Записки Ленинградского ордена Ленина Горного института.
Том XX, 1948 г.

IV. Общий отдел

О движении тяжелой точки по шероховатой винтовой поверхности с вертикальной осью

Проф. *М. И. Акимов*

1. Пусть F_T и F_N будут абсолютные значения касательной и нормальной к поверхности составляющих действующей на точку силы веса. Точка, помещенная на поверхность без начальной скорости, остается при наличии трения в равновесии, если

$$F_T \leqq kF_N,$$

и придет в движение, если

$$F_T > kF_N,$$

где k — коэффициент трения.

Дифференциальные уравнения движения на шероховатой поверхности $f(r, \varphi, z)=0$ точки M веса g в цилиндрических координатах[1] r, φ, z (ось z направлена вертикально вниз)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 &= N\frac{\frac{\partial f}{\partial r}}{\Delta} - k|N|\frac{\frac{dr}{dt}}{v} \\
\frac{1}{r}\frac{d\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} &= N\frac{\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}}{\Delta} - k|N|\frac{r\frac{d\varphi}{dt}}{v} \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= g + N\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta} - k|N|\frac{\frac{dz}{dt}}{v},
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где $\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$ и N нормальная реакция, в случае движения из состояния покоя непосредственно не позволяют заключить о форме соответствующего интеграла их, так как в начальный момент скорость v точки обращается в нуль.

[1] Прикладная математика и механика, т. I, вып. 1, стр. 56, 1933.

Леви-Чивита[1] преобразует уравнения (1) к виду

$$\frac{dq_1}{dt} = v\,\frac{\cos\theta}{H_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = v\,\frac{\sin\theta}{H_2}, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= F_T\cos\theta - k\,(F_N - v^2\Gamma), \\ v\,\frac{d\theta}{dt} &= v^2\,(g_1\cos\theta - g_2\sin\theta) - F_T\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где q_1 и q_2 криволинейные координаты точки на поверхности, причем

$$q_1 = \text{const}, \quad q_2 = \text{const}$$

суть взаимно ортогональные кривые на поверхности, первая из которых представляет линию уровня, а вторая кривую наибольшего ската; θ есть угол между вектором скорости и касательной к кривой наибольшего ската в сторону возрастания q_1. Вводим обозначение [2]:

$$\Gamma = \frac{b_{11}}{H_1^2}\cos^2\theta + 2\,\frac{b_{12}}{H_1H_2}\cos\theta\cdot\sin\theta + \frac{b_{22}}{H_2^2}\sin^2\theta.$$

Здесь H_1, H_2, b_{11}, b_{12}, b_{22} суть коэффициенты выражений

$$v^2 = H_1^2\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + H_2^2\left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{1}{\Delta}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\,d^2x - \frac{\partial z}{\partial y}\,d^2y + d^2z\right) = b_{11}dq_1^2 + 2b_{12}dq_1dq_2 + b_{22}dq_2^2,$$

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

а g_1, g_2 соответственно равны [3]

$$g_1 = -\frac{1}{H_1H_2}\,\frac{dH_1}{dq_2},$$

$$g_2 = -\frac{1}{H_1H_2}\,\frac{dH_2}{dq_1}.$$

Уравнения (3) представляют результат исключения нормальной к поверхности реакции N из трех уравнений движения точки M[4]

$$\frac{dv}{dt} = F_T\cos\theta - k|N|, \quad \frac{v^2}{\rho_g} = F_T\sin\theta, \quad \frac{v^2}{\rho_N} = F_N + N$$

в проекциях на касательную к траектории, на нормаль к ней в касательной плоскости (ρ_g — радиус геодезической кривизны) и на нор-

[1] Archiv der Mathematik und Physik, 3-te Reihe, Bd. 5, S. 28, 1903.

[2] Гурса, Курс математического анализа, т. I, §§ 233—236, 1933.

[3] Гурса, Курс математического анализа, т. I, § 250 (формулы Гаусса), 1933. См. также русский перевод сочинения Гаусса „Общие исследования о кривых поверхностях" в книге „Об основаниях геометрии", изданной физико-математическим обществом в Казани в 1895 г.

[4] Аппель, Руководство теоретической механики, т. I, § 269, 1911.

маль к поверхности в рассматриваемом положении точки $M\left(\rho_N=\frac{1}{\Gamma}\right.$ радиус кривизны нормального сечения поверхности, проведенного через вектор скорости точки M).

