Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института, том XXXIII, вып. 3, 1956 г.

ОБ ОДНОЙ ЗАКОНОМЕРНОСТИ В РАСПОЛОЖЕНИИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ НА ОБЩЕЙ ПЛОСКОСТИ КАРТИНЫ

Доц. П. В. Филиппов

Введение

Одной из задач, сформулированных в директивах XX съезда Коммунистической партии Советского Союза по шестому пятилетнему плану развития СССР на 1956—1960 годы, является разработка теоретических проблем во всех областях знания. Эта задача показывает, какое значение наша партия придает теории.

В процессе длительного исторического развития начертательной геометрии, как одного из разделов геометрии, возник ряд вопросов, требующих в настоящее время научного исследования. Одним из таких вопросов является вопрос об установлении конкретных закономерностей связи между различными по характеру методами проектирования.

При графическом решении различных задач инженерной практики необходимо стремиться к простейшему решению каждой поставленной задачи. В этом отношении безусловно следует руководствоваться указаниями гениального русского геометра — академика Е. С. Федорова, который писал: «Графические операции должны зависеть от рода представляющихся задач, а потому для простейшего их решения следует не строго педантически придерживаться одной и той же геометрической системы, а пользоваться разными из них, зная, в каких случаях преимущества простоты принадлежат одной системе и в каких другой...» [1, стр. 660].

В ряде случаев простейшее графическое решение той или иной задачи может быть достигнуто не только умелым и обоснованным использованием того или иного метода проектирования, но и умением простейшими графическими построениями перейти от одного метода проектирования к другому, т. е. осуществить преобразование проекций.

Так, например, при решении задач фотограмметрии приходится иметь дело с преобразованиями центральных проекций (фотоснимков) предметов в их прямоугольные проекции, ибо последние обладают наибольшей удобоизмеримостью и, следовательно, являются наиболее приемлемыми для решения задач, связанных с теми или иными измерениями.

При необходимости же получения изображений предметов, обладающих наибольшей наглядностью, требуется осуществлять преобразование прямоугольных проекций предметов в их центральные или аксонометрические проекции.

Чтобы наиболее простыми графическими построениями осуществить те или иные преобразования проекций, необходимо установить закономерные связи между различными методами проектирования.

Помимо преобразования проекций вопрос о взаимной связи между различными методами проектирования имеет существенное научное значение и с той точки зрения, что правильное его решение позволяет рассматривать отдельные методы проектирования на общей основе, выявляя общие для этих методов приемы и способы решения задач начертательной геометрии.

Последовательное разрешение поставленного вопроса требует установления закономерностей связи между изображениями (проекциями) геометрических элементов, полученными каким-нибудь одним из методов проектирования.

Только четкое установление таких конкретных внутренних закономерностей, присущих каждому отдельному методу проектирования, позволит с наибольшей полнотой установить и те закономерности, которые являются общими для всех рассматриваемых методов проектирования.

Несмотря на ряд исследований, выполненных советскими учеными, и достижений в области начертательной геометрии, до настоящего времени не установлены закономерности связи между изображениями элементов, полученными их центральным и параллельным проектированием как на общую, так и на различные плоскости картины из различных центров проектирования и по различным направлениям проектирования.

Исследований таких вопросов в существующей литературе по начертательной геометрии не встречается.

В настоящей работе имеется в виду установить закономерность связи между изображениями элементов, построенными их центральным проектированием на общую плоскость картины, и показать возможность использования такой закономерности при решении некоторых задач инженерной практики.

Основной особенностью изображений предметов, построенных по методу центрального проектирования, является, как известно, их наглядность.

Вследствие указанной особенности метод центрального проектирования и получил широкое применение в тех случаях инженерной практики, когда приходится иметь дело с построениями на чертежах таких изображений пространственных предметов, которые главным образом удовлетворяли бы требованию наглядности.

В литературе имеется ряд теоретически обоснованных и практически разработанных способов построения перспективы предметов, а также подробно исследованы закономерности во взаимном расположении элементов проектирования (предмета, плоскости картины и центра проектирования или точки зрения) для получения изображений, обладающих наибольшей наглядностью.

Так, например, Н. А. Рыниным [2] исследованы вопросы изменения изображений предметов в зависимости от взаимного расположения точки зрения, плоскости картины и проектируемого предмета.

В работе А. Я. Зметного подробно изложены закономерности во взаимном расположении указанных элементов проектирования

в связи с чем и выявлена необходимость для получения наиболее наглядных изображений предметов в ряде случаев строить перспективу не на вертикальной, а на наклонной плоскости [4].

В труде А. И. Добрякова указаны правила расположения элементов проектирования для руководства при построении перспектив предметов [6]. Однако в ряде случаев приходится сознательно отступать от этих правил. Такие отступления бывают необходимы в тех случаях, когда они способствуют более правильному представлению о форме изображаемых предметов или придают бо́льшую выразительность изображению предметов.

Исследуя причины возможных отступлений от правил перспективы, Н. А. Рыниным не установлены такие закономерности, пользуясь которыми можно было бы неудачное изображение предмета преобразовать в более выразительное в пределах одной и той же плоскости картины.

Одной из таких закономерностей и может явиться исследуемая в настоящей работе закономерность в расположении центральных проекций предметов при их проектировании из двух различных центров на общую плоскость картины.

§ 1. Установление закономерности в расположении изображений геометрических элементов при их проектировании из двух различных центров на общую плоскость картины

На рис. 1 заданы: предметная плоскость H, перпендикулярная к ней плоскость картины P, два центра проектирования S и S_1 и некоторая точка A, лежащая в предметной плоскости.

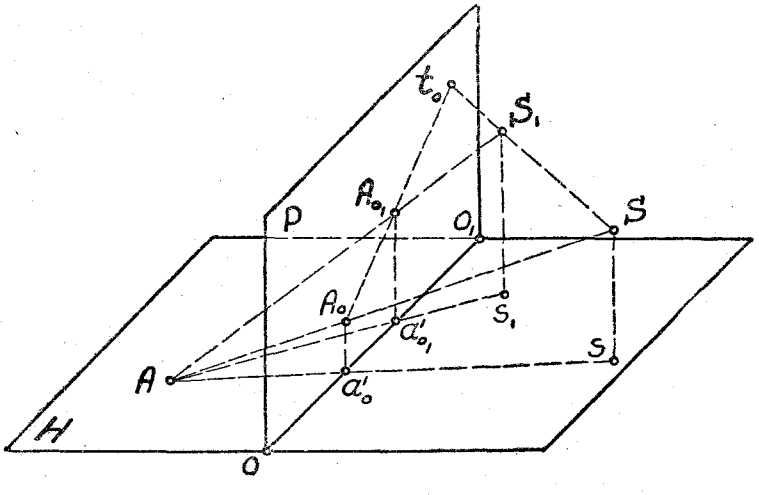


Рис. 1.

Предметная плоскость пересекается с плоскостью картины по прямой OO_1, которую принято называть основанием картины.

Чтобы получить на плоскости картины изображение (проекцию) точки A из центра S необходимо через данную точку и центр проектирования провести проектирующую прямую SA, пересечение которой

с упомянутой плоскостью и определит искомое изображение (проекцию).*

На рис. 1 построение проекции A_0 точки A выполнено следующим путем: из точки S опущен перпендикуляр на предметную плоскость до пересечения с последней в точке s, точка s соединена прямой с точкой A и в точке a_0^1 пересечения прямой sA с основанием картины—прямой OO_1, к последней восстановлен перпендикуляр, в пересечении которого с проектирующей прямой SA и определена искомая проекция A_0.

Аналогичным путем на чертеже выполнено и построение точки A_{0_1} — проекции точки A из центра S_1.

Точки S, S_1 и A определяют некоторую плоскость, линией пересечения которой с плоскостью картины является прямая, определяемая, очевидно, точками A_0 и A_{0_1} пересечения прямых SA и S_1A, лежащих в плоскости SS_1A, с плоскостью P.

Совершенно очевидно также, что на прямой $A_0A_{0_1}$ должна располагаться точка t_0 встречи прямой SS_1 с плоскостью картины, ибо прямые SS_1 и $A_0A_{0_1}$ лежат в общей плоскости SS_1A.

Если из центров S и S_1 проектировать на плоскость P любую другую точку, например B, на рис. 1 не показанную, то проекции B_0 и B_{0_1} этой точки определят на плоскости картины линию пересечения с последней плоскости SS_1B; точка же t_0 встречи прямой SS_1 с плоскостью картины будет располагаться уже на прямой $B_0B_{0_1}$ по соображениям, изложенным выше.

Поскольку t_0 точка встречи прямой SS_1 с плоскостью картины является единственной точкой, то, очевидно, в этой точке прямые $A_0A_{0_1}$ и $B_0B_{0_1}$ (последняя на рис. 1 не показана) должны пересекаться.

Иначе говоря, каждая пара проекций любой точки пространства, полученная проектированием этой точки из двух центров S и S_1, должна располагаться на прямой, проходящей через t_0—точку встречи с плоскостью картины прямой же, определяемой двумя центрами проектирования.

На рис. 1 показан случай, когда прямая SS_1 пересекает плоскость картины в точке t_0.

Если же эта прямая будет параллельна названной плоскости, то, очевидно, все прямые, на которых должны располагаться упомянутые выше пары проекций точек, будут параллельны друг другу и прямой SS_1 или, как принято говорить в проективной геометрии, будут проходить через несобственную (бесконечно-удаленную) точку встречи прямой SS_1 с плоскостью картины [5].

Приведенные рассуждения позволяют сформулировать следующую теорему:

Две проекции точки, полученные проектированием последней из двух различных центров на общую плоскость картины, лежат на прямой, проходящей через точку встречи с этой плоскостью прямой же, определяемой заданными центрами проектирования.

В рассмотренном на рис. 1 случае проектируемая точка A располагалась в предметной плоскости.

Если проектируемая точка не расположена в предметной плоскости, как показано на рис. 2, то для построения проекций этой точки

---

* В последующем изложении изображение любого геометрического элемента будет именоваться его проекцией.

на плоскости картины необходимо предварительно построить точку a, которая определяется в пересечении с предметной плоскостью перпендикуляра, опущенного на эту плоскость из точки A. Точка a называется основанием точки A. На рис. 2 проекция a_0 называется проекцией основания точки.

