Записки Ленинградского ордена Ленина Горного института.
Том XX, 1948 г.

III. Металлургия и обогащение

Седиментационный анализ при закономерной гранулометрической характеристике

Проф. *С. Е. Андреев*

Седиментационные весы отличаются более высокой чувствительностью по сравнению с другими приборами седиментационного анализа[1], а если откинуть излишне-сложную автоматизацию, то за ними остается и простота устройства. Однако трудность надлежащей расшифровки, получаемой при анализе диаграммы, уменьшает эти преимущества. Графическое решение задачи определения выходов отдельных фракций путем проведения касательных к кривой осаждения дает цифры только приблизительные и недостаточно надежные.

Но если анализируемый материал обладает определенной закономерностью в распределении зерен по крупности, то задача установления гранулометрической характеристики решается аналитически, более точно и сравнительно просто. Многочисленными исследованиями с несомненностью установлено наличие такой закономерности в продуктах измельчения гомогенных (мономинеральных) пород.

Весовое распределение зерен по фракциям (классам) крупности при геометрически-прогрессивной шкале классификации определяется уравнением [2]

$$y = Cx^k, \qquad (1)$$

где y — выход класса плюс x; x — диаметр минимальных зерен класса; C и k — постоянные параметры.

Нетрудно доказать, что если справедливо уравнение (1), то будет справедливо и уравнение кумулятивной характеристики:

$$y = Ax^k. \qquad (2)$$

Здесь y — кумулятивный выход зерен мельче x; A — коэффициент, определяемый крупностью исследуемого материала; k — параметр, опре-

[1] Н. А. Фигуровский, Современные методы седиментометрического анализа суспензий и эмульсий, М., 1939.

[2] A. W. Gaudin, Investigation of Crushing Phenomena, Trans. Am. Inst. Mining. Met. Enges, vol. LXXIII, 1926.

деляющий направление и степень изогнутости кривой, то есть указывающий на преобладание крупных или мелких зерен.

Если W — вес исследуемой навески; x_n — диаметр максимальных зерен, то по (2)

$$A = \frac{W}{x_m^k}. \tag{3}$$

Обычно y определяется в процентах, и в этом случае

$$A = \frac{100}{x_m^k}.$$

Уравнение (2) выведено в предположении, что минимальные зерна измельченного материала обладают нулевым диаметром.

Для определения коэффициента A, как видно из (3), необходимо знать величину диаметра максимальных зерен, то есть величину, которая обыкновенно известна, так как в седиментационный анализ поступает материал, прошедший сквозь сито определенного калибра. За x_m можно также принять величину эквивалентного диаметра максимального зерна. Следовательно, для установления вида характеристики необходимо только определить величину показателя k.

При осаждении суспензированного материала на тарелку весов, изменение веса осадка во времени происходит по двум различным законам, в зависимости от двух периодов осаждения.

Первый период длится от начала операции до момента t_m, когда зерна максимального диаметра x_m, находившиеся на поверхности суспензии, достигнут тарелки весов, т. е. пройдут всю высоту H столба суспензии над тарелкой.

Второй период длится от $t = t_m$ до конца операции (теоретически до $t = \infty$).

По закону Стокса скорость падения зерна в жидкости определяется формулою

$$v = ax^2, \tag{4}$$

где x — диаметр зерна; a — постоянная величина.

За какой-либо промежуток времени t, считая от начала осаждения, зерна диаметра x опустятся по вертикали на величину

$$h = vt,$$

или по (4)

$$h = ax^2t.$$

Имеем также

$$H = ax_m^2t_m.$$

Откуда

$$\frac{h}{H} = \frac{t}{t_m}\left(\frac{x}{x_m}\right)^2. \tag{5}$$

Если вес анализируемой навески равен W, то кумулятивный весовой выход w зерен мельче x будет по (3)

$$w = \frac{W}{x_m^k}\, x^k. \tag{6}$$

Мы можем мыслить x как средний диаметр элементарного, бесконечно-малого по весу, класса крупностью от $x-\frac{dx}{2}$ до $x+\frac{dx}{2}$.

