = \sin \frac{\lambda x}{c} - \frac{b}{\lambda c} \cos \frac{\lambda x}{c} + \frac{b}{\lambda c},$$

$$X_\mu = \sin \frac{\mu x}{c} - \frac{b}{\mu c} \cos \frac{\mu x}{c} + \frac{b}{\mu c}$$

и вычислим определенный интеграл

$$\int_0^l X_\lambda X_\mu \, dx = \frac{b}{\lambda\mu} \left[1 + \frac{bl}{c^2} - \left(1 + \frac{b^2}{c^2 \lambda^2} \right) \cos \frac{\lambda l}{c} - \left(1 + \frac{b^2}{c^2 \mu^2} \right) \cos \frac{\mu l}{c} \right] \neq 0.$$

Интеграл оказался неравным нулю и рассматриваемая система функций X_n не будет ортогональной.

Однако можно показать, что функции X'_n

$$X''_n = \frac{n}{c} \cos \frac{nx}{c} + \frac{b}{c^2} \sin \frac{nx}{c}$$

образуют ортогональную систему.

В самом деле, дифференцируем уравнение

$$c^2 X''_n = -n^2 X_n + b X'_n(0), \quad (35)$$

определяющее функцию X_n.

Имеем

$$c^2 X'''_n = -n^2 X'_n.$$

Преобразуем теперь, интегрируя по частям, определенный интеграл

$$\frac{\lambda^2}{c^2}\int_0^l X'_\lambda X'_\mu\,dx = -\int_0^l X'''_\lambda X'_\mu\,dx = -X''_\lambda X'_\mu\Big|_0^l + \int_0^l X''_\lambda X''_\mu\,dx.$$

В силу уравнения (27) имеем

$$\frac{\lambda^2}{c^2}\int_0^l X'_\lambda X'_\mu\,dx = X''_\lambda(0)\,X'_\mu(0) + \int_0^l X''_\lambda X''_\mu\,dx.$$

Таким же образом найдем, переставляя индексы λ и μ,

$$\frac{\mu^2}{c^2}\int_0^l X'_\lambda X'_\mu\,dx = X''_\mu(0)\,X'_\lambda(0) + \int_0^l X''_\lambda X''_\mu\,dx.$$

Из двух последних равенств путем вычитания получаем

$$(\lambda^2-\mu^2)\int_0^l X'_\lambda X'_\mu\,dx = c^2X''_\lambda(0)\,X'_\mu(0) - c^2X''_\mu(0)\,X'_\lambda(0).$$

С другой стороны, полагая в дифференциальном уравнении (35) $x=0$ и принимая во внимание равенство

$$X_n(0)=0,$$

выражающее первое пограничное условие, имеем

$$c^2X''_n(0) = bX'_n(0).$$

Поэтому

$$(\lambda^2-\mu^2)\int_0^l X'_\lambda X'_\mu\,dx = 0$$

и так как по условию $\lambda \neq \mu$, то

$$\int_0^l X'_\lambda X'_\mu\,dx = 0, \tag{36}$$

т. е. система функции X'_n ортогональна.

Теперь коэффициенты A_n и B_n определяются без труда. Начальные условия (16) дают после внесения в них значения функции $u(x,t)$ на основании равенства (32):

$$\begin{aligned} B_0(x^2+D_0x) + \sum_n B_nX_n &= f_1(x),\\ A_0(x^2+D_0x) + \sum_n nA_nX_n &= f_2(x). \end{aligned} \tag{37}$$

Дифференцируя по x, имеем

$$B_0(2x+D_0)+\sum_u B_n X'_n = f'_1(x),$$
$$A_0(2x+D_0)+\sum_n A_n X'_n = f'_2(x). \tag{38}$$

Из последних уравнений, принимая во внимание условие ортогональности (36), находим

$$nA_n\int_0^l X'^2_n\,dx = \int_0^l [f'_2(x) - A_0(2x+D_0)]\,X'_n\,dx,$$
$$B_n\int_0^l X'^2_n\,dx = \int_0^l [f'_1(x) - B_0(2x+D_0)]\,X'_n\,dx. \tag{39}$$

