

Наблюдение по створам с привлечением линий положения

Член-корресп. Академии Наук СССР Н. Г. Кель

Определение ординат (отклонений от линий створа) по существующим инструкциям довольно сложно и недостаточно точно, а поэтому далеко не всегда применяется.

Желательно предложить нечто более рациональное. Линии положения углов близких к 180° или к 0° почти параллельны сторонам этих углов и градиенты их равны арифметической сумме или разности градиентов сторон этих углов. Это позволяет легко пользоваться такими линиями положения при получении ординат створа реперов, выставленных для определения сдвижения поверхности.

Пусть некоторый створ имеет n одинаковых пролетов с двумя конечными реперами A и B и $n - 1$ промежуточными реперами (рис. 1). Пусть длина пролета $= l$ м.

Если стать с теодолитом на 1 репере и измерить угол B_1 , слева по ходу лежащий, между направлениями на начальный репер A и конечный репер B , то градиент линии положения этого угла g_1 будет равен $\frac{206,3}{l}$ "/мм $= g + \frac{1}{n-1} g = \frac{n}{n-1} g$.

$$g_1 = \frac{n}{n-1} g, \quad (1)$$

где $g = \frac{206,3}{l}$ "/мм является градиентом одного пролета (исходным градиентом); l — выражается в метрах; g — в секундах дуги на миллиметр.

Ординаты мы будем считать положительными, если они идут вправо от створа AB . Это произойдет тогда, когда угол B_1 меньше 180° . Поэтому введем угол β как разность.

$$\beta = 180^\circ - B. \quad (2)$$

Если он будет положительный, то и ордината будет положительной. Как известно, поступательное перемещение линии положения угла B_1 или ордината y_1 , точки 1, будет равна $\frac{\beta_1}{g_1}$.

Итак

$$y_1 = \frac{\beta_1}{g_1} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\beta_1}{g} = \frac{n-1}{n} \Delta y_1. \quad (3)$$

Далее станем на репер 2 и измерим угол B_2 между направлениями на репер 1 и конечный репер B . Градиент этого угла g_2 выразится формулой

$$g_2 = g + \frac{1}{n-2} g = \frac{n-1}{n-2} g, \quad (4)$$

$$\beta_2 = 180^\circ - B_2. \quad (5)$$

Для определения ординаты y_2 по отношению к створу AB нужно определить угол $\beta'_2 = 180^\circ - B'_2$, где B'_2 угол, отвечающий тому положению ближайшей задней точки 1, когда ее ордината $y_1 = 0$ (рис. 1).

Как видно из рисунка 1, $B_2 - B'_2 = y_1 g$; $B'_2 = B_2 - y_1 g$;

$$\beta'_2 = 180^\circ - B'_2 = 180^\circ - B_2 + y_1 g = \beta_2 + y_1 g. \quad (6)$$

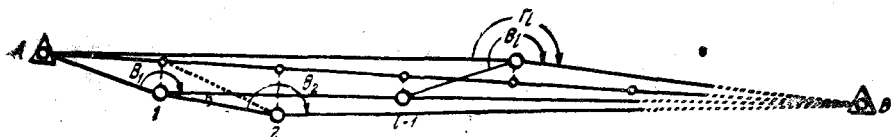


Рис. 1.

В связи с этим

$$y_2 = \frac{\beta'_2}{g_2} = \frac{\beta_2 + y_1 g}{\frac{n-1}{n-2} g} = \frac{n-2}{n-1} (y_1 + \Delta y_2), \quad (7)$$

где

$$\Delta y_2 = \frac{\beta_2}{g}. \quad (8)$$

Затем измеряем угол B_3 на 3 репере между направлениями на 2 репер и на репер B , находим $\beta_3 = 180^\circ - B_3$ и $\Delta y_3 = \frac{\beta_3}{g}$.

Получаем

$$y_3 = \frac{n-3}{n-2} (y_2 + \Delta y_3). \quad (9)$$

и т. д.

$$y_i = \frac{n-i}{n-i+1} (y_{i-1} + \Delta y_i), \quad (10)$$

где

$$\Delta y_i = \frac{\beta_i}{g}; \beta_i = 180^\circ - B_i; i = 1, 2, 3, \dots, n-1.$$

Можно непосредственно на репере i определить ординату y_i , замерив вместо угла B_i угол L_i между направлениями на начальный репер A и конечный B (рис. 1). Градиент угла L_i будет $= g_i + \frac{g}{n-i} = \frac{n}{i(n-i)} g$.

