Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института, том XXXIII, вып. 3, 1956 г.

ЗАМЕТКИ

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ, ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ И ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Доц. Бодунов А. К.

Момент инерции поверхности вращения относительно оси симметрии I_x, абсцисса центра тяжести ее x_c и площадь поверхности S могут быть определены, как известно, так:

$$I_x = \frac{2\pi M}{S}\int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^3 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx; \tag{1}$$

$$x_c = \frac{2\pi}{S}\int_{x_1}^{x_2} xf(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx; \tag{2}$$

$$S = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \tag{3}$$

Здесь $y=f(x)$ — уравнение меридиональной кривой, x_1, x_2 — абсциссы ее концов; $f(x)$ — однозначная, дифференцируемая и знакопостоянная в промежутке $0<x_1\leqslant x\leqslant x_2$ функция; Ox — ось симметрии; M — масса, равномерно распределенная по всей поверхности вращения.

Во многих случаях вычисление интегралов (1), (2) и (3) представляет значительные трудности. Например, если

$$f(x)=\frac{x^{m+1}}{m+1},\quad (m>0), \tag{4}$$

то эти интегралы выражаются в конечном виде через элементарные функции лишь в тех случаях, когда обращаются в нуль или равны целому числу

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{3m+4}{2m} & \text{или} & \dfrac{2(m+1)}{m} \quad \text{для интеграла (1);} \\ \dfrac{m+3}{2m} & \text{или} & \dfrac{2m+3}{2m} \quad \text{для интеграла (2);} \\ \dfrac{m+2}{2m} & \text{или} & \dfrac{m+1}{m} \quad \text{для интеграла (3).} \end{array}\right\} \tag{5}$$

При вычислении интегралов (1), (2) и (3) как в случае (4), так и во многих других случаях может быть использован прием равномерной аппроксимации радикала, входящего в подинтегральные функции. С целью проведения подобной аппроксимации рассмотрим следующую задачу.

В равенстве $f(v)=\sqrt{1+v}-\alpha-\beta v$ требуется значения коэффициентов α и β выбрать так, чтобы во всем промежутке изменения величины v, т. е. при $-1<v_0\leqslant v\leqslant v_m$ функция $f(v)$ являлась бы функцией, наименее уклоняющейся от нуля. Здесь v_0 наименьшее, а v_m наибольшее значения величины v в рассматриваемом промежутке.

Обозначим $k=\frac{\alpha}{\beta}$.

Относительная погрешность аппроксимации

$$z_1=\frac{\alpha+\beta v}{\sqrt{1+v}}-1.$$

Она принимает экстремальное значение, равное z_1, при $v=k-2$, причем $z_1=2\sqrt{k-1}\,\beta-1$.

Условия аппроксимации, следуя А. А. Маркову [1], поставим так:

$$z_0=-z_1=z_m. \tag{6}$$

Здесь z_0 и z_m—значения z, вычисленные при $v=v_0$ и $v=v_m$ соответственно.

Решая систему уравнений, получим

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{2\left[1+\sqrt{(1+v_0)(1+v_m)}\right]}{\left[\sqrt[4]{1+v_0}+\sqrt[4]{1+v_m}\right]^2}\\ \beta&=\frac{2}{\left[\sqrt[4]{1+v_0}+\sqrt[4]{1+v_m}\right]^2}\end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Можно доказать, что относительная погрешность аппроксимации z во всех точках рассматриваемого промежутка изменения величины v не превзойдет значения

$$z_m=\left[\frac{\sqrt[4]{1+v_m}-\sqrt[4]{1+v_0}}{\sqrt[4]{1+v_m}+\sqrt[4]{1+v_0}}\right]^2. \tag{8}$$

Независимо от соблюдения условий (5), интегралы (1), (2) и (3) в случае (4) можно легко вычислить приближенно, полагая

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2}\approx\alpha+\beta x^{2m}.$$

Можно также доказать, что при $x_1>0$ модуль максимальной относительной погрешности при вычислении любого из интегралов (1), (2) и (3) не превзойдет модуля z_m.

Пример. Если $x_1=0$ и $x_2=1$, то $\alpha=1{,}0075$, $\beta=0{,}4177$, $z_m=0{,}007455$, т. е. максимальная относительная погрешность аппроксимации радикала будет меньше 0,75%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марков А. А. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля. Литографированные лекции СПб., 1906.

Поступило
20 V 1955 г.