Для определения из предыдущих уравнений коэффициентов A_n и B_n остается еще вычислить интеграл $\int_0^l X'^2_n\,dx$, который оказывается имеющим следующее значение:

$$\int_0^l X'^2_n\,dx = \frac{1}{24nc^4}\left[ln\,(n^2c^2+b^2)+c\,(n^2c^2-b^2)\sin\frac{nl}{c}\cos\frac{nl}{c}+\right.$$
$$\left.+2bnc^2\sin^2\frac{nl}{c}\right]. \tag{40}$$

Уравнения (38) представляют разложения в бесконечные ряды функций

$$f'_1(x)-B_0(2x+D_0)$$
$$f'_2(x)-A_0(2x+D_0)$$

по фундаментальным функциям X'_n.

Из исследований Кнезера[1], основанных на методе асимптотических выражений для характеристических чисел и фундаментальных функций и впоследствии обобщенных другими авторами[2], вытекает равномерная сходимость этих разложений, если функции $f'_1(x)$ и $f'_2(x)$ непрерывны и удовлетворяют в интервале $0 \leqq x \leqq l$ условиям Дирихле.

Итак, выражение для деформации $u(x,t)$, дающее решение поставленной задачи, принимает вид

$$u(x,t)=(A_0t+B_0)(x^2+D_0x)+\sum(A_n\sin nt+$$
$$+B_n\cos nt)\left(\sin\frac{nx}{c}-\frac{b}{nc}\cos\frac{nx}{c}+\frac{b}{nc}\right), \tag{41}$$

---

[1] A. Kneser, Matematische Annalen, Bd. 58, S. 81—147, 1904.

[2] Именно В. А. Стеклов (1907—1909) и J. Mercer (1912); см. также Курант-Хильберт, Методы математической физики, т. I, гл. V, § 3, 14, 1933. В связи с этим нужно отметить интересную работу М. Крейна (Матем. сборник, н. с., т. II, № 5, стр. 923—933, 1937), который, обобщая результаты Treffitz и Hölder, с помощью иного метода нашел необходимые и достаточные условия разложимости произвольной функции в ряд по фундаментальным функциям краевой задачи, а также условия дифференцируемости полученного ряда.

где суммирование распространено на положительные корни трансцендентного уравнения

$$\nu \operatorname{tg} \nu = p,$$
$$\nu = \frac{nl}{c}, \quad p = \frac{M}{m}. \tag{42}$$

Формулы для коэффициентов

$$A_0 = -\frac{3\gamma}{c^2}, \quad B_0 = \frac{g-2\beta}{2c^2}, \quad D_0 = \frac{2c^2}{b},$$

$$A_n = \frac{2c^4 \int_0^l \left[f_2'(x) - A_0(2x + D_0)\right]\left[\frac{n}{c}\cos\frac{nx}{c} + \frac{b}{c^2}\sin\frac{nx}{c}\right] dx}{nl\,(n^2c^2 + b^2) + c\,(n^2c^2 - b^2)\sin\frac{nl}{c}\cos\frac{nl}{c} + 2bnc^2\sin^2\frac{nl}{c}},$$

$$B_n = \frac{2nc^4 \int_0^l \left[f_1'(x) - B_0(2x + D_0)\right]\left[\frac{n}{c}\cos\frac{nx}{c} + \frac{b}{c^2}\sin\frac{nx}{c}\right] dx}{nl\,(n^2c^2 + b^2) + c\,(n^2c^2 - b^2)\sin\frac{nl}{c}\cos\frac{nl}{c} + 2bnc^2\sin^2\frac{nl}{c}}. \tag{43}$$

Наша конечная цель заключается в вычислении натяжения T каната на основании формулы

$$T = k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

Внося сюда значение $u(x,t)$, получаем выражение для T в виде бесконечного ряда

$$T = kT_0X_0' + k\sum_n T_nX_n'. \tag{44}$$

Возникает вопрос о сходимости полученного ряда. Для его разрешения наложим на функции $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$ более сильные ограничения сравнительно со сделанными раньше, именно потребуем, чтобы они имели непрерывные первые и вторые производные. Тогда разложения (38) будут абсолютно и равномерно сходящимися в интервале $0 \leqslant x \leqslant l$. Отсюда, как следствие, вытекает абсолютная и равномерная сходимость и ряда (46) для T в том же интервале.