Дифференцируя уравнение (6), получаем весовой выход зерен такого элементарного класса

$$dw=\frac{W}{x_m^k}\,kx^{k-1}dx. \tag{7}$$

К моменту t от начала операции в каждом элементарном классе останется зерен (по весу)

$$dQ=dw-\frac{h}{H}\,dw,$$

или, заменяя $\frac{h}{H}$ и dw по (5) и (7),

$$dQ=\frac{W}{x_m^k}\,kx^{k-1}dx-\frac{W}{x_m^{k+2}}\,k\,\frac{t}{t_m}\,x^{k+1}dx. \tag{8}$$

Вес твердого Q_t, оставшегося еще в суспензии в течение первого периода осаждения к моменту $t<t_m$, найдем, интегрируя уравнение (8) в пределах от 0 до x_m.

$$Q_t=\frac{W}{x_m^k}\,k\int_0^{x_m}x^{k-1}dx-\frac{W}{x_m^{k+2}}\,k\,\frac{t}{t_m}\int_0^{x_m}x^{k+1}dx.$$

Откуда

$$Q_t=W\left(1-\frac{k}{k+2}\,\frac{t}{t_m}\right). \tag{9}$$

Вес осадка W_t в момент $t<t_m$ равен

$$W_t=W-Q_t,$$

или

$$W_t=W\frac{k}{k+2}\,\frac{t}{t_m}. \tag{10}$$

Следовательно, осаждение в течение первого периода, то есть при $t<t_m$, идет по линейному закону, что вполне согласуется с теорией седиментации. Графически закон осаждения на этом участке времени от $t=0$ до $t=t_m$ изобразится прямой линией, проходящей через начало координат под углом α к оси абсцисс, причем

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{k}{k+2}\,\frac{W}{t_m}. \tag{11}$$

В момент $t=t_m$ вес осадка W_m равен

$$W_m=\frac{k}{k+2}W. \tag{12}$$

Вес твердого Q_t в суспензии в момент $t>t_m$, то есть в течение второго периода осаждения, определим, интегрируя уравнение (8)

в пределах от 0 до x_t, причем величину x_t для каждого момента t найдем из соотношения

$$ax_t^2 t = ax_m^2 t_m = H. \tag{13}$$

Здесь x_t — диаметр максимального зерна из всех зерен, еще оставшихся в суспензии к моменту $t > t_m$. Из (13) имеем:

$$x_t = \left(\frac{t_m}{t}\right)^{1/2} x_m. \tag{14}$$

Интегрируя уравнение (8) в указанных пределах, получаем:

$$Q_t = \frac{W}{x_m^k} k \int_0^{x_t} x^{k-1} dx - \frac{W}{x_m^{k+2}} k \frac{t}{t_m} \int_0^{x_t} x^{k+1} dx,$$

или

$$Q_t = \frac{W}{x_m^k} x_t^k - \frac{W}{x_m^{k+2}} \frac{k}{k+2} \frac{t}{t_m} x_t^{k+2}.$$

Заменив x_t его значением по (14), находим, что вес остатка твердого в суспензии в момент $t > t_m$ равен

$$Q_t = W \frac{2}{k+2} \left(\frac{t_m}{t}\right)^{k/2}. \tag{15}$$

Вес осадка твердого в момент $t > t_m$

$$W_t = W\left[1 - \frac{2}{k+2}\left(\frac{t_m}{t}\right)^{k/2}\right]. \tag{16}$$

Графически закон осаждения за время второго периода, т. е. от $t = t_m$ до $t = \infty$, изобразится кривой по уравнению (16).

По формуле (16) определяем вес осадка W_m в момент $t = t_m$

$$W_m = \frac{k}{k+2} W,$$

то есть снова получили формулу (12).