Точка встречи с плоскостью картины прямой, проходящей через два центра проектирования (точка t_0 на рис. 1), может быть названа

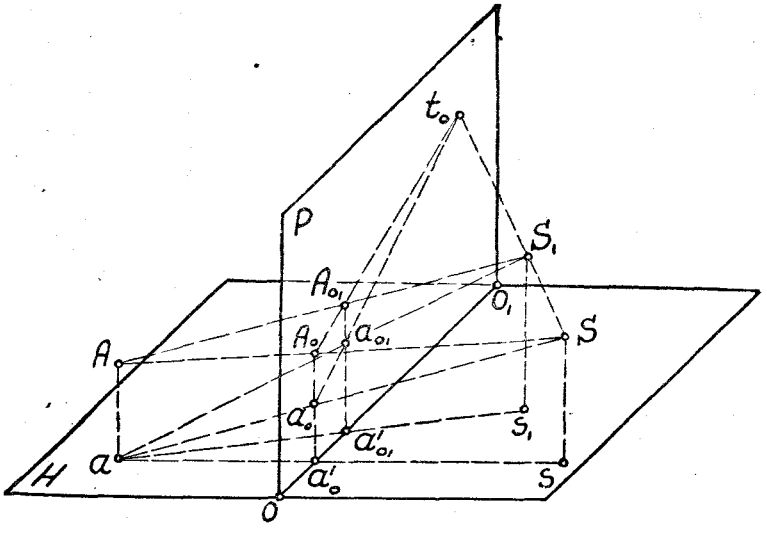


Рис. 2

точкой преобразования, ибо, пользуясь этой точкой, можно, как будет показано ниже, преобразовать проекцию предмета, полученную проектированием из одного центра, в проекцию того же предмета, полученную проектированием уже из другого центра на ту же плоскость картины.

Прежде чем перейти к вопросам практического применения доказанной закономерности в расположении центральных проекций элементов на общей плоскости картины, рассмотрим вопрос об использовании метода прямоугольных координат в центральном проектировании, ибо в последующем изложении все исследования будут проводиться на основе указанного метода.

§ 2. Применение метода прямоугольных координат в центральном проектировании [3]

Сущность рассматриваемого вопроса заключается в том, что все основные элементы проектирования — проектируемый предмет, плоскость картины и центр проектирования — предполагаются отнесенными к системе трех взаимноперпендикулярных координатных плоскостей.

Такая постановка вопроса позволяет установить конкретные формы взаимной связи между методами прямоугольного и центрального проектирования, ибо построение перспективы предметов производится, как правило, по заданным прямоугольным проекциям последних.

На рис. 3 заданы: система трех взаимноперпендикулярных координатных плоскостей, которые попарно пересекаются по прямым ox, oy и oz, называемым координатными осями, плоскость картины $p_x p_y p_z$ общего положения и центр проектирования S.

Для построения проекций координатных осей на плоскости картины достаточно построить проекцию начала координат — точку O — и соединить эту проекцию прямыми с точками p_x, p_y и p_z, которые, как лежащие в плоскости картины и на соответствующих осях координат, сами являются и проекциями на плоскость картины.

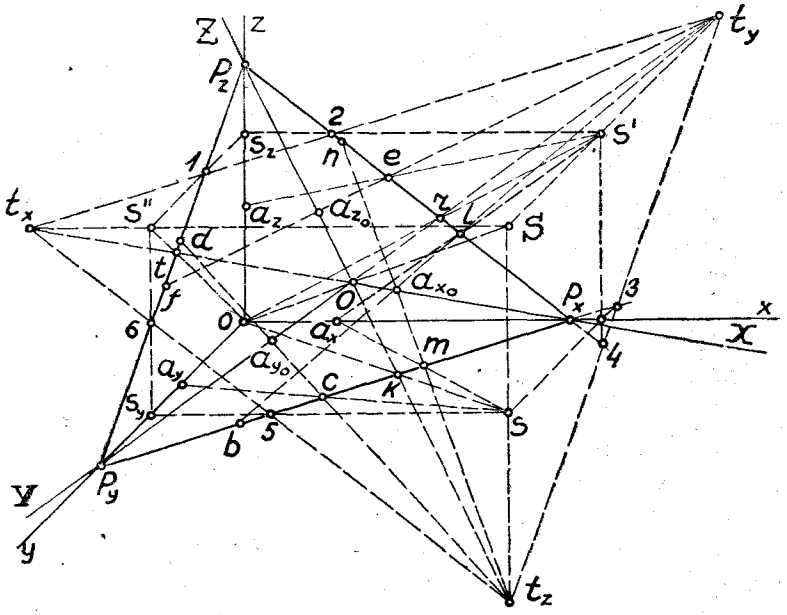


Рис. 3

На рис. 3 требуемое построение выполнено следующим путем.

Построена горизонтальная прямоугольная проекция s центра проектирования S и через прямую Ss и начало координат o проведена плоскость, линией пересечения которой с плоскостью картины является прямая $p_z k$. В пересечении последней прямой с проектирующей прямой So определена проекция O начала координат o.

Полученная точка O соединена прямыми с точками p_x, p_y и p_z, и определены проекции OX, OY и OZ координатных осей.

На рисунке построен полный параллелепипед координат центра проектирования — точки S.

Прямые Ss и $p_z k$ при их продолжении пересекаются в точке t_z, которая является точкой встречи прямой Ss с плоскостью картины. Точка t_z представляет собой проекцию бесконечно удаленной точки оси oz и называется точкой схода прямых, параллельных оси oz.

Прямые Ss' и $p_y O$ при их продолжении пересекаются в точке t_y, которую можно представить как точку встречи с плоскостью картины прямой Ss'; прямая $p_y O$ может рассматриваться в таком случае, как линия пересечения плоскости картины и плоскости Sos'.

Точка t_y представляет собой проекцию бесконечно удаленной точки оси oy и называется точкой схода прямых, параллельных оси oy.

Рассматривая прямую p_xO как линию пересечения плоскости Sos'' с плоскостью картины, можно определить в пересечении прямых p_xO и Ss'' точку t_x, которая, являясь точкой встречи прямой Ss'' с плоскостью картины, представляет собой проекцию бесконечно удаленной точки оси ox и называется точкой схода прямых, параллельных оси ox.

Соединив попарно прямыми точки t_x и t_z, t_x и t_y и t_y и t_z получим треугольник $t_xt_yt_z$.

Нетрудно доказать, что в этом треугольнике стороны t_xt_y, t_xt_z и t_yt_z соответственно параллельны сторонам p_xp_y, p_xp_z и p_yp_z треугольника следов плоскости картины.

Действительно, прямая t_xt_y может рассматриваться как линия пересечения плоскости $Ss's''$, параллельной плоскости xoy, с плоскостью картины.

Две же параллельные плоскости (xoy и $Ss's''$) пересекаются третьей плоскостью (плоскостью картины) по параллельным прямым t_xt_y и p_xp_y.

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что $t_xt_z \parallel p_xp_z$ и $t_yt_z \parallel p_yp_z$. Треугольник $t_xt_yt_z$ в дальнейшем будем называть треугольником схода.

На рис. 3 показано пространственное расположение всех элементов.

Для построения же проекций предметов на чертежах главный интерес представляет расположение тех же элементов в одной плоскости чертежа. Такое расположение показано на рис. 4, на котором все три координатные плоскости и плоскость картины совмещены с плоскостью чертежа. При указанном расположении на чертеже плоскости картины и координатных плоскостей центр проектирования S оказывается изображенным двумя своими прямоугольными проекциями s и s'.

Плоскость картины совмещена с плоскостью чертежа вращением вокруг следа p_xp_z. В совмещенном положении стороны треугольника $p_xp_yp_z$ на чертеже должны быть представлены без искажения. Для построения этого треугольника необходимо определить точку p_{y_0} пересечения дуг окружностей радиусов p_xp_y и $p_z(p_y)$ с центрами соответственно в точках p_x и p_z, что и выполнено на чертеже.

Чтобы построить проекции координатных осей на плоскости картины определим вершины треугольника схода t_x, t_y t_z, ибо, как видно из рис. 3, проекции координатных осей представляют собой прямые, определяемые точками t_x и p_x, t_y и p_y и, наконец, t_z и p_z.

Для построения сторон треугольника схода отметим, что на стороне t_xt_y лежат точки 1 и 2 пересечения соответственно прямым $s''s_z$ и p_yp_z и $s's_z$ и p_xp_z, на стороне t_yt_z лежат точки 3 и 4 пересечения соответственно прямым ss_x и p_yp_x и $s's_x$ к p_zp_x и, наконец, на стороне t_xt_z располагаются точки 5 и 6 пересечения соответственно прямым ss_y и p_xp_y и $s''s_y$ и p_yp_z (см. рис. 3).

Имея в виду указанное расположение соответствующих точек, определяем эти точки на рис. 4, причем положения точек 2 и 4, как лежащих на следе p_xp_z, при совмещении плоскости картины с плоскостью чертежа останутся неизменными. Для точек же 1, 3, 5 и 6 должны быть определены их совмещенные положения с плоскостью чертежа — соответственно точки 1_0, 3_0, 5_0 и 6_0. Соединив прямыми по-

парно точки 1_0 и 2_0, 3_0 и 4 и 5_0 и 6_0, определим стороны и вершины треугольника схода $t_x t_y t_z$, а затем и проекции OX, OY и OZ координатных осей.

Получим на плоскости картины проекции координат произвольной точки.

Пусть на рис. 3 заданы три координаты точки — отрезки Oa_x, Oa_y и Oa_z.

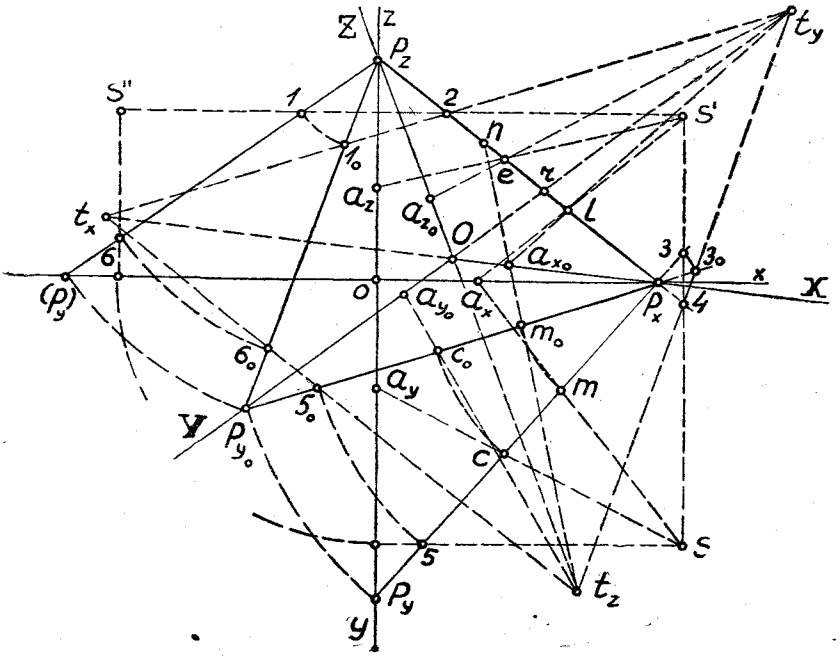


Рис. 4

Для построения проекции отрезка Oa_x, очевидно, достаточно построить проекцию точки a_x, ибо проекция точки O на рисунке уже имеется. Чтобы решить такую задачу проведем плоскость $Sa_x s$ и определим линию ее пересечения с плоскостью картины—прямую mn; в пересечении прямой mn с проекцией OX оси ox и определится искомая проекция a_{x_0} точки a_x. Отрезок Oa_{x_0} и будет являться проекцией координаты oa_x.