Найдем $\gamma_i = 180^\circ - \Gamma_i$. Тогда получим такое выражение для y_i .

$$y_i = \frac{i(n-i)}{n} \cdot \frac{\gamma_i}{g}. \quad (11)$$

Остается сравнить, какое y_i получается точнее, найденное ли по первому способу с применением формулы (10) или по второму способу с формулой (11). Развернем формулу (10)

$$y_1 = \frac{n-1}{n} \Delta y_1; y_2 = \frac{n-2}{n-1} y_1 + \frac{n-2}{n-1} \Delta y_2 = \frac{n-2}{n} \Delta y_1 + \frac{n-2}{n-1} \Delta y_2,$$

$$y_3 = \frac{n-3}{n-2} y_2 + \frac{n-3}{n-2} \Delta y_3 = \frac{n-3}{n} \Delta y_1 + \frac{n-3}{n-1} \Delta y_2 + \frac{n-3}{n-2} \Delta y_3,$$

и вообще

$$y_i = \frac{n-i}{n} \Delta y_1 + \frac{n-i}{n-1} \Delta y_2 + \frac{n-i}{n-2} \Delta y_3 + \dots + \frac{n-i}{n-i+1} \Delta y_i. \quad (12)$$

Поскольку точность измерения углов B_i или L_i одинакова, постольку ошибки всех $\Delta y_i = \frac{\beta_i}{g}$ и $\frac{\gamma_i}{g}$ одинаковы, и их можно обозначить одной буквой m . Назовем ошибку ординаты, найденной по первому способу, через m_I и по второму — через m_{II} . Тогда будем иметь, учитывая формулы (12) и (11),

$$m_I^2 = (n-i)^2 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-2)^2} + \dots + \frac{1}{(n-i+1)^2} \right) m^2; \quad (13)$$

$$m_{II}^2 = \frac{i^2 (n-i)^2}{n^2} m^2. \quad (14)$$

Отсюда веса ординат $P_{y.I}$ и $P_{y.II}$ получают такое отношение:

$$\begin{aligned} P_{y.I} : P_{y.II} &= \frac{i^2 (n-i)^2}{n^2} : (n-i)^2 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \dots + \frac{1}{(n-i+1)^2} \right) = \\ &= \frac{i^2}{n^2} : \frac{i}{(n-\theta)^2} = i \cdot \left(\frac{n-\theta}{n} \right)^2, \end{aligned} \quad (15)$$

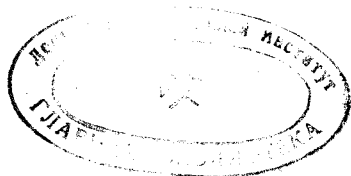
где θ меньше $i-1$ и больше 1; $1 < \theta < i-1$. Нужно, чтобы $\left(\frac{n-\theta}{n} \right)^2$ было больше $\frac{1}{i}$ или $\frac{n}{n-\theta} < \sqrt{i}$, тогда $P_{y.I}$ будет больше $P_{y.II}$, и первый способ определения ординат будет выгоднее второго. В обычных условиях при $i \leq \frac{n}{2}$ неравенство

$$\frac{n}{n-\theta} < \frac{n}{n-i} < \sqrt{i} \quad (16)$$

будет всегда иметь место.

Например $i = 4$; $n = 16$; $\theta = 2$

$$\frac{16}{14} < \sqrt{4} = 2.$$



Точно

$$P_{y,1} : P_{y,11} = \left(\frac{i}{n}\right)^2 : \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-2)^2} + \dots + \frac{1}{(n-i+1)^2}\right), \quad (17)$$

что, например, при $n=20$, $i=5$ дает

$$P_{y,1} : P_{y,11} = \frac{1}{16} : 0,0157 = 0,0625 : 0,0157 = 4.$$

Итак первому способу нужно отдать предпочтение. Вес ординат в этом способе выразится равенством

$$\frac{1}{P_{y,i}} = (n-i)^2 \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-2)^2} + \dots + \frac{1}{(n-i+1)^2}. \quad (18)$$

При $i = n-1$

$$\frac{1}{P_{y,n-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2. \quad (19)$$

При $i = \frac{n}{2}$ сумма в скобках выражения (18) дает примерно $\frac{1}{n}$ (несколько меньше). Поэтому можно посчитать, что

$$\frac{1}{P_{y,n/2}} \approx \frac{n}{4} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{1}{P_{y,1/2 n}}} = \frac{1}{2} \sqrt{n}. \quad (20)$$

Для реперов, расположенных после середины створа, следует идти в обратном порядке от репера B к реперу A . При этом

$$\left. \begin{aligned} y_{n-1} &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\beta_{n-1}}{g} = \frac{n-1}{n} \Delta y_{n-1} \\ y_{n-2} &= \frac{n-2}{n-1} \left(y_{n-1} + \frac{\beta_{n-2}}{g} \right) = \frac{n-2}{n-1} (y_{n-1} + \Delta y_{n-2}) \\ y_{n-k} &= \frac{n-k}{n-k+1} \left(y_{n-k+1} + \frac{\beta_{n-k}}{g} \right) = \frac{n-k}{n-k+1} (y_{n-k+1} + \Delta y_{n-k}) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

число $k = 1, 2, 3, \dots, n/2$, (можно дойти и до $n-1$) (i — представляет собою номер репера).