Само собой разумеется, что указанные выше ограничения для функций $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$ только достаточны, но вовсе не необходимы для абсолютной и равномерной сходимости разложения (44)[1].

2-й способ. Полученным нами результатам можно придать несколько иной вид, если за точку отсчета деформации $u(x,t)$, где $u(x,t)|_{x=0} = 0$ (первое пограничное условие), принять не нижний конец B каната, а верхний C и абсциссы x отсчитывать от этой последней точки. Тогда дифференциальное уравнение движения каната представится в виде

$$s''(t) + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = g + c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{45}$$

[1] Требование непрерывности первой и второй производных у Курант-Хильберта заменено требованием их „кусочной" непрерывности.

второе пограничное условие приобретает форму

$$c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=l} = -b \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l}. \tag{46}$$

Представим общий интеграл уравнения (45) в виде суммы двух лагаемых

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{47}$$

де $u_1(x,t)$ является общим интегралом однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{48}$$

$u_2(x,t)$ частным решением уравнения (45). Подчиним это частное ешение требованию удовлетворять обоим пограничным условиям зададим его в следующей форме:

$$u_2(x,t) = (A_0' t + B_0')(C_0' x^2 + D_0' x + E_0'), \tag{49}$$

де без ущерба для общности можно принять $C_0' = 1$. Значения остальых коэффициентов оказываются такими:

$$A_0' = \frac{3\gamma}{c^2}, \quad B_0' = \frac{2\beta - g}{2c^2}, \quad D_0' = -\frac{2}{b}(c^2 + bl), \quad E_0' = 0. \tag{50}$$

В силу всего изложенного пограничные условия для интеграла $u_1(x,t)$ принимают вид

$$u_1(x,t)\Big|_{x=0} = 0, \quad c^2 \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=l} = -b \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l}. \tag{51}$$

Далее из начальных условий задачи

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = f_1(x), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_2(x)$$

и начальных условий для частного решения $u_2(x,t)$:

$$u_2(x,t)\Big|_{t=0} = B_0'(x^2 + D_0' x),$$

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = A_0'(x^2 + D_0' x)$$

вытекают следующие начальные условия для интеграла $u_1(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_1(x,t)\Big|_{t=0} &= f_1(x) - B_0'(x^2 + D_0' x), \\ \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} &= f_2(x) - A_0'(x^2 + D_0' x). \end{aligned} \tag{52}$$

Рассматриваемая схема решения оказывается несколько более простой, чем предыдущая.

Именно полагаем

$$u_1(x,t) = \sum_n T_n X_n, \tag{53}$$

где функции T_n и X_n определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{T_n''}{T_n} = \frac{c^2 X_n''}{X_n} = -n^2. \tag{54}$$

Отсюда

$$T_n = A_n' \sin nt + B_n' \cos nt, \quad X_n = C_n' \sin \frac{nx}{c} + D_n' \cos \frac{nx}{c}. \tag{55}$$

На основании первого из пограничных условий (51):

$$D_n' = 0. \tag{56}$$

Поэтому, полагая без уменьшения общности $C_n' = 1$, имеем

$$X_n = \sin \frac{nx}{c}. \tag{57}$$

Наконец, второе пограничное условие дает

$$X_n(l) = \frac{b}{n^2} X_n'(l) \tag{58}$$

или

$$\sin \frac{nl}{c} = \frac{b}{nc} \cos \frac{nl}{c}. \tag{59}$$

Конечно, мы получили для определения характеристических чисел задачи то же трансцендентное уравнение, что и в первом способе.