Для построения проекции координаты oa_y определим проекцию точки a_y. Для этой цели проведем плоскость $Sa_y s$ и определим линию пересечения таковой с плоскостью картины — прямую cd; пересечение прямой cd с проекцией OY оси oy определит искомую проекцию a_{y_0} точки a, а отрезок Oa_{y_0} будет являться проекцией координаты oa_y.

Прямые mn и cd проходят через точку t_z, ибо они являются двумя из линий пересечения с плоскостью картины пучка плоскостей, проходящих через прямую Ss. Линии же пересечения пучка таких плоскостей с плоскостью картины образуют плоский пучок прямых с центром в точке t_z.

Чтобы построить проекцию координаты oa_z нужно определить проекцию точки a_z.

Для этой цели проводим плоскость Sa_zs' и определяем линию пересечения таковой с плоскостью картины — прямую ef; пересечение прямой ef с проекцией OZ оси oz определит проекцию a_{z_0} точки a_z, а отрезок Oa_{z_0} — проекцию координаты oa_z.

Точку a_{x_0} на чертеже можно было бы получить и иным путем, а именно — определить линию пересечения плоскости Sa_xs' с плоскостью картины — прямую bl — и в пересечении этой прямой с проекцией OX оси ox — искомую точку.

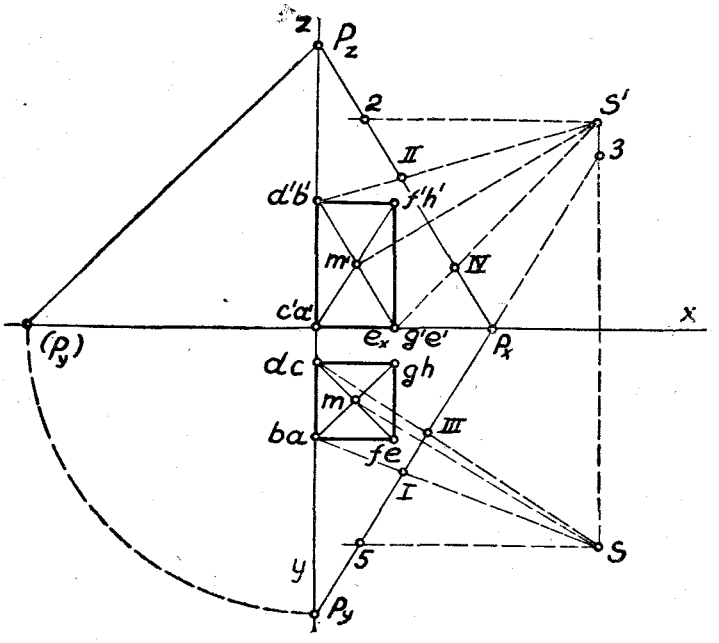


Рис. 5

Точно также точки a_{y_0} и a_{z_0} можно было бы определить, найдя линии пересечения с плоскостью картины плоскостей Sa_ys'' и Sa_zs'', (на рис. 3 не показано).

На рис. 4 выполнены те же построения, что и на рис. 3, но с учетом особенности плоскостного изображения.

Перейдем теперь к вопросу о построении перспективы предмета, основываясь на изложенных соображениях.

Пусть на рис. 5 задан прямоугольный параллелепипед *abcdefgh* двумя прямоугольными проекциями — горизонтальной и вертикальной и требуется построить перспективу этого предмета.

Для решения поставленной задачи выбираем систему координатных плоскостей так, чтобы координатная плоскость *yoz* проходила через грань *abcd* параллелепипеда. Находим центр проектирования S (точку зрения), который определен на чертеже вертикальной s' и горизонтальной s проекциями. Направляя главный луч зрения в центр проектируемого предмета, выбираем плоскость картины перпендикулярно к этому лучу ($p_xp_y \perp sm$ и $p_xp_z \perp s'm'$).

По имеющимся данным строим профильный след плоскости картины — $p_z(p_y)$ и определяем точки 2, 3 и 5 — пересечения ребер параллелепипеда координат центра проектирования со следами p_xp_z и p_xp_y плоскости картины.

Построение перспективы параллелепипеда выполняем на отдельном рис. 6. Для этой цели строим треугольник $p_xp_{y_0}p_z$ по имеющимся на рис. 5 трем сторонам и треугольник $t_xt_yt_z$, отложив на следе $p_{y_0}p_x$

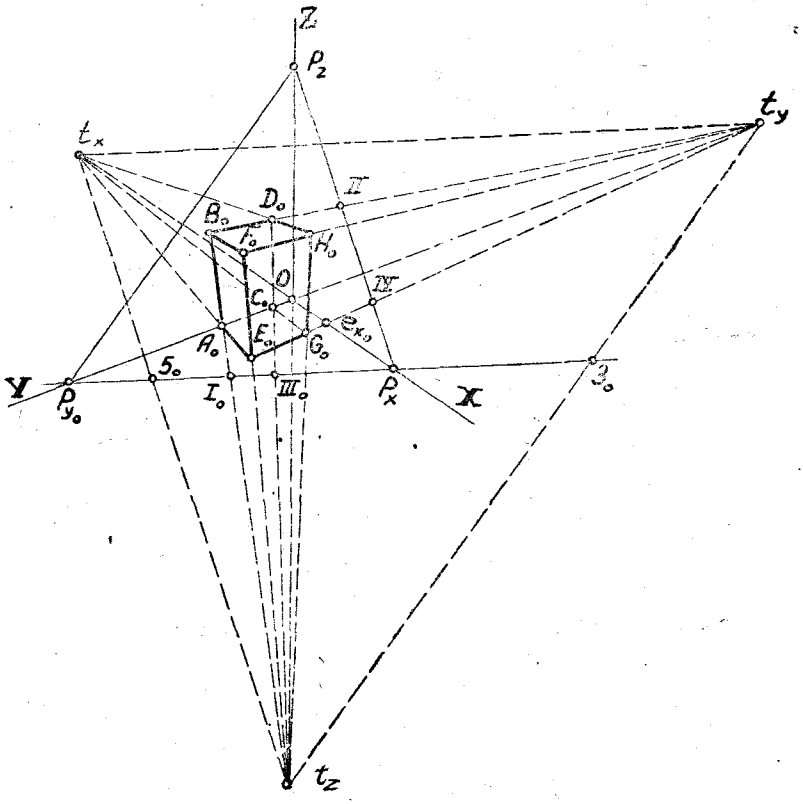


Рис. 6

отрезки $p_{y_0}5_0$ и $p_{y_0}3_0$, равные соответственно отрезкам p_y5 и p_y3, а на следе p_xp_z — отрезок p_z2, равный отрезку p_z2 на рис. 5, и проведя через точки 2, 3_0 и 5_0 стороны этого треугольника t_xt_y, t_yt_z и t_xt_z соответственно параллельно сторонам $p_xp_{y_0}$, $p_{y_0}p_z$ и p_zp_x треугольника следов плоскости картины. Соединив теперь прямыми точки p_x и t_x, p_{y_0} и t_y и p_z и t_z получаем проекции координатных осей OX, OY и OZ.

Проекции A_0 точки $A(a, a')$ и C_0 точки $C(c, c')$ определяем подобно тому, как ранее было изложено построение точки a_{y_0} на рис. 3 и 4, определив предварительно точки I и III на рис. 5 и отметив их в точках I_0 и III_0 на рис. 6 ($p_{y_0}I_0 = p_yI$ и $p_{y_0}III_0 = p_yIII$).

Проекцию e_{x_0} точки e_x находим на рис. 6, определив предварительно на рис. 5 точку IV — пересечения прямой e_xs' со следом p_xp_z —

и отметив эту же точку на рис. 6, после чего, проведя на рис. 6 прямую t_y IV до пересечения в искомой точке с прямой OX. Имея в виду, что стороны параллелепипеда AE и CG в пространстве параллельны оси ox, а сторона GE — оси oy, проводим на рис. 6 прямые t_xA_0, t_xC_0 и $t_ye_{x_0}$. Пересечение прямой $t_ye_{x_0}$ с прямыми t_xA_0 и t_xC_0 определит проекции E_0 и G_0 вершин E и G, а отрезки A_0C_0, C_0G_0, G_0E_0 и A_0E_0 будут являться проекциями соответствующих сторон основания параллелепипеда.

Для построения проекций B_0, D_0, H_0 и F_0 соответствующих вершин параллелепипеда проводим прямые A_0t_z, C_0t_z, G_0t_z и E_0t_z, так как в пространстве ребра AB, CD, GH и EF параллельны оси oz и их проекции, следовательно, должны иметь общую точку схода t_z.

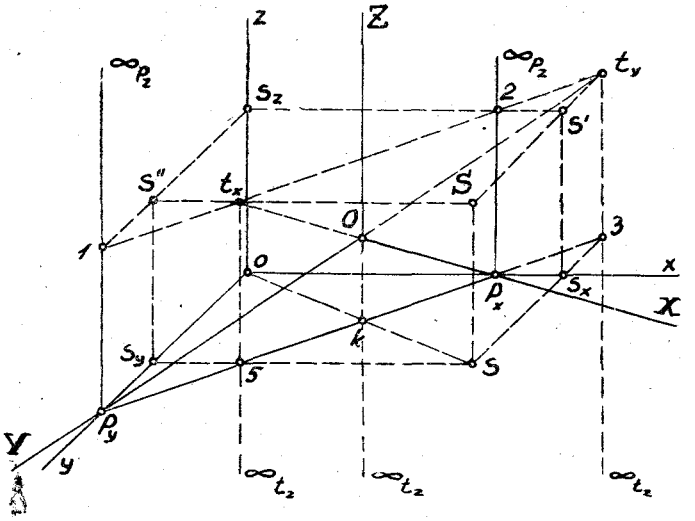


Рис. 7

На рис. 5 определяем точку II пересечения прямой $a's'$ со следом p_xp_z и отрезок p_zII строим на соответствующем следе на рис. 6.