2. В случае движения тяжелой точки по шероховатой винтовой поверхности

$$z=a\varphi+f(r) \tag{4}$$

уравнение линии уровня $q_1=\text{const}$ будет

$$a\varphi+f(r)=\text{const}. \tag{5}$$

Так как тангенс угла с радиусом-вектором касательной к этой линии в точке M равен

$$\frac{\frac{dr}{d\varphi}}{r}=-\frac{a}{f'(r)}\frac{1}{r},$$

то дифференциальное уравнение горизонтальной проекции, ортогональной к линии уровня кривой наибольшего ската на поверхности (4) будет

$$\frac{dr}{f'(r)\cdot r^2}=\frac{d\varphi}{a}.$$

Отсюда

$$-a\int\frac{dr}{f'(r)\cdot r^2}+\varphi=\text{const}. \tag{6}$$

Следовательно,

$$a\varphi+f(r)=q_1, \tag{7}$$

$$\varphi-\int\frac{dr}{f'(r)\cdot r^2}=q_2. \tag{8}$$

Так как на основании (7) и (8)

$$ad\varphi+f'(r)\,dr=dq_1,$$

$$d\varphi-\frac{a}{f'(r)\cdot r^2}\,dr=dq_2,$$

откуда

$$dr=\frac{f'(r)\cdot r^2}{a^2+f'^2(r)\cdot r^2}\cdot(dq_1-adq_2), \tag{9}$$

$$d\varphi=\frac{1}{a^2+f'^2(r)\cdot r^2}f'^2(r)\,(r^2dq_2+adq_1). \tag{10}$$

Кроме того

$$dz=dq_1.$$

Поэтому

$$ds^2=dr^2+r^2d\varphi^2+dz^2=\frac{a^2+r^2+f'^2(r)\,r^2}{a^2+f'^2(r)\cdot r^2}\,dq_1^2+\frac{f'^2(r)\cdot r^4}{a^2+f'^2(r)\cdot r^2}\,dq_2^2.$$

Следовательно,

$$H_1 = \sqrt{\frac{a^2 + r^2 + f'^2(r) \cdot r^2}{a^2 + f'^2(r) \cdot r^2}},$$

$$H_2 = \frac{f'(r) \cdot r^2}{\sqrt{a^2 + f'^2(r) \cdot r^2}}.$$

Далее

$$g_1 = \frac{1}{H_1^2 H_2} \frac{af'(r) \cdot r^3 [a^2 - f'(r) f''(r) \cdot r^3]}{[a^2 + f'^2(r) \cdot r^2]^3},$$

$$g_2 = -\frac{1}{H_1 H_2^2} \frac{r^5 f'^2(r) [2a^2 f'(r) + f'^3(r) \cdot r^2 + a^2 f''(r) \cdot r]}{[a^2 + f'^2(r) \cdot r^2]^3}$$

Так как

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{\cos\varphi}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi;$$

$$\frac{dz}{\partial x} = -a\frac{\sin\varphi}{r} + f'(r)\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a\frac{\cos\varphi}{r} + f'(r)\sin\varphi$$

и

$$dx = dr \cdot \cos\varphi - r\sin\varphi \cdot d\varphi,$$

$$dy = dr \cdot \sin\varphi + r\cos\varphi \cdot d\varphi,$$

$$dz = ad\varphi + f'(r)\,dr,$$

$$d^2x = -2\sin\varphi\, drd\varphi - r\cos\varphi\, d\varphi^2,$$

$$d^2y = 2\cos\varphi\, drd\varphi - r\sin\varphi\, d\varphi^2,$$

$$d^2z = f''(r)\,dr^2,$$

то

$$-\frac{\partial z}{\partial x} d^2x - \frac{\partial z}{\partial y} d^2y + d^2z = f''(r)\,dr^2 - 2\frac{a}{r} drd\varphi + rf'(r)d\varphi^2$$

и на основании равенств (9) и (10)

$$b_{11} = \frac{f'(r) \cdot r[f'(r) f''(r) \cdot r^3 - a^2]}{[a^2 + f'^2(r) \cdot r^2]^2 \cdot \Delta},$$

$$b_{12} = \frac{f'(r) \cdot ra - [f''(r) f''(r) \cdot r^3 + a^2]}{[a^2 + f'^2(r) \cdot r^2]^2 \cdot \Delta},$$

$$b_{22} = f'^2(r) \cdot r^3 \left\{\frac{[f''(r) \cdot r + 2f'(r)]\, a^2 + f'^3(r) \cdot r^2]}{[a^2 + f'^2(r) \cdot r^2]^2 \cdot \Delta}\right\}.$$

Пользуясь равенством (9), из уравнений (2) выводим следующее

$$\frac{dr}{dt} = \frac{f'(r) \cdot r^2}{a^2 + f'^2(r) \cdot r^2} v \left(\frac{\cos\theta}{H_1} - \frac{a\sin\theta}{H_2}\right). \qquad (11)$$

Таким образом, для определения трех переменных r, v, θ, характеризующих рассматриваемое движение точки M, имеем систему третьего порядка, состоящую из трех уравнений (11), (3).