Взяв производную по t от правой части уравнения (16), найдем величину углового коэффициента касательной к кривой осаждения в точке (t, W_t).

$$\frac{dW_t}{dt} = W \frac{k}{k+2} \frac{t_m^{k/2}}{t^{k/2+1}}.$$

При $t = t_m$

$$\frac{dW_t}{dt} = \frac{k}{k+2} \frac{W}{t_m},$$

или по (11)

$$\frac{dW_t}{at} = \operatorname{tg} \alpha,$$

то есть касательная в точке $t = t_m$ совпадает с прямолинейным участком кривой осаждения.

Величина отрезка b, отсекаемого касательной на оси ординат, равна

$$b = W_t - W\frac{k}{k+2}\left(\frac{t_m}{t}\right)^{k/2},$$

или, заменяя W_t по (16),

$$b = W\left[1 - \left(\frac{t_m}{t}\right)^{k/2}\right]. \tag{17}$$

По (14) имеем

$$b = W\left[1 - \left(\frac{x_t}{x_m}\right)^{k}\right]. \tag{18}$$

Отсюда следует, что отрезок b действительно определяет кумулятивный выход зерен плюс x_t, как это и требуется теорией седиментации. Здесь x_t — диаметр зерна, время осаждения которого на полную глубину H равно t. Из (17) получаем, что касательная в точке $t = t_m$ проходит через начало координат ($b = 0$).

Таким образом выведенные нами уравнения (10) и (16) выражают кривую осаждения, обладающую основными свойствами кривых такого рода.

Величину показателя k легко можно определить по формуле (12). Однако первый период осаждения длится недолго и притом при осаждении более крупных зерен изменение веса осадка происходит настолько быстро, что сделать точные замеры затруднительно. Поэтому величину k надежнее определять по весу осадка в течение второго периода, то есть при $t > t_m$:

Логарифмируя уравнение (15), получаем:

$$\lg Q_t = -\frac{k}{2}\lg t + \lg\left(W\frac{2}{K+2}t_m^{k/2}\right). \tag{19}$$

Уравнение (19) в логарифмических координатах ($\lg t$, $\lg Q_t$) выражает прямую с угловым коэффициентом равным $-k/2$.

Если остатки твердого в суспензии в моменты t_2 и t_1 соответственно равны Q_1 и Q_2, то по известному соотношению имеем:

$$-\frac{k}{2} = \frac{\lg Q_2 - \lg Q_1}{\lg t_2 - \lg t_1},$$

откуда

$$k = 2\frac{\lg Q_1 - \lg Q_2}{\lg t_2 - \lg t_1}. \tag{20}$$

Следовательно, чтобы определить величину показателя k, достаточно сделать за время второго периода осаждения два определения веса осадка W_1 и W_2 в моменты t_1 и t_2. По известным величинам W_1 и W_2 находим Q_1 и Q_2 и по формуле (20) вычисляем k.

Прямолинейный характер графика $\lg Q_t = f(\lg t)$ будет свидетельствовать о закономерности гранулометрического состава анализируемого материала, определяемой уравнением (2).

Из (15) получаем:

$$\lg t_m = \lg t + \frac{2}{k} \lg\left(\frac{k+2}{2} \frac{Q_t}{W}\right). \tag{21}$$

Зная t_m по формуле Стокса, можно вычислить величину x_m эквивалентного диаметра максимального зерна.

Из (17) получаем уравнение кумулятивной характеристики по минус x, как функцию времени осаждения.

$$y = W\left(\frac{t_m}{t}\right)^{k/2}. \tag{22}$$

Заменив $\left(\frac{t_m}{t}\right)^{k/2}$ согласно (16), получаем формулу

$$y = \frac{k+2}{2}(W - W_t), \tag{23}$$

по которой можно определять кумулятивные выходы по весу осадка.

Выход класса, ограниченного диаметрами x_1 и x_2 зерен, время осаждения которых соответствует t_1 и t_2, вычисляется по формуле

$$W_{1,2} = \frac{k+2}{2}(W_2 - W_1). \tag{23 bis}$$

В некоторых случаях вся кривая характеристики делится на два участка разной кривизны: первый (начиная от x_m) определяется кривой по уравнению $y = A_1 x^{k_1}$ и второй — кривой по уравнению $y = A_2 x^{k_2}$.