Проводя на рис. 6 прямую t_y II, определяем в ее пересечении с прямыми A_0t_z и C_0t_z точки B_0 и D_0 — проекции соответствующих вершин параллелепипеда.

Точки F_0 и H_0 определяем в пересечении соответственно прямым t_xB_0 и t_zE_0 и t_xD_0 и t_zG_0.

После всех отмеченных построений на рис. 6 получаем перспективу заданного параллелепипеда.

На рис. 3, 4, 5 и 6 был рассмотрен случай проектирования на наклонную плоскость $p_xp_yp_z$, занимающую общее положение относительно координатных плоскостей.

Если же за плоскость картины будет принята вертикальная плоскость, как это чаще всего имеет место в практике построения перспектив предметов, то такой случай будет иметь некоторое внешнее отличие от рассмотренного ранее случая с точки зрения расположения отдельных элементов чертежа.

На рис. 7 показано проектирование из центра S на плоскость $p_xp_y{}^{\infty}p_z$, перпендикулярную к координатной плоскости xoy.

Как видно из сравнения рис. 3 и 7, в рассматриваемом случае точка t_z оказывается расположенной в бесконечности (точка ∞_{t_z} на рис. 7), как и точки 4 и 6 (см. рис. 3); основные же особенности в расположении элементов чертежа сохраняются прежними, т. е. остаются взаимнопараллельными следующие прямые: $p_x p_y$ и $t_x t_y$, $p_x \infty_{p_z}$ и $t_x \infty_{t_z}$ и, наконец, $p_y \infty_{p_z}$ и $t_y \infty_{t_z}$.

На рис. 8 показано плоскостное расположение всех элементов системы для рассматриваемого случая, а на рис. 9 и 10 — построение перспективы параллелепипеда *ABCDEFGH* на вертикальной плоскости.

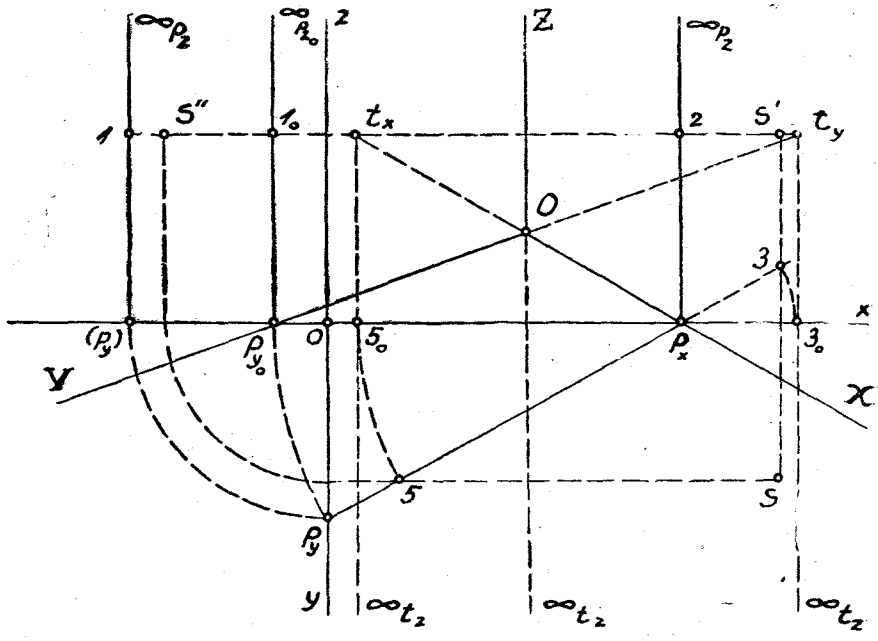


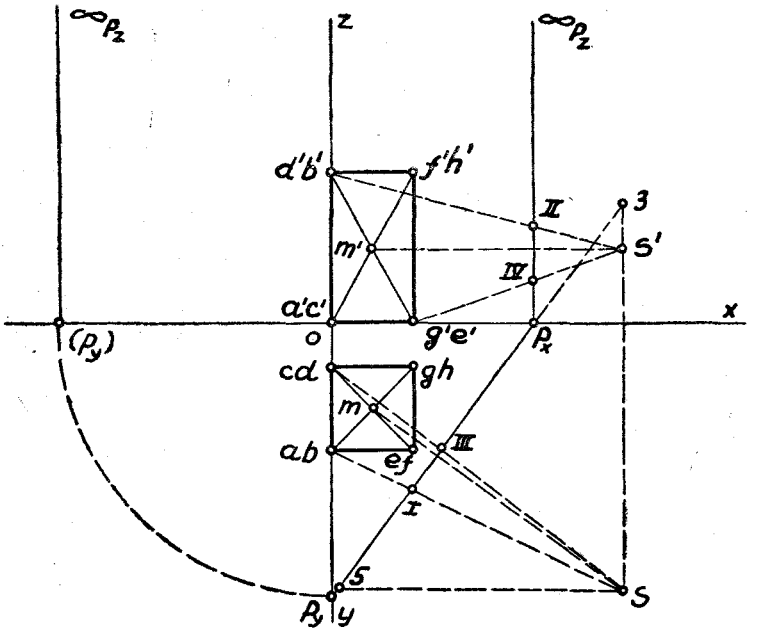
Рис. 8

При сравнении рис. 5 и 9, рис. 6 и 10 легко убедиться в том, что пути построения перспективы параллелепипеда как на вертикальной, так и на наклонной плоскости совершенно одинаковы.

Таким образом, можно отметить, что применение метода прямоугольных координат в центральном проектировании позволяет установить единообразные пути построения перспективы предмета по двум его прямоугольным проекциям совершенно независимо от выбранного положения плоскости картины по отношению к плоскостям координат.

Приведенными исследованиями установлено, что для заданных в системе координатных плоскостей — центра проектирования и плоскости картины — определяется единственный треугольник схода, стороны которого соответственно параллельны сторонам треугольника следов плоскости картины.

Совершенно очевидно, что при проектировании из двух различных центров на общую плоскость картины определятся два треугольника схода, в каждом из которых расположение сторон будет характеризоваться отмеченной закономерностью.


∞Pz
z
∞Pz
d'b'
f'h'
II
3
m'
S'
IV
a'c'
x
o
g'e'
Px
(Py)
cd
gh
m
ab
ef
III
x
S
Py
y
S

Фис. 9

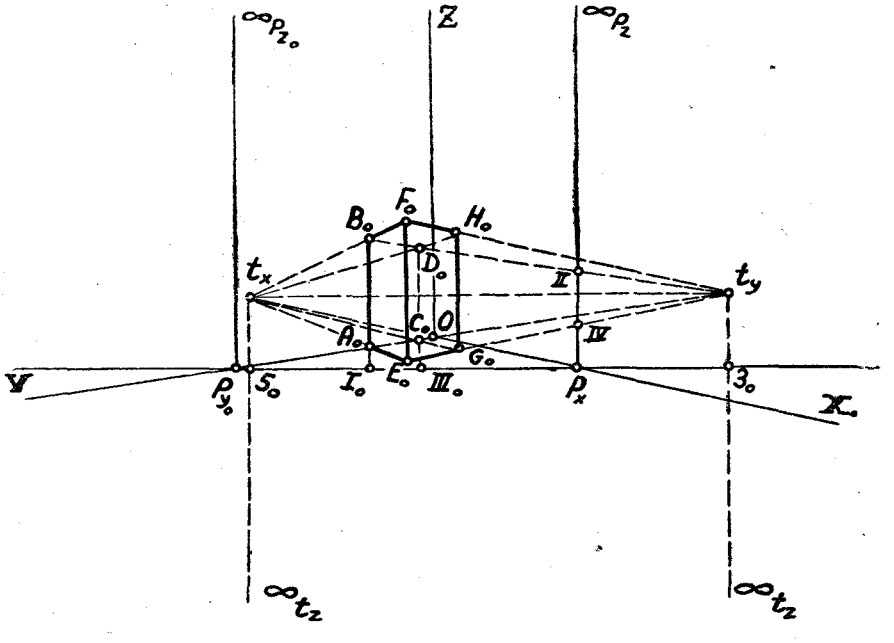

∞Pz₀
Z
∞Pz
Fo
Bo
Ho
Do
tx
II
ty
Co
O
Ao
IV
Go
Py₀
So
Io
Eo
III₀
Px
3₀
X
∞tz
∞tz

Рис. 10

Указанная выше закономерность в расположении проекций точки при ее проектировании из двух различных центров на общую плоскость картины является справедливой для проекций любой точки, в том числе и для бесконечно удаленной. Вершины треугольника схода t_x, t_y и t_z представляют собой проекции бесконечно удаленных точек соответственно осям ox, oy и oz, а следовательно в расположении одноименных вершин двух треугольников схода при одной и той же плоскости картины сохраняется такая же закономерность.

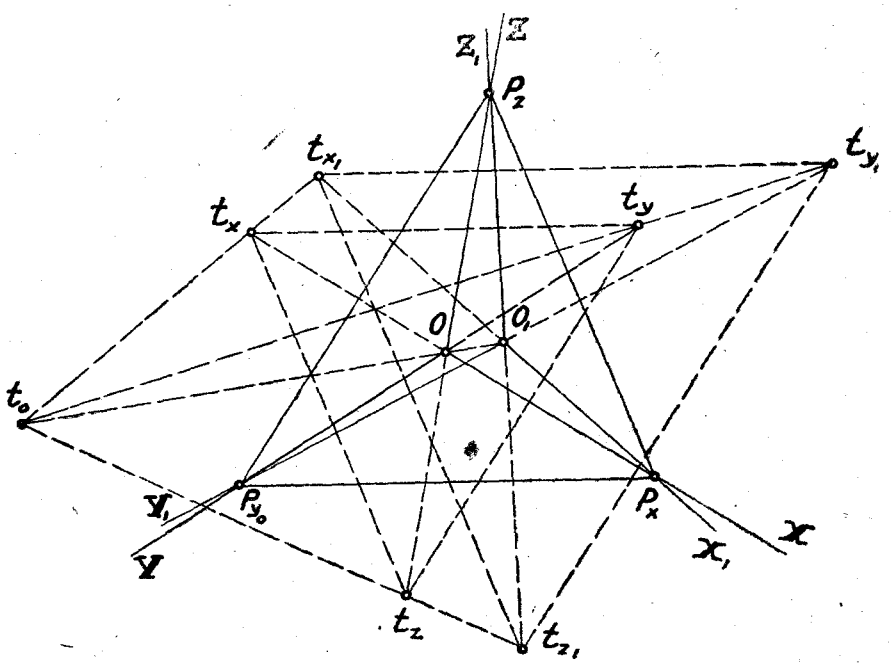


Рис. 11

Таким образом, при проектировании из двух различных центров на общую плоскость картины одноименные вершины треугольников схода будут располагаться на прямых, проходящих через точку преобразования.