3. Согласно теореме о существовании интегралов системы дифференциальных уравнений, можно найти решения уравнений (11), (3) (способом последовательных приближений или в виде рядов по степеням соответствующего приращения независимого переменного) в окрестности любой системы значений r, v, θ, не представляющей особенной точки уравнений (11) и (3)[1].

Особенными точками уравнений (11) и (3) будут значения r, v, θ, удовлетворяющие равенствам

$$v\left(\frac{\cos\theta}{H_1} - \frac{a\sin\theta}{H_2}\right) = 0,$$

$$F_T\cos\theta - k(F_N - v^2\Gamma) = 0,$$

$$v^2(g_1\cos\theta - g_2\sin\theta) + F_T\sin\theta = 0,$$

$$F_T = g\frac{\sqrt{\Delta^2-1}}{\Delta}, \quad F_N = g\frac{1}{\Delta}, \quad \Delta^2 = 1 + \frac{a^2}{r^2} + f'^2(r),$$

или

$$v = 0, \quad v^2(g_1\cos\theta - g_2\sin\theta) + F_T\sin\theta = 0.$$

Таким образом, имеем два случая. В первом

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{H_2}{H_1}\frac{1}{a},$$

$$v^2 = -grf'(r)$$

и $r = r_1$ определяется из уравнения

$$\frac{a}{r} - k\sqrt{1 + \frac{r^2}{r^2+a^2}f'^2(r)} = 0,$$

или[2]

$$\theta = 0, \quad v = 0.$$

В первом случае движение, близкое к установившемуся движению по винтовой линии $r = r_1$, на косой винтовой поверхности было исследовано Н. П. Нероновым[3], а на других винтовых поверхностях мною[4] и В. А. Егуновым[5].

---

[1] Пользуясь указанием Пуанкаре (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4 série, t. 2, p. 168 — 177, 1886) можно составить в этом случае для r, v, θ ряды, сходящиеся для сколь угодного большого промежутка изменения независимого переменного.

[2] Если $\theta = \pi$, $v = 0$, то точка останавливается на поверхности и дальнейшее состояние ее определяется как во втором случае.

[3] Записки Ленинградского Горного института, т. 10, вып. 1, стр. 31, 1935.

[4] Там же, стр. 1, а также т. 12, вып. 3, стр. 1, 1939.

[5] Там же, стр. 23.

Во втором случае движущаяся по шероховатой поверхности (4) тяжелая точка при выполнении условия

$$F_T - kF_N < 0,$$

то есть

$$\frac{a}{r_2^2} + f'^2(r_2) < k^2,$$

останавливается в положении равновесия на винтовой линии $r = r_2$ или, при выполнении условия

$$\frac{a}{r_3} + f'^2(r_3) = k^2,$$

может неограниченно приближаться к положению равновесия на винтовой линии $r = r_3$. При выполнении условия

$$\frac{a^2}{r_0^2} + f'^2(r_0) > k^2,$$

точка, заняв в состоянии покоя положение $r = r_0$ на поверхности (4), выйдет затем из этого положения.

4. Имея в виду исследовать движение тяжелой точки на шероховатой винтовой поверхности с вертикальной осью из состояния покоя ($r = r_0$, $v = 0$, $\theta = 0$), исключим из уравнений (11) и (3) dt. Получим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dv} &= \frac{f(r) \cdot r^2 \cdot v}{(a^2 + f'^2(r) \cdot r^2) H_1 H_2} \cdot \frac{H_2 \cos\theta - H_1 a \sin\theta}{F_T \cos\theta - k(F_N - v^2\Gamma)}, \\ v\frac{d\theta}{dv} &= -\frac{v^2(g_1 \cos\theta - g_2 \sin\theta) + F_T \sin\theta}{F_T \cos\theta - k(F_N - v^2\Gamma)}, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

где правые части суть голоморфные функции аргументов r, v, θ в окрестности значений $r = r_0$, $v = 0$, $\theta = 0$, так как в знаменателе для этой системы значений $F_T - kF_N$ по предположению не обращается в нуль.

Ищем интегралы этой системы[1] в виде голоморфных рядов для r и θ

$$\begin{aligned} r &= r_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \dots, \\ \theta &= \quad b_1 v + b_2 v^2 + \dots, \end{aligned}$$

обращающихся соответственно в r_0 и 0 при $v = 0$.

Вводя в уравнениях (12) вместо r, θ новые переменные ξ, η при помощи подстановки

$$\begin{aligned} r &= r_0 + \xi v, \\ \theta &= \quad \eta v, \end{aligned}$$

[1] Леви-Чивита, цитированная работа, стр. 34.

получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} v\frac{d\xi}{dv}+\xi &= v\Xi, \\ v\frac{d\eta}{dv}+(c+1)\eta &= vH, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

где Ξ, H голоморфные функции аргументов ξ, η, v, а c есть значение $\frac{F_T}{F_T - kF_N}$ при $r = r_0$.