Система фундаментальных функций X_n попрежнему оказывается неортогональной, так как

$$\int_0^l X_\lambda X_\mu dx = -\frac{c^2}{b} X_\lambda(l) X_\mu(l) = -\frac{c^2}{b} \sin \frac{\lambda l}{c} \cos \frac{\mu l}{c}, \tag{60}$$

где

$$\lambda \neq \mu.$$

Поэтому переходим к функциям X_n', образующим ортогональную систему, и на основании начальных условий (54) имеем разложения

$$\sum_n B_n' X_n' = f_1'(x) - B_n'(2x + D_0'),$$
$$\sum_n n A_n' X_n' = f_2'(x) - A_0'(2x + D_0'). \tag{61}$$

Отсюда находим значения коэффициентов A_n' и B_n':

$$nA_n' \int_0^l X_n'^2 dx = \int_0^l [f_2'(x) - A_0'(2x + D_0')] X_n' dx,$$
$$B_n' \int_0^l X_n'^2 dx = \int_0^l [f_1'(x) - B_0'(2x + D_0')] X_n' dx, \tag{62}$$

где

$$\int_0^l X_n'^2 dx = \frac{n}{4c}\left(2ln + c \sin \frac{2nl}{c}\right). \tag{63}$$

Решение задачи представляется в следующем виде:

$$u(x,t)=(A_0't+B_0')(x^2+D_0'x)+\sum_n(A_n'\sin nt+B_n'\cos nt)\sin\frac{nx}{c}, \quad (64)$$

где

$$A_0'=\frac{3\gamma}{c^2},\quad B_0'=\frac{2\beta-g}{2c^2},\quad D_0'=-\frac{2}{b}(c^2+bl),$$

$$A_n'=\frac{4c\int_0^l\left[f_2'(x)-A_0'\left(2x+D_0'\right)\right]\cos\frac{nx}{c}\,dx}{n\left(2ln+c\sin\frac{2ln}{c}\right)}, \quad (65)$$

$$B_n'=\frac{4c\int_0^l\left[f_1'(x)-B_0'\left(2x+D_0'\right)\right]\cos\frac{nx}{c}\,dx}{2ln+c\sin\frac{2ln}{c}}.$$

3-й способ. Решая данную задачу двумя вышеуказанными способами, мы прибегали к операции дифференцирования с целью замены неортогональной системы фундаментальных функций X_n другой ортогональной X_n'. Эта операция налагает на задаваемые функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ дополнительные ограничения, которые отсутствуют в последнем способе, уже применявшемся проф. А. С. Локшиным[1] в подобных задачах, но требующим, конечно, аналитического обоснования.

Сущность его состоит в следующем. Будем решать задачу по 2-му способу, не переходя, однако, к ортогональной системе функций X_n'. С этой целью вносим в начальные условия (52) значение (53) функции $u_1(x,t)$, принимая во внимание уравнения (57). Будем иметь

$$\varphi_1(x)\equiv f_1(x)-B_0'(x^2+D_0'x)=\sum_n B_n'X_n,$$
$$\varphi_2(x)\equiv f_2(x)-A_0'(x^2+D_0'x)=\sum_n nA_n'X_n. \quad (66)$$

Займемся сначала определением коэффициента B_q' и переписываем первое из предыдущих равенств в виде

$$\varphi_1(x)=\sum_n B_n'x_n=\sum_n{}' B_n'X_n+B_q'X_n, \quad (67)$$

где в сумме $\sum'$ отсутствует слагаемое, соответствующее значению n, для которого $n=q$.

[1] А. С. Локшин, idem, § 4, стр. 7, 8.