На рис. 11 показано расположение двух треугольников схода в том случае, когда плоскостью картины является плоскость $p_x p_y p_z$ общего положения, а на рис. 12 — расположение тех же треугольников для случая проектирования на вертикальную плоскость; t_0 — точка преобразования в обоих случаях.

На рисунках видно также, что для расположения проекций начала координат O и O_1 из двух различных центров сохраняется доказанная закономерность.

Ранее указывалось, что, пользуясь точкой преобразования, можно проекцию предмета, полученную проектированием из одного центра, преобразовать в проекцию того же предмета, полученную уже проектированием из другого центра на ту же плоскость картины.

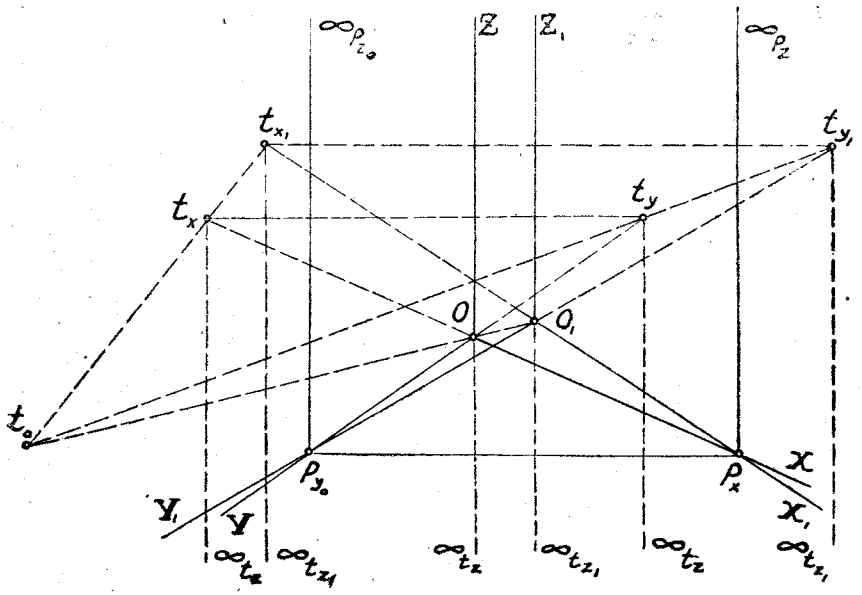

Z
Z1
tx1
ty1
tx
ty
O
O1
t0
Py0
Px
X
X1
Y1
Y

Рис. 12

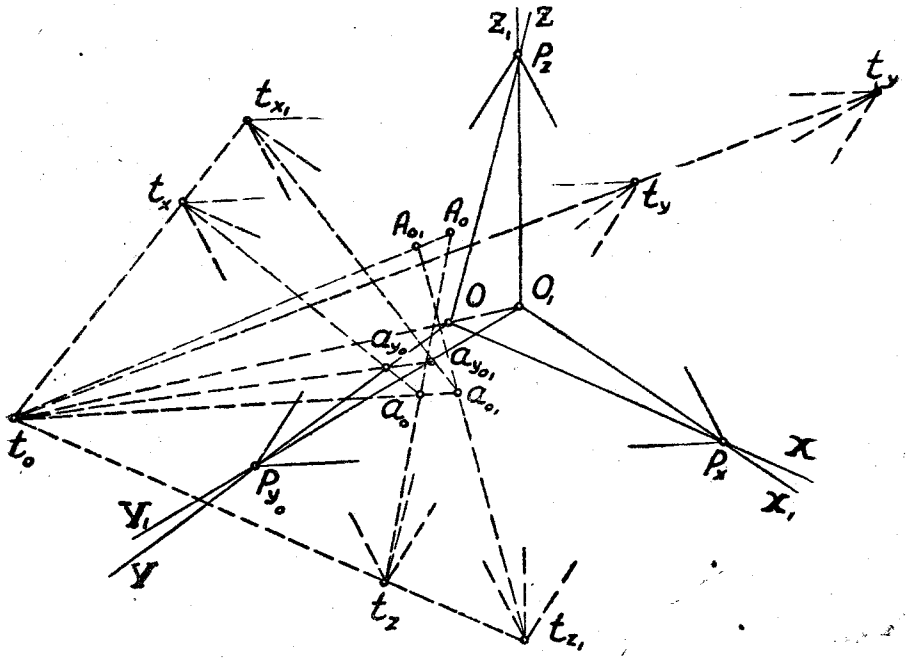

Z1
Z
Pz
tx1
ty
tx
A01
A0
O
O1
ay0
ay01
a0
a01
t0
Py0
Px
X
X1
Y1
Y
tz
tz1

Рис. 13

Рассмотрим путь решения такой задачи для случая, когда преобразованию подлежит проекция точки.

Пусть на рис. 13 при имеющихся плоскости картины $p_x p_y p_z$, двух треугольниках схода $t_x t_y t_z$ и $t_{x_1}\ t_{y_1}\ t_{z_1}$ и точке преобразования t_0 заданы проекции точки и ее основания A_0 и a_0, полученные проектированием из некоторого центра S, для которого треугольником схода является треугольник $t_x t_y t_z$.

При таких исходных данных требуется построить проекцию A_{o_1} точки при ее проектировании на ту же плоскость $p_x p_y p_z$ из центра S_1, для которого треугольником схода является треугольник $t_{x_1} t_{y_1} t_{z_1}$.

Для решения поставленной задачи проводим прямую $a_0 t_x$ до пересечения с проекцией OY оси oy из центра S и отмечаем точку a_{y_0}; отрезок Oa_{y_0} является проекцией координаты точки A по оси oy из центра S.

Проведя прямую $t_0 a_{y_0}$ до пересечения с проекцией $O_1 Y_1$, оси oy из центра S_1, отмечаем точку $a_{y_{o_1}}$; отрезок $O_1 a_{y_{o_1}}$ является проекцией координаты точки A по оси oy уже из центра S_1.

Взаимное пересечение прямых $t_0 a_0$ и $t_{x_1} a_{y_{o_1}}$ определит проекцию a_{o_1} основания точки из центра S_1, а взаимное пересечение прямых $a_{o_1} t_{z_1}$ и $t_0 A_0$ определит и искомую проекцию A_{o_1} точки A, полученную проектированием из центра S_1.

Как видно из приведенного примера преобразования проекций простейшего геометрического элемента, метод прямоугольных координат и в этом случае позволяет получить весьма удобное решение поставленной задачи.

После таких достаточно подробных замечаний об использовании метода прямоугольных координат в центральном проектировании перейдем к рассмотрению применения доказанной в § 1 закономерности и решению некоторых задач инженерной практики.

§ 3. Преобразования центральных проекций на общей плоскости картины при решении некоторых задач инженерной практики

Основным требованием, предъявляемым к перспективному изображению инженерного сооружения, является соответствие этого изображения зрительному восприятию человеком изображаемого предмета.

Для удовлетворения такого требования необходимо при построении перспективных изображений придерживаться определенных закономерностей в расположении основных элементов проектирования. Как указывалось выше, эти закономерности сформулированы в ряде руководств по рассматриваемому вопросу.

При построении перспектив архитектурных сооружений, особенно архитектурных ансамблей, удачный выбор точки зрения (центра проектирования), а следовательно, и остальных элементов проектирования, может быть достигнут лишь при большом навыке в построениях, а чаще всего при нескольких попытках построений для одного и того же объекта.

Поскольку построение перспективы какого-нибудь инженерного сооружения представляет задачу графически весьма громоздкую, необходимо при нескольких попытках построений перспектив одного и того же предмета найти такие пути, которые бы в возможно большей степени упрощали решение поставленной задачи.

Одним из указанных путей и может явиться использование доказанной в § 1 закономерности, что и будет представлено на ряде примеров.

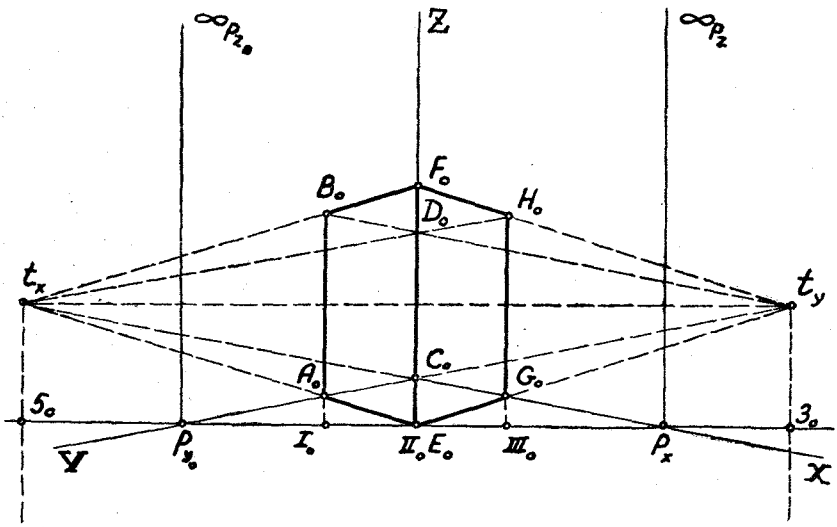


Рис. 14

Пусть, например, при построении перспективы архитектурного ансамбля один из объектов этого ансамбля, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, оказался изображенным неестественно и монотонно (рис. 14), что объясняется неудачным выбором точки зрения по отношению к данному объекту.