Обозначим диаметр „критического", пограничного между обеими кривыми, зерна через $x_{кр}$ и время его осаждения через $t_{кр}$.

Все время осаждения материала с такой „бимодальной" характеристикой можно разбить на три периода, соответственно изменению побега кривой осаждения.

Первый период от $t = 0$ до $t = t_m$ — прямая.
Второй период от $t = t_m$ до $t = t_{кр}$ — кривая.
Третий период от $t = t_{кр}$ до $t = \infty$ — кривая.

Рассуждая подобно вышеприведенному, получаем следующие формулы для определения веса осадка в разные моменты осаждения.

Первый период — $t < t_m$

$$W_I = W\left[\frac{k_1}{k_1+2} - \left(\frac{k_1}{k_1+2} - \frac{k_2}{k_2+2}\right)\left(\frac{t_m}{t_{кр}}\right)^{\frac{k_1+2}{2}}\right]\frac{t}{t_m}. \tag{24}$$

Второй период — $t_m < t < t_{кр}$

$$W_{II} = W\left[1 - \frac{2}{k_1+2}\left(\frac{t_m}{t}\right)^{\frac{k_1}{2}} - \left(\frac{k_1}{k_1+2} - \frac{k_2}{k_2+2}\right)\left(\frac{t_m}{t_{кр}}\right)^{\frac{k_1}{2}} \frac{t}{t_{кр}}\right]. \tag{25}$$

Третий период — $t > t_{кр}$

$$W_{III} = W\left[1 - \frac{2}{k_2+2}\left(\frac{t_m}{t_{кр}}\right)^{\frac{k_1}{2}}\left(\frac{t_{кр}}{t}\right)^{\frac{k_2}{2}}\right]. \quad (26)$$

Для определений при манометрическом методе анализа на аппарате Бигнера получаются аналогичные формулы. Если обозначим W — вес твердого в пробе; V — объем суспензии; δ — удельный вес твердого, то весовая плотность суспензии Δ в начальный момент определится соотношением:

$$\Delta = 1 + \frac{W}{V}\left(1 - \frac{1}{\delta}\right).$$

Для данных условий опыта

$$\frac{W}{V}\left(1 - \frac{1}{\delta}\right) = C = \text{const}.$$

Следовательно,

$$\Delta = 1 + C$$

и

$$C = \Delta - 1. \quad (27)$$

Плотность суспензии φ_t в любой момент t равна

$$\varphi_t = 1 + \frac{Q_t}{V}\left(1 - \frac{1}{\delta}\right),$$

где Q_t — вес остатка твердого в момент t.

Или

$$\varphi_t = 1 + C_t,$$

где

$$C_t = \frac{Q_t}{V}\left(1 - \frac{1}{\delta}\right).$$

Очевидно, что

$$C_t = C\frac{Q_t}{W}.$$

Откуда

$$\varphi_t = 1 + C\frac{Q_t}{W},$$

или по (27)

$$\varphi_t = 1 + (\Delta - 1)\frac{Q_t}{W}. \quad (28)$$

Гидростатическое давление P_t столба суспензии высотою H в момент t на квадратную единицу равно

$$P_t = H\varphi_t,$$

или по (28)

$$P_t = H\left[1 + (\Delta - 1)\frac{Q_t}{W}\right]. \quad (29)$$

Избыток гидростатического давления суспензии P_t над давлением столба воды той же высоты H равен по (29)

$$P_t = H(\Delta - 1)\frac{Q_t}{W}.$$

Здесь $H(\Delta - 1)$ — избыток гидростатического давления в начальный момент осаждения.