Умножая обе части последнего равенства на X_q и интегрируя по x, находим

$$\int_0^l \varphi_1(x) X_q \, dx = \sum_n' B_n' \int_0^l X_n X_q \, dx + B_q' \int_0^l X_q^2 dx. \tag{6}$$

Если $n \neq q$, то на основании уравнения (60) имеем

$$\int_0^l X_n X_q \, dx = -\frac{c^2}{b} X_n(l) X_q(l). \tag{6}$$

После этого равенство (68) принимает вид

$$\int_0^l \varphi_1(x) X_q \, dx = -\frac{c^2}{b} X_q(l) \sum_n' B_n' X_n(l) + B_q' \int_0^l X_q^2 dx. \tag{7}$$

Далее полагаем в первом из уравнений (66) $x = l$:

$$\varphi_1(l) = \sum_n' B_n' X_n(l) + B_q' X_q(l). \tag{7}$$

Отсюда

$$\sum_n' B_n'(l) X_n(l) = \varphi_1(l) - B_q' X_q(l).$$

Вносим значение найденной суммы в равенство (70):

$$\int_0^l \varphi_1(x) X_q dx = -\frac{c^2}{b} X_q(l) [\varphi_1(l) - B_q' X_q(l)] + B_q' \int_0^l X_q^2 dx.$$

Из полученного уравнения определяем коэффициенты B_q':

$$B_q' = \frac{\int_0^l \varphi_1(x) X_q dx + \frac{c^2}{b} \varphi_1(l) X_q(l)}{\int_0^l X_q^2 dx + \frac{c^2}{b} X_q^2(l)}. \tag{72}$$

Аналогичным путем получаем формулу для коэффициента A_q':

$$qA_q' = \frac{\int_0^l \varphi_2(x) X_q dx + \frac{c^2}{b} \varphi_2(l) X_q(l)}{\int_0^l X_q^2 \, dx + \frac{c^2}{b} X_q^2(l)}. \tag{73}$$

Остается внести в формулы (72) и (73) значения функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ на основании равенств (66), а также воспользоваться значением определенного интеграла:

$$\int_0^l X_q^2 dx = \frac{1}{4q}\left(2lq - c\sin\frac{2ql}{c}\right). \tag{74}$$

Решение задачи попрежнему дается формулой (64), полученной для $u(x,t)$ по второму способу, однако при новом виде формул для коэффициентов A_n' и B_n', определяемых теперь равенствами (74) и (73).

Рассмотренный сейчас способ решения задачи был применен проф. А. С. Локшиным [1] к случаю распространения в канате сильных разрывов непрерывности (например, при внезапной остановке вращающегося барабана), когда функция $f_2(x)$ в некоторых точках испытывает разрыв непрерывности.

Сделаем еще следующее замечание. В *полученных нами двух* типах формул для коэффициентов A_n' и B_n' сделаны различные предположения относительно подинтегральных функций. Поэтому взаимный переход одного типа формул в другой при помощи операции интегрирования по частям определенного интеграла не всегда допустим.

§ 3. 2-й случай

Положим движение верхнего конца заданным в алгебраической форме, именно функция $s(t)$ представляет полином степени R.

Для решения поставленной задачи снова применим 2-й способ предыдущего случая. Вопрос можно считать решенным, если удастся найти частное решение $u_2(x_1t)$ дифференциального уравнения в частных производных (45), удовлетворяющее обоим пограничным условиям. Интеграл $u_1(x,t)$ сохранит свой прежний вид, а входящие в него неопределенные коэффициенты A_n' и B_n' найдутся при помощи начальных условий аналогично вышеизложенному.

Будем искать частное решение $u_2(x,t)$ в виде полинома степени r относительно переменного x:

$$u_2(x,t) = a_0(t) + xa_1(t) + x^2a_2(t) + \ldots + x^{r-1}a_{r-1}(t) + x^r a_r(t) \tag{75}$$

с коэффициентами $a_0(t)$, $a_1(t)\ldots$, представляющими некоторые функции времени.

В силу первого пограничного условия $u_2(x,t)\big|_{x=0} = 0$, и поэтому $a_0(t) = 0$.

---

[1] А. С. Локшин, О динамических напряжениях в подъемных канатах, приложение к № 12 Горного журнала за 1929 г.