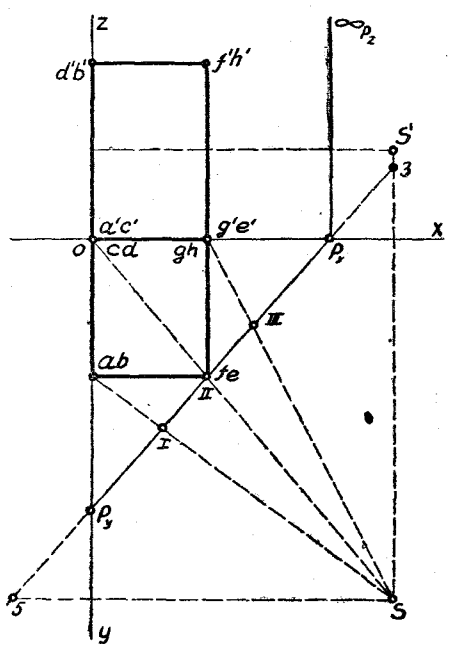


Рис. 15

Положение точки зрения и плоскости карти ы относительно изображенного объ кта представлено на рис. 15. Благодаря показанному на этом рисунке расположению элементов проектирования, стороны основания параллелепипеда, в действительности различные по величине, оказались изображенными одинаковой величины, поэтому форма параллелепипеда оказалась искаженной и несоответствующей зрительному восприятию.

Монотонность изображения обусловлена и неудачным положением горизонта посредине объекта.

Для того чтобы изображение параллелепипеда, представленное на рис. 14, преобразовать в более выразительное и соответствующее зрительному восприятию следовало бы выбрать иное положение точки зрения на рис. 15 и выполнить

заново все построения перспективы так, как указывалось ранее на рис. 9 и 10.

Такие довольно громоздкие построения можно упростить, пользуясь доказанной закономерностью в расположении центральных проекций на общей плоскости картины, причем для более выразительного изображения предмета может быть использовано изображение, уже имеющееся на рис. 14.

Решение такой задачи преобразования показано на рис. 16 и 17.

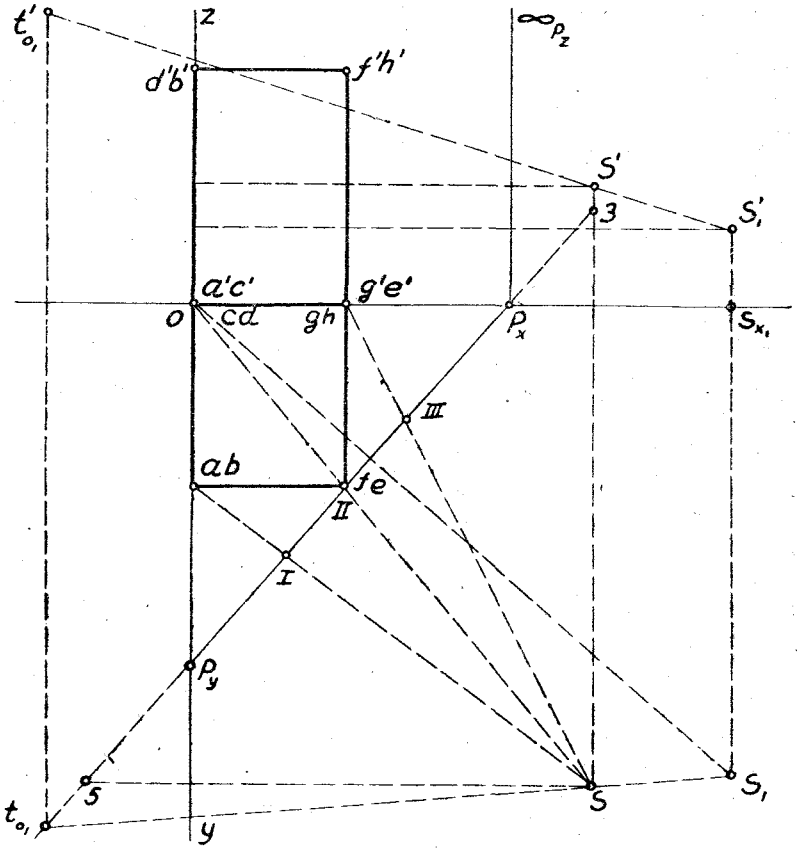


Рис. 16

На этих двух рисунках предполагаются уже выполненными те построения, которые представлены соответственно на рис. 14 и 15.

На рис. 16 показано новое положение точки зрения, определенное двумя прямоугольными проекциями s_1 и s_1'.

При таком новом положении точки зрения изображения сторон основания параллелепипеда на той же плоскости картины будут различными по величине и линия горизонта оказывается расположенной ниже, чем при старом положении точки зрения s и s' на рис. 15.

После выбора новой точки зрения находим точку преобразования, т. е. точку пересечения с плоскостью картины прямой, опреде-

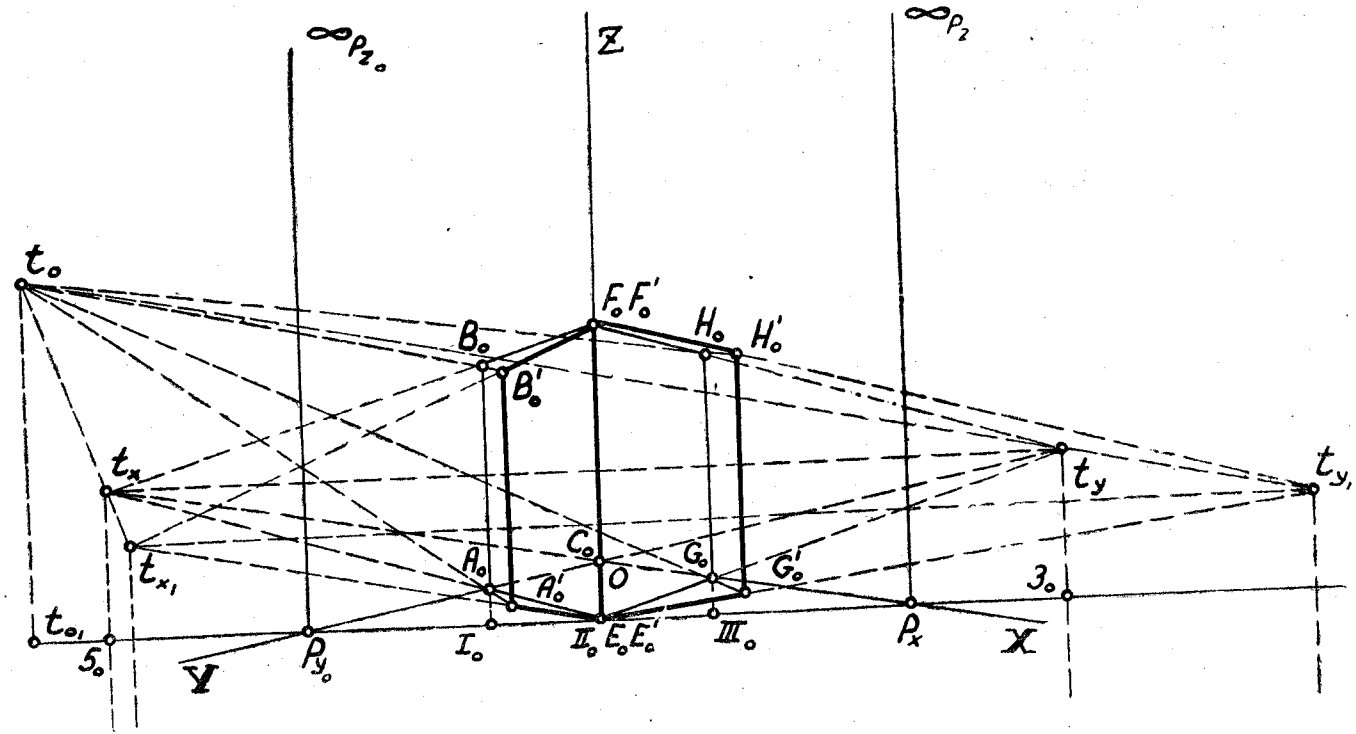

∞P_{2_0}
Z
∞P_2
t_0
$F_0 F_0'$
H_0
H_0'
B_0
B_0'
t_x
t_y
t_{y_1}
t_{x_1}
C_0
A_0
A_0'
O
G_0
G_0'
3_0
t_{0_1}
5_0
Y
P_{y_0}
I_0
II_0 $E_0 E_0'$
III_0
P_x
X

Рис. 17

ляемой двумя имеющимися на рис. 16 центрами проектирования. Эта точка на рис. 16 показана двумя своими прямоугольными проекциями t_{o_1} и t'_{o_1}.

Положение точки преобразования t_0 на рис. 17 определено следующим путем. На линии основания картины отмечена точка t_{o_1}, от которой по перпендикуляру к основанию картины отложен отрезок $t_{o_1}t_0$, равный отрезку tt'_{o_1} на рис. 16.

После указанных построений на рис. 17 проводится новая линия горизонта, параллельная основанию картины $p_x p_{y_0}$ и отстоящая от этого основания на расстояние, равное отрезку $s_{x_1}s_1^1$ на рис. 16.

Проведя через точку t_0 и точки схода t_x и t_y прямые, определяем в их пересечении с новой линией горизонта точки t_{x_1} в t_{y_1}, кото-

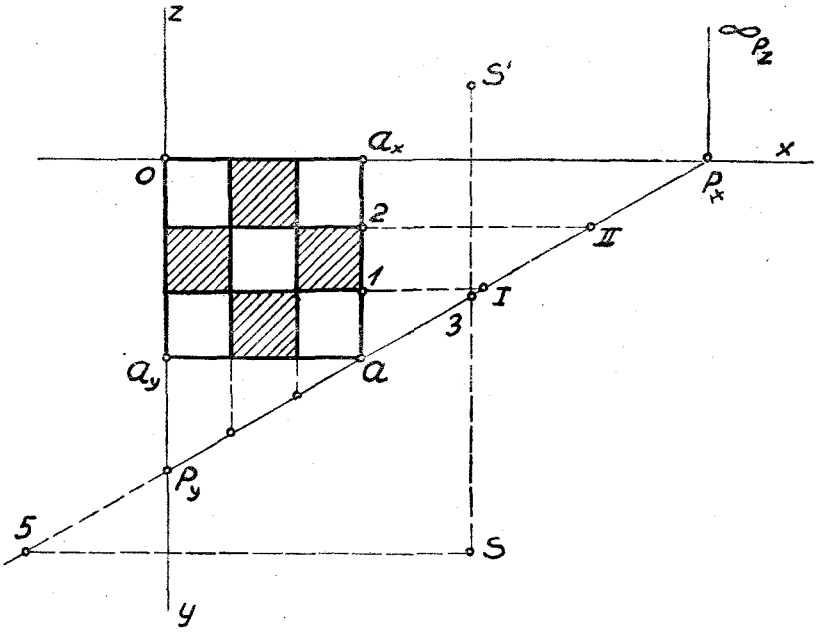


Рис. 18

рые представляют собой вершины треугольника схода для новой точки зрения.

После всех приведенных построений можно решить задачу преобразования имеющейся перспективы параллелепипеда $A_0B_0D_0H_0F_0E_0G_0C_0$.