В течение первого периода осаждения, то есть пока $t < t_m$, вес Q_t твердого в суспензии по (9) равен

$$Q_t = W\left(1 - \frac{k}{k+2}\frac{t}{t_m}\right).$$

Следовательно, при $t < t_m$

$$P_t = H(\Delta - 1)\left(1 - \frac{k}{k+2}\frac{t}{t_m}\right). \qquad (30)$$

В течение второго периода, когда $t > t_m$ и по (15)

$$Q_t = W\frac{2}{k+2}\left(\frac{t_m}{t}\right)^{k/2},$$

избыток гидростатического давления определится по формуле

$$P_t = H(\Delta - 1)\frac{2}{k+2}\left(\frac{t_m}{t}\right)^{k/2}. \qquad (31)$$

Логарифмируя (31), получаем:

$$\lg P_t = -\frac{k}{2}\lg t + \lg\left[H(\Delta - 1)\frac{2}{k+2}t_m^{k/2}\right]. \qquad (32)$$

Откуда

$$k = 2\frac{\lg P_1 - \lg P_2}{\lg t_2 - \lg t_1}. \qquad (33)$$

Следовательно, величину показателя k можно определить по двум замерам избытка гидростатического давления суспензии P_1 и P_2 в течение второго периода осаждения в моменты t_1 и t_2 соответственно.

Из (32) получаем

$$\lg t_m = \lg t + \frac{2}{k}\lg\left[\frac{k+2}{2}\frac{P_t}{H(\Delta - 1)}\right]. \qquad (34)$$

При равномерной плотности весового распределения зерен, то есть при прямолинейной характеристике гранулометрического состава, когда $k = 1$, формулы (30) и (31) принимают вид для первого периода осаждения

$$P_t = H(\Delta - 1)\left(1 - \frac{1}{3}\frac{t}{t_m}\right), \qquad (35)$$

для второго периода

$$P_t = H(\Delta - 1)\frac{2}{3}\sqrt{\frac{t_m}{t}}. \qquad (36)$$

Формулы (35) и (36) были получены К. А. Путиловым[1] другим путем.

Заменяя в формулах (24), (25) и (26) вес W через $H(\Delta - 1)$, мы получим формулы для определения падения гидростатического давления суспензии к моменту t при манометрическом анализе материала „бимодальной" характеристикой.

При закономерной характеристике, подчиненной уравнению (2), упрощается также процедура ареометрического[2] и фотоэлектрического[3] анализов. Вместо обычного определения выходов отдельных фракций можно непосредственно определить величину показателя k по следующим формулам, вывод которых не представляет затруднений.

При ареометрическом анализе:

$$k = 2\frac{\lg(\varphi_1 - 1) - \lg(\varphi_2 - 1)}{(\lg t_2 - \lg t_1) - (\lg h_2 - \lg h_1)}, \qquad (37)$$

где φ_1 и φ_2 — замеры плотности по ареометру в моменты t_1 и t_2, h_1 и h_2 — глубина элементарного слоя с плотностью φ_1 и φ_2 (определяется по таблице тарирования).

При работе с турбидиметром (при $k > 1$):

$$k = 2\frac{\lg(\lg I_0 - \lg I_1) - \lg(\lg I_0 - \lg I_2)}{\lg t_2 - \lg t_1} + 1. \qquad (38)$$

Здесь I_0 — интенсивность света (в микроамперах), прошедшего сквозь дисперсионную среду; I_1 и I_2 интенсивность света, прошедшего сквозь испытуемую суспензию в моменты t_1 и t_2.

При выводе формул для определения величины показателя k мы исходили из упрощенного уравнения (2)

$$y = Ax^k.$$

В действительности уравнение кумулятивной характеристики должно иметь вид:

$$y = A(x^k - x_0^k),$$

где x_0 означает диаметр минимальных зерен.

Так как величина x_0 („предел дробимости") достаточно мала равнительно с величиной x_m, то без существенной ошибки для получаемых результатов ею можно было пренебречь.

---

[1] К. А Путилов, Методы анализа седиментометрических кривых при оценке степени дисперсности суспензий, Журнал Технической Физики, том II, вып. 7–8, стр. 766, 1932.

[2] В. В. Зверевич, Ареометрический метод определения гранулометрического состава тонкоизмельченных материалов, ОБ ВНТИ Механобр, Л., 1940.

[3] В. В. Зверевич, Фотоэлектрический метод определения гранулометрического состава тонкоизмельченных материалов, ОБ ВНТИ Механобр, 1941.