Если и k распространить до $n-1$, как и i , то все ординаты получат по два значения, из которых следует взять весовое арифметическое среднее.

Для весов следует составить таблицу для различных n , i или k , по формуле (18)

$$P_{y,i} = 1 : (n-i)^2 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-2)^2} + \dots + \frac{1}{(n-i+1)^2} \right). \quad (22)$$

Если измерить угол B_i в прямом и обратном направлении, доходя каждый раз до середины, то минимальный вес будет у ординаты среднего репера $y_{n/2}$.

Согласно формулы (20) ошибка этой ординаты выразится так:

$$m_{y,n/2} = \frac{1}{2} \sqrt{n} \frac{m_{\beta}''}{g} = \frac{1}{2} \sqrt{n} \frac{m_{\beta}'' l}{206,3} \text{ мм}. \quad (23)$$

При $l = 20$ м, $m_{\beta}'' = 5''$, $n = 16$

$$m_y \cdot \frac{1}{2} n = \pm 2 \cdot \frac{5}{10} = \pm 1 \text{ мм}, \quad (24)$$

а при двойном определении в прямом и обратном направлении даже $= \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7$ мм. Точность вполне достаточная.

Обычно реперы на переходных зонах сгущаются. При определении предлагаемым способом ординат надлежит сначала выдержать один и тот же интервал на всем протяжении створа, выделив основные реперы. Дополнительные реперы в сгущенной части наблюдаются отдельно по отношению к основным реперам. Это можно произвести или предлагаемым методом, или другим способом с замером отклонений от линий, соединяющих основные реперы в каждом промежутке между последними.

Для уточнения измерения углов B_i желательно, чтобы труба теодолита имела большее увеличение и внутреннюю фокусировку. Кроме того необходимо иметь хотя бы два штатива, один сигнал, лотаппарат с приспособлениями для автоматической центрировки. Весьма целесообразно, чтобы горизонтальный лимб был снабжен горизонтальным тангенциальным микрометрическим винтом, как это делается для дальномерного определения расстояния с горизонтальной рейкой. Барабан этого винта можно поделить на 0,0001 радиана; тогда он будет показывать тангенсы или синусы малых углов. Углы B_i будут выражаться в этих мерах, и градиент g заменится просто $\frac{1}{l}$, а $\frac{1}{g}$ будет равно l , где l выражено в мм. При этом получим, что

$$\Delta y_i = \beta_i l \text{ мм}. \quad (25)$$

Для создания еще большего удобства вносится предложение выставить далеко на продолжении створа миру; и если расстояние до этой миры в 10–20 раз больше длины всего створа AB , то для получения углов B_i лучше всего однообразно визировать сначала на задний ближайший репер, а затем на миру. Практически расстояние до миры в этом случае считается равным бесконечности, что упрощает формулы для ординат, и мы имеем:

$$y_i = y_{i-1} + \Delta y_i = \sum_i^1 \Delta y_i; \quad \Delta y_i = \frac{\beta_i}{g}; \quad \beta_i = 180^\circ - B_i. \quad (26)$$

Если, пройдя весь профиль, стать еще на точке B и измерить угол B_n , то должно существовать такое контрольное равенство:

$$y_n = \sum_n^1 \Delta y = 0, \quad (27)$$

где y_n — ордината конечного репера B .

Вместо углов B_i , близких к 180° , при наличии достаточно удаленной миры проще мерить малые острые углы δ_i между направ-

лениями на миру и на ближайший передний репер. Измерение идет, начиная с репера A (угол δ_1) и кончая репером $n-1$ (угол δ_n). При этом:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \Delta y_1 = \frac{\delta_1}{g}; \quad y_2 = y_1 + \Delta y_2 = y_1 + \frac{\delta_2}{g} \\ y_i &= \sum_i \Delta y; \quad \Delta y_i = \frac{\delta_i}{g}; \quad y_n = 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Начальным направлением считается направление на миру. В соответствии с этим устанавливаются знаки углов δ_i и приращений Δy_i .

При измерении малых углов особенно удобен указанный выше микрометрический тангенциальный винт при горизонтальном лимбе теодолита.

Поскольку ординаты выражаются суммой приращений, веса их обратно пропорциональны числу слагаемых

$$P_{y,i} = \frac{1}{i}; \quad m_{y,i} = \sqrt{i} m_p'' \quad (29)$$

При непосредственном получении ординаты измерением угла $180^\circ - E_i$ между направлением на миру и направлением на репер A имеем:

$$y_i = i \frac{E_i}{g} \quad \text{и} \quad m_{y,i} = \pm i m_p \quad \text{или} \quad \pm i m_p'' \quad (30)$$

Сравнение формул (30) и (29) ясно показывает, что непосредственное определение ординат менее точно.