Проекции A_{o_1}, B_{o_1}, G_{o_1} и H_{o_1} вершин параллелепипеда определяются в пересечении соответственно следующим прямым: t_0A_0 и $t_{x_1}\text{II}_0$, t_0B_0 и $t_{x_1}F_0$, t_0G_0 и $t_{y_1}\text{II}_0$ и, наконец, t_0H_0 и $t_{y_1}F_0$.

При сравнении выполненного на рис. 17 преобразования перспективы предмета с построением перспективы этого же предмета заново из новой точки зрения станут ясными преимущества предлагаемого метода.

Таким образом, при построении перспектив отдельных объектов архитектурных ансамблей такой метод преобразования может в значительной степени упростить громоздкие построения, связанные с построением заново перспектив тех же объектов.

Доказанная закономерность в расположении центральных проекций на общей плоскости картины может также получить широкое применение для построения плановых перспектив архитектурных сооружений, к чему весьма часто приходится прибегать, во избежание получения так называемых „смятых" планов в случаях построения перспектив предметов при низких точках зрения.

Рассмотрим решение задачи построения плановой перспективы на следующем примере.

Пусть требуется построить перспективу фигуры паркета $oa_y a a_x$ на вертикальной плоскости при низкой точке зрения (рис. 18).

Построение перспективы выполняем на отдельном рис. 19, руководствуясь ранее изложенными особенностями построения центральных проекций на основе метода прямоугольных координат.

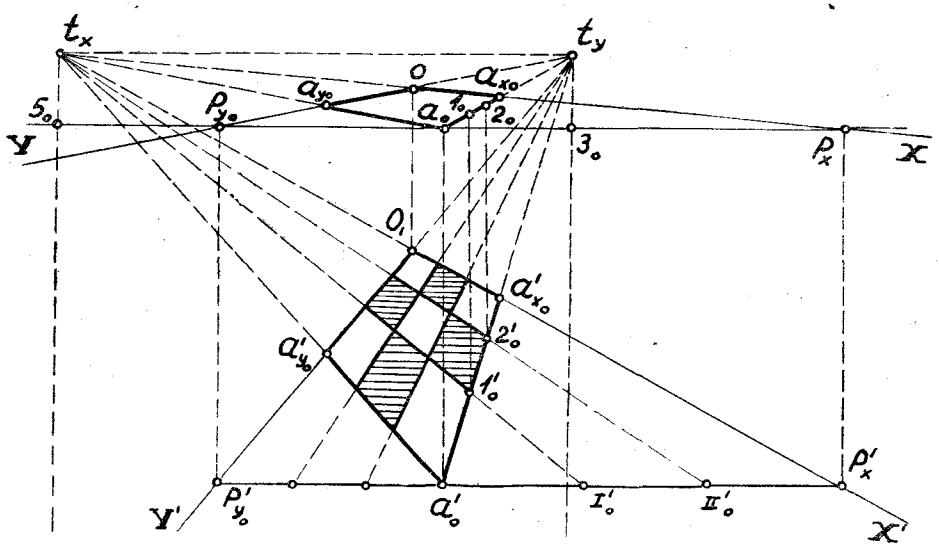


Рис. 19

Как видно из рисунка, построенная перспектива фигуры паркета оказалась небольших размеров и довольно узкой (как принято говорить в практике построения перспектив, „смятой"). При еще более низком горизонте $t_x t_y$ перспектива фигуры может получиться настолько „смятой", что чрезвычайно затруднительным будет определить перспективы отдельных точек этой фигуры, вследствие пересечения прямых, определяющих перспективы точек под тупыми углами, близкими по величине к 180°.

Для того чтобы в таком случае получить перспективу фигуры несколько бóльших размеров и не „смятой", с целью точного нанесения на перспективном изображении всех деталей фигуры, прибегают к построению перспективы той же фигуры при опущенной предметной плоскости с сохранением неизменного положения плоскости картины и точки зрения.

При опускании предметной плоскости xoy линия $p_{y_o} p_x$ (основание картины) со всеми точками, лежащими на ней, опустится вниз и займет

положение $p'_{y_0}p'_x$, что и показано на рис. 19; точки a_0, I_0 и II_0 отмечены на рисунке в новых положениях a_0', I_0' и II_0'.

Поскольку положение точки зрения остается неизменным, точки схода t_x и t_y сохранят свое положение и для построения перспективы при опущенной предметной плоскости. Построение такой перспективы выполнено на рис. 19, и путь решения этой задачи имеет полную аналогию с построением перспективы при первоначальном положении предметной плоскости.

Как видно из рисунка, в случае опущенной предметной плоскости перспектива фигуры получается больших размеров и на таком изображении достаточно точно могут быть нанесены все подробности фигуры.

Перспективы всех точек фигуры при опущенной предметной плоскости связаны с перспективами тех же точек при первоначальном положении предметной плоскости вертикальными прямыми. Имея это в виду, нетрудно построить перспективу любой точки при первоначальном положении предметной плоскости, пользуясь перспективой

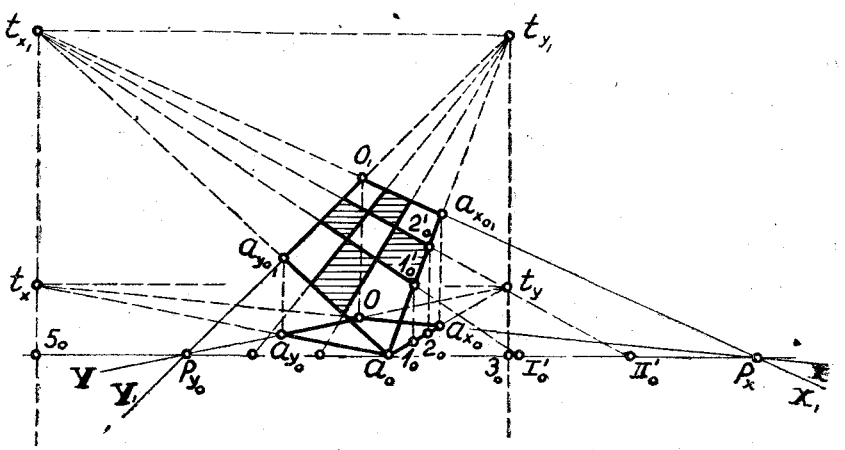


Рис. 20

той же точки, построенной на опущенной предметной плоскости, что и показано на рис. 15 для точек 1 и 2.

Такой путь построения перспектив точек 1 и 2 позволяет точнее определить их местоположение на рисунке, ибо эти точки определяются в пересечении прямых под углами, близкими к 90°.

Вместо того чтобы при решении задачи построения перспективы фигуры паркета, представленной на рис. 18, пользоваться опусканием предметной плоскости, может быть предложен прием, основанный на использовании доказанной закономерности в расположении центральных проекций на общей плоскости картины.

Этот прием заключается в том, что вместо опускания предметной плоскости выбирается новая точка зрения, связанная с имеющейся точкой зрения вертикальной прямой, но расположенная на большой высоте над предметной плоскостью.

При таком выборе новой точки зрения перспективы отдельных точек фигуры, построенные проектированием из двух различных точек зрения — имеющейся и вновь выбранной — на одну и ту же плоскость картины, будут связаны друг с другом вертикальными прямыми, параллельными прямой, соединяющей обе точки зрения (см. § 1).

Решение задачи построения перспективы фигуры паркета, основанное на выборе новой точки зрения, представлено на рис. 20.

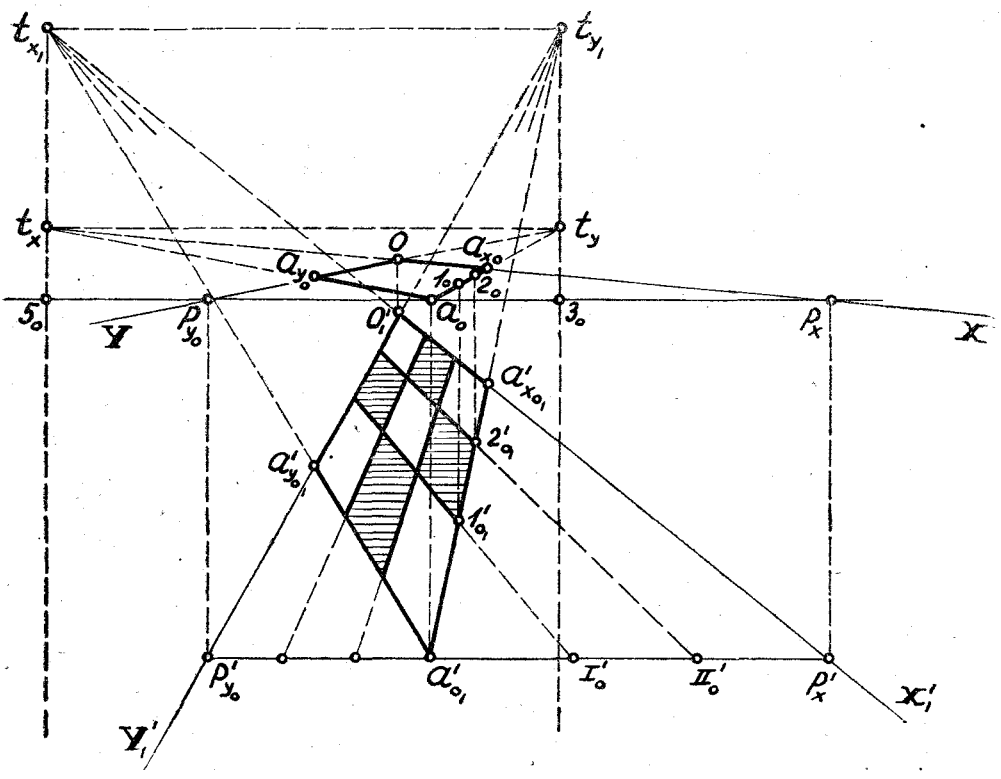


Рис. 21

Чтобы получить размеры перспективы фигуры паркета несколько бóльших размеров, можно одновременно с опусканием предметной плоскости выбрать и новую точку зрения, как было указано выше. Такой путь решения задачи представлен на рис. 21.

Перспектива фигуры паркета может быть получена еще бóльших размеров, если применить прием, основанный на использовании точки преобразования (рис. 22).

На рис. 22 первоначально выполнено построение перспективы $Oa_{x_0}a_0a_{y_0}$ фигуры паркета oa_xaa_y, представленной на рис. 18. Чтобы перспектива фигуры получилась больших размеров, выполняем построение ее из новой точки зрения, причем последнюю выбираем так, чтобы она оказалась расположенной по другую сторону плоскости картины, но на такой же высоте над предметной плоскостью xoy.