Надлежит искать теперь решение системы (13) в виде голоморфных рядов [1]

$$\xi = a_2 v + a_4 v^3 + \ldots,$$
$$\eta = b_2 v + b_4 v^3 + \ldots,$$

принимающих значение 0 при $v = 0$.

5. Рассмотрим численный пример движения из состояния покоя тяжелой точки по шероховатой косой винтовой поверхности

$$z = a\varphi + br$$

с вертикальной осью.

Положим [2]:

$$f(r) = br, \quad b = -\operatorname{tg}\beta, \quad a = r_0 \operatorname{tg}\alpha, \quad k = \operatorname{tg}\varphi,$$
$$r_0 = 0{,}25 \text{ м}, \quad \alpha = 25°, \quad \beta = 20°, \quad \varphi = 20°.$$

Производя вычисления [3], находим:

$$a_2 = -0{,}1377, \qquad a_4 = 0{,}0941, \ldots$$
$$b_2 = -0{,}1641, \qquad b_4 = -0{,}1078\ldots$$

Ввиду медленной сходимости полученных рядов, для определения траектории рассматриваемого движения точки из состояния покоя целесообразно применить здесь один из приближенных методов интегрирования уравнений (13), например метод Е. В. Бабанского [4].

---

[1] Пикар, Traité d'analyse, t. 3, p. 22, Paris, 1896.

[2] Л. Б. Левенсон, Спиральный сепаратор, стр. 53, Ленинград, 1925.

[3] Вычисления выполнены погибшим в Арктике научным работником Ленинградского Астрономического института В. В. Нумеровой.

[4] Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков по методу итерации, Труды Института точной механики и оптики, т. 1, вып. 4.

Замечание. Вместо переменных r, θ, v, рассматриваемых в этой работе, и системы уравнений (12) можно взять переменные r, r', v и систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r', \\ \frac{dr'}{dt} &= \frac{gf'(r) + \dfrac{v^2 - [1 + f'^2(r)]\, r'^2}{r}}{\Delta^2} - k|N|\frac{r'}{v}, \ (*)^1 \\ \frac{dv}{dt} &= F_T \cos\theta\, k|N|, \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

где

$$N = \frac{1}{\Delta}\left[g + r\varphi'^2 - 2\frac{a}{r}r'\varphi' + f''(r)\, r'^2\right],$$

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{-af'^2(r)\, r' + \sqrt{v^2(r^2+a^2) - [r^2 + a^2 + r'f'^2(r)]\, r'^2}}{r^2 + a^2},$$

$$r^2\Delta^2 = r^2 + a^2 + r^2 f'^2(r)$$

и

$$F_T \cos\theta = g\frac{\dfrac{dz}{dt}}{v} = -g\frac{a\varphi' + f'(r)\cdot r'}{v}.$$

Положим

$$r' = v(a' + \xi'),$$

причем

$$\text{пред}\,\xi' = \text{пред}\, r' = \text{пред}\, v = 0$$

и

$$\text{пред}\frac{r'}{v} = a' = \frac{f'(r_0)\cdot r_0^2}{\sqrt{(r_0^2 + a^2 + r_0^2 f'^2(r_0))\,(a^2 + r_0^2 f'^2(r_0)}}$$

при $t \to 0$.

Тогда из системы (14), исключая еще dt, получим систему дифференциальных уравнений, связывающую r, r' и v, из которой, как в § 4, определяем ξ' (а также r') и r в виде голоморфных рядов по степеням v.

Имеются и другие варианты решения рассматриваемой задачи, если взять за независимое переменное вместо v, например, φ'. Также можно воспользоваться (как и при решении других задач о движении материальной точки по винтовой поверхности) вместо координатных

[1] Уравнение (*) есть преобразованное уравнение (20) одной из предыдущих работ автора (Записки Ленинградского Горного института, т. 10, вып. 1, стр. 12, 1935). Система (14) получается также из системы уравнений (3) и (11) путем исключения из последней θ, $\sin\theta$ и $\cos\theta$ на основании уравнения (11).

линий $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ координатными линиями на винтовой поверхности: системой винтовых линий $u = \text{const}$ ($r = \text{const}$) с осью Oz и ортогональной к ней системой геодезических линий $w = \text{const}$, в которых линейный элемент поверхности выражается особенно просто:

$$ds^2 = \frac{r^2 + a^2 + r^2 f'^2(r)}{r^2 + a^2}\, dr^2 + (r^2 + a^2)\left[d\varphi + \frac{af'(r)}{r^2 + a^2}\, dr\right]^2 = \\ = du^2 + (r^2 + a^2)\, dw^2,$$

но мы не можем входить сейчас в рассмотрение этих вопросов.