Для определения неизвестных коэффициентов $a_1(t), a_2(t), \ldots$ вносим значение $u_2(x,t)$ в уравнение (45). Результат подстановки дает тождество при выполнении следующих условий:

$$s''(t) = g + 2 \cdot 1\, c^2 a_2(t), \quad a_1''(t) = 3 \cdot 2\, c^2 a_3(t),$$

$$a_2''(t) = 4 \cdot 3\, c^2 a_4(t), \ldots$$

$$a_{q-3}''(t) = (q-1)(q-2)\, c^2 a_{q-1}(t), \; a_{q-2}''(t) = q(q-1)\, c^2 a_q(t), \quad (76)$$

$$a_{q-1}''(t) = 0, \; a_q''(t) = 0.$$

Отсюда последовательно получаем значения коэффициентов с четными индексами:

$$a_2(t) = \frac{s''(t) - g}{1.2\, c^2}, \qquad a_4(t) = \frac{s^{(4)}(t)}{4!c^4}, \quad (77)$$

$$a_6(t) = \frac{s^{(6)}(t)}{6!c^6}, \ldots$$

Все рассматриваемые коэффициенты естественно оказываются полиномами, степени которых последовательно убывают. Ряд $a_2(t)$, $a_4(t)$, $a_6(t)\ldots$ обрывается сам собой на последнем неравном нулю коэффициенте.

Точно также из уравнений (76) находим выражения для коэффициентов с нечетными индексами через коэффициент $a_1(t)$:

$$a_3(t) = \frac{a_1^{(2)}(t)}{3!c^2}, \qquad a_5(t) = \frac{a_1^{(4)}(t)}{5!c^4}, \quad (78)$$

$$a_7(t) = \frac{a_1^{(6)}(t)}{7!c^6}, \ldots$$

В ряде $a_3(t)$, $a_5(t)$, $a_7(t)\ldots$ последний коэффициент должен быть постоянным или линейной функцией переменного t. Отсюда заключаем, что все коэффициенты с нечетными индексами являются также полиномами.

Наконец значение коэффициента $a_1(t)$ найдется из условия, что результат подстановки значения $u_2(x,t)$ во второе пограничное условие (46) должен обращать последнее в тождество. Имеем

$$ba_1(t) + 2(c^2 + bl)\, a_2(t) + 3l(2c^2 + bl)\, a_3(t) + \ldots$$

$$\ldots + (q-2)\, l^{q-4}[c^2(q-3) + bl]\, a_{q-2}(t) + (q-1)\, l^{q-3}[c^2(q-2) +$$

$$+ bl]\, a_{q-1}(t) + q l^{q-2}[c^2(q-1) + bl]\, a_q(t) = 0. \quad (79)$$

Обращение равенства (79) в тождество возможно только при условии, чтобы коэффициенты $a_1(t)$ и $a_2(t)$ представляли полиномы одной и той же степени $R-2$ (наивысшей по отношению ко всем другим коэффициентам).

Сопоставляя все сказанное ранее, легко приходим к заключению, что r должен быть четным числом и иметь значение $r=R$ при R четном и $r=R-1$ при R нечетном.

Таким образом, задавшись полиномом $s(t)$, мы сначала вычисляем коэффициенты $a_2(t)$, $a_4(t)\ldots$ с четными индексами по формулам (77). Затем при помощи равенства (79) определяем коэффициент $a_1(t)$, после чего находятся коэфициенты с нечетными индексами по формулам (78).

Пусть в частном случае функция $s(t)$ представляет полином третьей степени:

$$s(t)=\alpha t+\beta t^2+\gamma t^3,$$

что соответствует параболической диаграмме линейной скорости $v(t)$, т. е. $R=3$. Тогда $r=2$. Имеем

$$u_2(x,t)=xa_1(t)+x^2a_2(t).$$

Уравнения (77) дают

$$a_2(t)=\frac{1}{2c}(2\beta+6\gamma t-g).$$

Обращаемся к равенству (79), откуда выводим

$$a_1(t)=-\frac{c^2+bl}{bc^2}(2\beta+6\gamma t-g).$$

Подставляя значения коэффициентов $a_1(t)$ и $a_2(t)$, получаем выражение для частного решения $u_2(x,t)$ в уже известной нам форме (49).