Точка пересечения с плоскостью картины прямой, соединяющей имеющуюся точку зрения с вновь выбранной, — точка преобразования

t_0 — очевидно должна быть расположена на линии $t_x t_y$, (рис. 22). Прямоугольные проекции новой точки зрения s_1 и s_1' показаны на рис. 23, на котором также представлены и проекции s и s' той точки

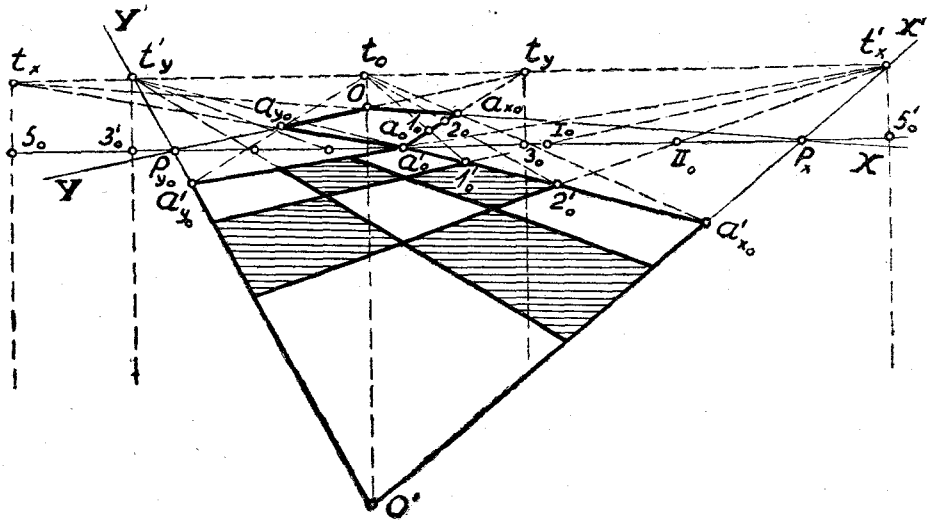


Рис. 22

зрения, которая отмечена на рис. 18. Точки t_{o_1} и t'_{o_1} на рис. 23 представляют собой прямоугольные проекции точки преобразования.

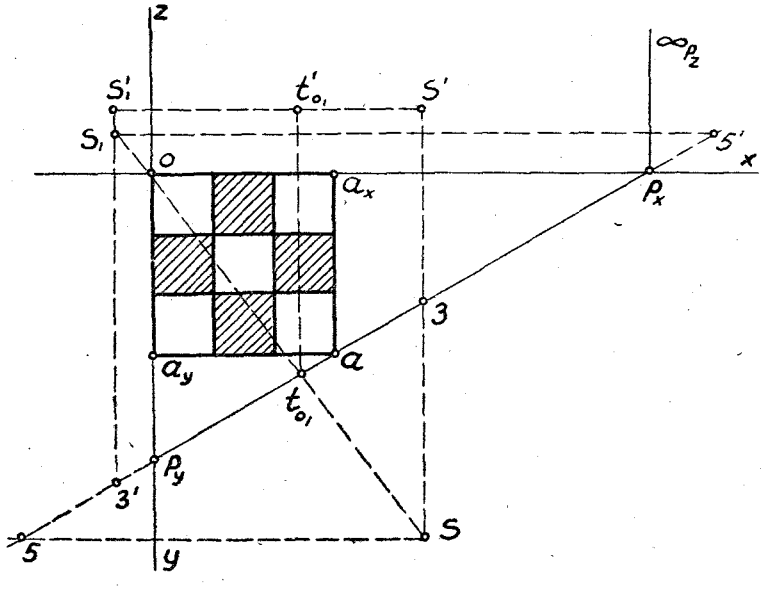


Рис. 23

После выбора точки преобразования t_0 без особых затруднений может быть построена увеличенная перспектива фигуры паркета из новой точки зрения. Путь решения такой задачи следующий.

Проводится прямая t_0o, и на этой прямой в произвольной точке, желательно возможно ниже линии $p_x p_{y_0}$ выбирается проекция O' начала координат из новой точки зрения.

Точки O', p_x и p_{y_0} позволяют определить и новые проекции координатных осей $O'X'$ и $O'Y'$, а также и новые точки схода t'_x и t'_y, которые должны располагаться на прежней линии горизонта.

После указанных построений определяем новую перспективу фигуры паркета $O'a'_{y_0}a'_0a'_{x_0}$, пользуясь точкой преобразования t_0 и новыми точками схода $t_x't_y'$. Построенная перспектива из новой точки зрения получается значительно больших размеров, чем имевшаяся ранее, и на такой перспективе без особых затруднений и вполне

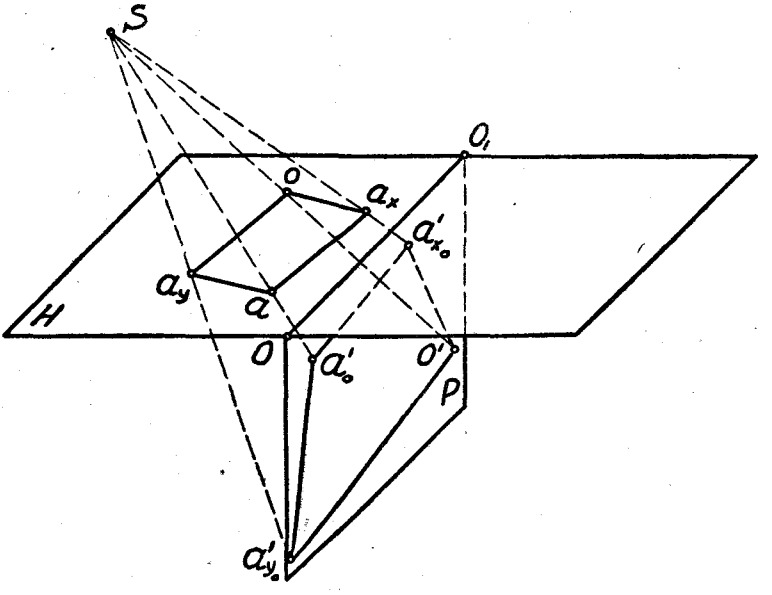


Рис. 24

точно могут быть нанесены перспективы всех деталей фигуры (рис. 24).

Пользуясь увеличенной перспективой фигуры ее детали могут быть достаточно точно нанесены и на имеющейся „смятой" перспективе, что показано на рисунке для точек 1 и 2. Перспективы этих точек 1_0 и 2_0 определены в пересечении прямой a_0t_y с прямыми t_01_0' и t_02_0', причем отмеченные прямые пересекаются соответственно друг с другом под углами, весьма близкими к 90°.

При сравнении решения одной и той же задачи построения плановой перспективы различными методами отчетливо видны следующие преимущества последнего метода, основанного на использовании точки преобразования.

1. Увеличение перспективы фигуры получается наибольшим. Такое увеличение фигуры обусловлено тем, что при использовании точки преобразования основание пирамиды проектирования расположено между плоскостью картины и точкой зрения (см. рис. 24), тогда

как в других изложенных способах решения задачи плоскость картины расположена между основанием и вершиной (в точке зрения) пирамиды проектирования (см. рис. 25).

2. Прямые, пересечение которых определяет положения перспектив отдельных точек на „смятой" перспективе фигуры по перспективам тех же точек на увеличенной перспективе, пересекаются под углами более близкими к 90°, что приводит к большей точности построений.

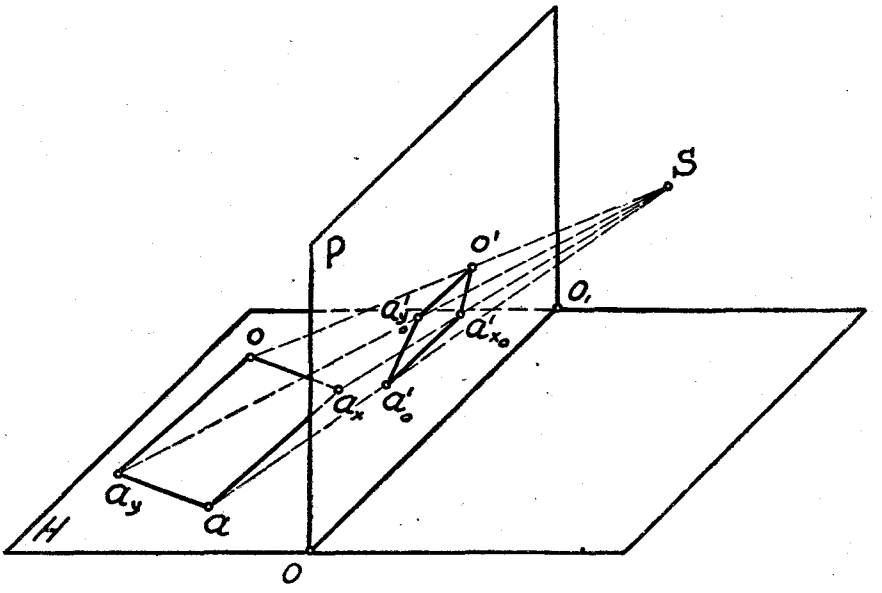


Рис. 25

В качестве примеров преобразования центральных проекций предметов на общей плоскости картины были рассмотрены случаи, когда эта плоскость вертикальна. Для случаев наклонной плоскости картины путь решения аналогичных задач остается прежним с точки зрения существа их решений, некоторые особенности имеют лишь чисто внешний характер.

Выводы

1. Установлена закономерность в расположении центральных проекций на общей плоскости картины, что является решением вопроса, не встречающегося в существующей литературе по начертательной геометрии.

2. Доказанная закономерность позволяет установить рациональные пути решения некоторых задач инженерной практики, связанных с построением перспективных изображений на плоскости, занимающей произвольное положение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Е. С. Новая начертательная геометрия, Известия Академии наук, 1917.
2. Рынин Н. А. Перспектива. 1918.
3. Дешевой М. А. Основания для объединения главнейших методов проектирования. Известия Электротехнического института, 1913, вып. VIII.
4. Зметный А. Я. Линейная перспектива на наклонной плоскости, Стройиздат, 1941.
5. Глаголев Н. А. Начертательная геометрия. Гостехиздат, 1946.
6. Добряков А. И. Курс начертательной геометрии. Государственное Архитектурное издательство, 1949.
7. Четвертухин Н. Ф. Введение в высшую геометрию. Учпедгиз, 1935.

Поступило
21 III 1954 г.