При изучении оседания поверхности от подработки большое значение имеет точное измерение относительного перемещения реперов вдоль створа для выяснения нейтральных зон и зон сжатия и растяжения. В таких случаях единственно целесообразным является непосредственное измерение длин компарированной (лучше инварной) лентой с определенным натяжением и учетом влияния температуры. Но не всегда такое измерение возможно, особенно при изучении оползней, когда нагромождение глыб породы совершенно исключает непосредственное измерение длин. Приходится изыскивать другие способы определения продольных перемещений по створу.

Одним из таких способов может служить следующий:

Разбиваем створ AB и по обе стороны его выбираем еще две неподвижных точки C и D (рис. 2).

На каждом промежуточном репере i измеряются поперечный угол $CiD = A_i$ и продольный угол $AiB = B_i$.

Предварительно для всех реперов графически на чертеже определяются градиенты $g_{x,i} = \overrightarrow{C'D'}$ углов A_i и вычисляются градиенты $g_{y,i}$ углов B_i по формуле

$$g_{y,i} = \frac{2'6,3}{A_i} + \frac{206,3}{iB}'' \text{ мм.} \quad (31)$$

После вторичного измерения углов A_i и B_i находят их изменение, происшедшее за время между I и II измерениями, в виде разностей $\alpha_i = A_i^{\text{II}} - A_i^{\text{I}}$; $\beta_i = B_i^{\text{II}} - B_i^{\text{I}}$. По этим разностям определяют смещения реперов по двум направлениям: одному перпендикулярному $C'D'$ (Δx), другому перпендикулярному к AB (Δy) (рис. 2):

$$\Delta x_i = \frac{\alpha_i}{g_{x,i}}; \quad \Delta y_i = \frac{\beta_i}{g_{y,i}}. \quad (32)$$

Градиенты $g_{x,i}$ и $g_{y,i}$ для всех реперов получаются одинажды. Рационально на общем чертеже створа вокруг каждого репера начертить так называемую гониометрическую сетку, состоящую из линий положения, отвечающих определенным значениям α_i и β_i , данным через определенные интервалы, например,

$$\begin{aligned} \alpha_i = & -60'', -50'', -40'', -30'', \\ & -20'', -10'', 0, +10'', +20'', \\ & +30'' + \dots \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

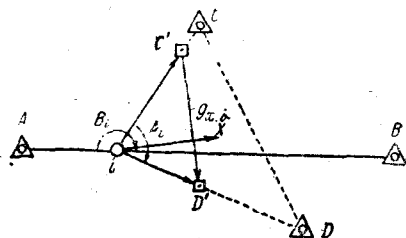


Рис. 2.

Это будет система параллельных линий двух направлений, проведенных на равном расстоянии и образующих ячейки в виде параллелограммов.

По гониометрической сетке легко вычерчивается траектория каждого отдельного репера.

Особенно удобно строить эту траекторию и без гониометрической сетки, если точки C и D расположены симметрично по отношению к створу AB , т. е. если они находятся на одном перпендикуляре к AB и расстояния их от AB одинаковы с точностью до 1—2 м (рис. 3). В этом случае $g_{x,i}$ и $g_{y,i}$ взаимно перпендикулярны на каждом репере i ; Δx_i направлено вдоль AB , Δy_i строго

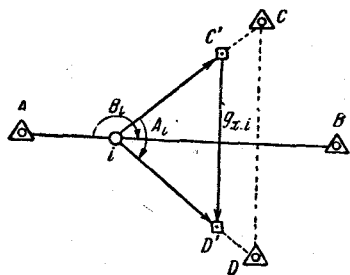


Рис. 3.

поперек $g_{ix} = \vec{C'D'}$. Ячейки гониометрической сетки представляются прямоугольниками различного вида и размеров для разных реперов. Точность определения Δx_i и Δy_i будет ниже, чем определение ординат y_i в указанном выше способе визирования на ближайший репер.

Но здесь мы имеем независимое определение траекторий отдельных реперов, позволяющее, если нужно, делать выборочное определение их смещений. Обычно трудно бывает выбрать точки C и D на соответствующих неподвижных местах. Далеко брать их — значит понизить точность.

На данных примерах показана плодотворность идеи применения линий положения. Они начинают у нас внедряться в практику в раз-

личных областях, как например, в вопросах отыскания потерянного центра, переноса проекта в натуру и т. п.

По предложенным здесь методам определения смещений по створам целесообразно бы было поставить опыты. При этом следует отметить, что эти методы позволяют производить многократное измерение углов и тем повышают их точность, тогда как в других способах такое повышение точности невозможно без значительного усложнения процесса измерения.