Представляет интерес исследование движения каната постоянной длины с грузом на нижнем конце, когда верхний конец совершает гармоническое колебательное движение по закону

$$s(t)=\lambda\sin(\mu t+\nu).$$

На практике движение, сходное с указанным выше, но более сложное, благодаря переменной длине вертикальной части каната, осуществляется при так называемом гармоническом рудничном подъеме или, наконец, при крутильных колебаниях заторможенного барабана. Решение упомянутой задачи можно найти в работе Филлипса[1].

Замечания

Замечание 1. В предыдущей работе мы пренебрегали для малых высот подъема массой каната по сравнению с массой подвешенного к нему груза. Приведем пример существования движений такого рода, когда это пренебрежение допустимо, то есть сопровождается малой ошибкой при вычислении натяжения каната.

В самом деле, пусть подвешенный к канату груз и все частицы каната имеют при подъеме одно и то же постоянное ускорение, абсолютную величину которого обозначим через j. Такое движение возможно при равноускоренном вращении барабана и наличии соответствующих начальных условий.

[1] Phillips, Journal de mathématiques pures et appliquées, p. 25—83, 1864.

В этом случае деформация $u\,(x,t)$ будет зависить только от одного переменного x, но не от времени t. Имеем

$$u\,(x,t) = u\,(x) = \frac{g+j}{k}\left(mx + \frac{1}{2}\rho x^2\right),$$

где

$$0 \leqslant x \leqslant l,$$

и попрежнему l обозначает нормальную длину вертикальной части каната, m массу груза, ρ массу единицы длины каната и k коэффициент пропорциональности в формуле Гука для натяжения T. Вычисляем последнее

$$T = k\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial x} = (g+j)\;(m+\rho x).$$

Наибольшее значение $T_{\max}$ натяжения получается в точке C набегания каната на барабан, где $x = l$. Имеем:

$$T_{\max} = (g+j)\;(m+\rho l).$$

В данном случае можно пренебречь массой каната при условии, что отношение $\frac{\rho l}{m}$ массы каната к массе груза мало. Однако было бы необоснованным распространять последнее утверждение на все случаи движения, даже ограничиваясь малыми высотами подъема.

Замечание 2. Решая в § 2 задачу о движении каната с грузом на нижнем конце, когда верхнему концу сообщается скорость, мы приняли за неизвестную функцию деформацию $u\,(x,t)$ каната в произвольной его точке. Можно было бы поступить иначе, например, характеризовать движение каната абсциссой X, $X \equiv X\,(x,t)$, произвольной его точки[1]. Функции X и $u\,(x,t)$ связаны соотношением

$$X = s\,(t) + x + u\,(x,t),$$

где $s\,(t)$ обозначает перемещение верхнего конца каната.

Натяжение T будет найдено по формуле

$$T = k\left(\frac{\partial X}{\partial x} - 1\right).$$

Дифференциальное уравнение в частных производных, определяющее функцию X, представляется в виде

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = g + c^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.$$

Начальные условия таковы:

$$X\Big|_{t=0} = F_1\,(x), \qquad \frac{\partial X}{\partial t}\Big|_{t=0} = F_2\,(x),$$

где

$$0 \leqslant x \leqslant l.$$

[1] Phillips, idem.

Первое пограничное условие, относящееся к верхнему концу каната, имеет вид

$$X\Big|_{x=0} = s(t).$$

Второе пограничное условие, относящееся к нижнему концу каната, примет форму:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = g + b\left(1 - \frac{\partial X}{\partial x}\Big|_{x=l}\right),$$

где $b = \frac{k}{m}$ и сохранены все предыдущие обозначения.

Наконец, и общий случай поставленной задачи при переменном k можно изучать, введя вместо деформации $u(x,t)$ новую функцию X.

ЛИТЕРАТУРА[1]

1. Адамов А. А., О разложениях произвольной функции одной вещественной переменной в ряды, расположенные по функциям определенного рода, С. П., гл. VII, стр. 161, 1907.
2. Boussinesq, Application des potentiels . . ., p. 655—664, 1885.
3. Clebsch, Théorie de l'élasticité des corps solides (avec des Notes de Saint-Venant), Note finale du § 60, 1883.
4. Динник А. Н., Южный инженер, № 2—3, стр. 27—30 и № 4, стр. 63—67, 1917.
5. Динник А. Н., О работе по теории упругости . . ., Прикладная математика и механика, т. 1, № 2, § 7, стр. 335, 1933.
6. Герасимов А. Н., Проблема упругого последействия и внутреннее трение, Прикладная математика и механика, т. 1, № 4, стр. 493—536, 1938.
7. Герман А. П., Горная механика, ч. 1 (Шахтный подъем), § 21—23, стр. 100—110; ibid., § 52, стр. 274—281, 1935.
8. Гурса, Курс математического анализа, т. III, ч. I, § 457, стр. 9, 1933; ibid., § 463, стр. 24.
9. Horn J., Über eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkürlichen Parameter, Mathematische Annalen, Bd. 52., S. 271—292; ibid., S. 340—362, 1899.
10. Kneser A., Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik, Mathematische Annalen, Bd. 58, S. 81—147, 1904.
11. Крейн М., О разложениях произвольных функций в ряды по фундаментальным функциям краевой задачи, Математический сборник, нов. сер., т. II, № 5, стр. 923—933, 1937.
12. Курант-Гильберт, Методы математической физики, т. 1, гл. V, §§ 3, 14, 1933.
13. Локшин А. С., О динамических напряжениях в подъемных канатах, Горный журнал, № 12 (приложение), 1929.
14. Ляв А., Математическая теория упругости, гл. XX, стр. 445—462, 1935.
15. Мерле Т., Надшахтный копер, стр. 12—13, 1932.
16. Неронов Н. П., О напряжениях в подъемном канате, Прикладная математика и механика, т. III, № 1, стр 31—45, 1936.
    Об упругих деформациях в подъемном канате, ibid., (нов. сер.), т. 1, № 1, стр 91—116, 1937.
    О напряжениях в канате при опускании груза, ibid., т. III, № 3, стр. 125—144, 1939.
    Об упругих деформациях в канате при опускании груза, ibid., т. IV, № 1, стр 103—110, 1940.
    О некоторых вопросах, связанных с определением напряжений в подъемных канатах, ibid., т. IV, № 2, стр. 59—74, 1940.

[1] Список работ ограничивается теми, которые цитируются в настоящем исследовании и предшествующих работах автора.

17. Неронов Н. П., О напряжениях в канате при подъеме груза, Записки Ленинградского Горного института, т. X, № 3, стр. 1—27, 1937.
Об упругих деформациях в канате при опускании груза, ibid., т. XIV, стр. 141—158, 1941.
18. Néronoff N., Sopra un moto verticale.., Bollettino dell' Unione Matematica Italiana, Ser. II, Anno II, № 5 (Giugno — Luglio), 1940—XVIII, p. 420—423;
Sulle vibrazioni elastiche longitudinale.., ibid., p. 424—434.
19. Неронов Н. П. и Яхонтова Н. С., О численном определении напряжений в подъемных канатах (в рукописи).
20. Nielsen N., Handbuch der Theorie der Cylinderfunctionen, § 59, S. 156. 1904.
21. Perry, Love and Richardson, Winding Ropes in Mines, Phil. Mag., Ser. 6, v. 11, p. 107—117, 1906.
22. Phillips, De divers problèmes de mécanique...., Journal de mathématiques pures et appliquées, p. 25—83, 1864.
23. Poisson, Mouvement d'un corps pesant suspendu á l'extrémité d'un fil extensible, Journal de l'Ecole polytechnique, Cah. 18, t. XI, 476—489, 1820.
24. Saint-Venant, Mémoire sur le choc longitudinal de deux barres élastiques.., Journal de mathématiques pures et appliquées, p. 237—376, 1867.
25. Stör, Seilspannungen und—Schwingungen bei Beschleunigungsänderungen des Schachtförderseiles, Österreichische Zeitschrift für Berg-und Hüttenwesen, S. 419, 1909.